Archiv der Mathematik und Physik

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert.

Königl. Geheimer Regierungs-Rath

und

Professor zu Greifswald.

Einundfunfzigster Theil.

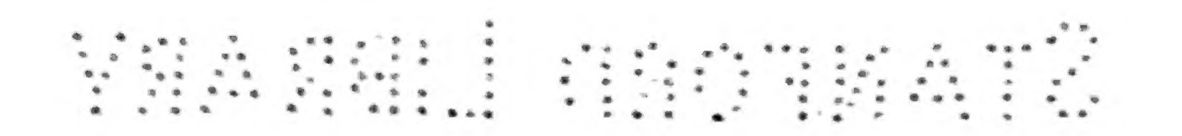
Mit acht lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1870.



Inhaltsverzeichniss des einundfunfzigsten Theils.

Nr. der Abhandlung. | Heft. | Seite.

Geometrie.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Mechanik.

Optik.

Nautik.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte *).

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Elementare Ableitung der Formel für die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels.

Von

Herrn *Heinrich Gretschel*,
Lehrer der Mathematik an der Handelslehranstalt in Leipzig.

(Figur s. Taf. I.)

I.

Die nachstehenden Entwickelungen setzen als bekannt voraus die beiden Formeln der niederen Analysis

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots\;\;2k} x^k \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

und

$$\cos^{2\mu}\varphi = 2^{-2\mu}(2\mu)_\mu + 2^{1-2\mu} \sum_{\lambda=0}^{\mu-1} (2\mu)_\lambda \cos 2\,(\mu-\lambda)\,\varphi, \; . \; (2)$$

in welcher letzteren μ eine ganze positive Zahl und

$$(2\mu)_\lambda = \frac{2\mu\,(2\mu-1)\,(2\mu-2)\ldots(2\mu-\lambda+1)}{1.\quad 2.\qquad 3\;\ldots\ldots\ldots\;\lambda}$$

ist, sowie ausserdem noch die goniometrische Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} \cos k\varphi = \frac{\cos\frac{n+1}{2}\varphi \sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Es wird ferner Anwendung gemacht werden von dem Grenzwerthe, den die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2n} \cdot \cos^{2\mu} k \frac{\pi}{2n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

für $n = \infty$ annimmt. Die Ermittelung dieses Werthes ist daher unsere erste Aufgabe.

Man erhält aber diesen Werth, wenn man in Gleichung (2) für φ der Reihe nach

$$1\frac{\pi}{2n},\ 2\frac{\pi}{2n},\ 3\frac{\pi}{2n}, \ldots,\ n\frac{\pi}{2n} \quad \ldots\ldots (5)$$

schreibt, die erhaltenen Ausdrücke addirt, dann die Summe mit $\frac{\pi}{2n}$ multiplicirt und schliesslich $n = \infty$ setzt. Nun lassen aber die erwähnten Substitutionen das erste, vor dem Summenzeichen stehende Glied der rechten Seite von Gleichung (2) unverändert, und die Addition giebt also zunächst $n$mal dieses Glied, oder

$$n \, . \, 2^{-2\mu} (2\mu)_\mu = n \frac{1.3.5 \ldots (2\mu - 1)}{2.4.6 \ldots \quad 2\mu}.$$

Multiplicirt man nun noch mit $\frac{\pi}{2n}$, so ergiebt sich der von n unabhängige Ausdruck

$$\frac{1.3.5 \ldots (2\mu - 1)}{2.4.6 \ldots \quad 2\mu} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Substituirt man ferner die in (5) angegebenen n Werthe von φ in eines der hinter dem Summenzeichen auf der rechten Seite von (2) stehenden Glieder und addirt, so erhält man, wenn vorläufig der Binominalcoefficient und der vor dem Summationszeichen stehende Factor weggelassen werden, die Summe

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \cos 2(\mu - \lambda) 1 \frac{\pi}{2n} + \cos 2(\mu - \lambda) 2 \frac{\pi}{2n} + \ldots + \cos 2(\mu - \lambda) n \frac{\pi}{2n} \\ & = \cos 1 (\mu - \lambda) \frac{\pi}{n} + \cos 2 (\mu - \lambda) \frac{\pi}{n} + \ldots + \cos n (\mu - \lambda) \frac{\pi}{n}. \end{aligned} \right.$$

Der Gleichung (3) zufolge hat aber diese Summe den Werth

$$\frac{\cos \frac{n+1}{2} (\mu - \lambda) \frac{\pi}{n} \sin (\mu - \lambda) \frac{\pi}{2}}{\sin (\mu - \lambda) \frac{\pi}{2n}} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Ist $\mu - \lambda$ eine gerade Zahl, so ist $\sin(\mu - \lambda)\frac{\pi}{2} = 0$ und sonach hat die ganze Summe den Werth Null.

Ist dagegen $\mu - \lambda$ ungerade, so hat der zweite Factor des Zählers von (7) den Werth ± 1, und der erste Factor ist, abgesehen vom Vorzeichen, dem Nenner gleich. Demnach hat in diesem Falle die Summe (6) als Werth die positive oder negative Einheit.

Multiplicirt man nun die Summe der Reihe (6), sofern sie überhaupt von Null verschieden ist, noch mit $\frac{\pi}{2n}$ und setzt dann $n = \infty$, so erhält man wieder den Werth Null.

Da die Zahl der auf diese Art aus (2) sich ergebenden Summen endlich, nämlich gleich μ ist ($\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1$), so ist ihr Gesammtwerth, auch nachdem man eine jede noch mit dem bisher vernachlässigten Factor multiplicirt hat, ebenfalls der Null gleich, und als Werth der Summe (4) für ein unendlich grosses n ergiebt sich daher nur der Ausdruck (6). Es ist also für $n = \infty$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2n} \cdot \cos^{2\mu} k \frac{\pi}{2n} = \frac{1.3.5\ldots(2\mu-1)}{2.4.6\ldots\quad 2\mu} \cdot \frac{\pi}{2}. \quad \ldots \quad (8)$$

II.

Nach diesen Vorbereitungen kann die eigentliche Aufgabe, die Bestimmung der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels, in Angriff genommen werden.

Es sei in der Figur O der Drehungspunkt eines solchen Pendels von der Länge $OA = OB = l$; OA sei die äusserste Lage des letzteren, welche von der vertikalen Lage OB um den Winkel α abweicht, während die Abweichung der Lage OP von OB nur den Werth φ hat. Die Winkel denken wir uns dabei immer durch die Bögen gemessen, die ihnen in einem Kreise mit dem Halbmesser 1 angehören.

Dann hat man für die Geschwindigkeit v des Punktes P in seiner Bahn die Formel

$$v = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)}, \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

und wenn wir annehmen, dass diese Geschwindigkeit ungeändert bleibt, während der Punkt P das kleine Bogenelement PR durch-

läuft, welches einer Abnahme des Winkels φ um die Grösse $POR = \delta$ entspricht und also den Werth

$$PR = l\delta$$

hat, so können wir die Zeit τ, welche zum Durchlaufen dieses Elementes nöthig ist, nach der Formel

$$\tau = \frac{l\delta}{v} = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\delta}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}} \quad . \; . \; . \; . \; (10)$$

berechnen.

Wir projiciren nun die Punkte A, P und R rechtwinklig auf OB und schlagen über der Strecke

$$BC = l(1 - \cos\alpha) = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

als Durchmesser einen Halbkreis, welcher PM und RN in Q und S schneidet. Die Lage des Punktes Q, welcher dem Punkte P entspricht, bestimmen wir durch den Winkel $QBC = \psi$. Einer Abnahme des Winkels φ um die Grösse δ entspricht dann eine Zunahme von ψ, welche den Betrag $SBQ = \varepsilon$ hat. Während der Punkt P von A nach B geht, das Pendel also eine Viertelschwingung vollendet, geht der Punkt Q auf dem Halbkreise von C bis B, wobei ψ alle Werthe von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ durchläuft. Wir wollen nun statt der Bewegung des Punktes P im Folgenden die Bewegung des Punktes Q, gleichsam des Schattens, der von P auf den Halbkreis fällt, in's Auge fassen. Zu dem Ende schaffen wir aus der Gleichung (10) die Grössen φ und δ weg und ersetzen sie durch ψ und ε.

Aus der Figur ergiebt sich zunächst für CM der doppelte Werth

$$l(\cos\varphi - \cos\alpha) \text{ und } BC.\sin^2\psi.$$

Durch Gleichsetzung beider Werthe ergiebt sich unter Beachtung der Formel (11)

$$\cos\varphi - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

woraus folgt

$$\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi. \quad . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Ferner kann man MN betrachten als die Projection des Bogen-

elementes $PR = l\delta$, welches mit der Richtung OB den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ einschliesst, und daher ist

$$MN = l\delta \sin\varphi.$$

Andererseits ist aber MN auch die Projection des Bogenelementes QS, welches mit der Richtung OB den Winkel $\frac{\pi}{2} - 2\psi$ einschliesst. Als Richtung des Bogenelementes betrachten wir sowol bei PR, als bei QS die Richtung der Tangente im Anfangspunkte. Was die Länge des Elementes QS betrifft, so ist dieselbe gleich dem Halbmesser des Kreises, multiplicirt mit dem zu QS gehörigen Centriwinkel 2ε, oder

$$QS = \tfrac{1}{2} BC . 2\varepsilon = BC . \varepsilon = 2l\varepsilon \sin^2\frac{\alpha}{2};$$

für MN ergiebt sich sonach der zweite Werth

$$MN = QS . \sin 2\psi = 4\, l\varepsilon \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin\psi \cos\psi.$$

Die Gleichsetzung beider Werthe von MN liefert für δ den Werth

$$\delta = \frac{4\varepsilon \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin\psi \cos\psi}{\sin\varphi}.$$

Mit Benutzung der Gleichung (12) findet man für den Nenner $\sin\varphi$ den Ausdruck

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - (\cos\alpha + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi)^2}$$
$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\psi \sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\psi}.$$

Die Einsetzung dieses Werthes liefert für δ die Formel

$$\delta = \frac{2\varepsilon \sin\frac{\alpha}{2} \sin\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\psi}},$$

und wenn man sowol diesen Werth, als den in Gleichung (13) verzeichneten in die Formel (10) substituirt, so erhält man für das Zeitelement τ den Ausdruck

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\psi}}.$$

Wendet man auf diese Formel die Entwickelung (I) an, so bekommt man τ in der Form

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \varepsilon\,[1 + \tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\psi + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\frac{\alpha}{2}\cos^4\psi + \ldots].$$

Nachdem wir so die Zeit ermittelt haben, in welcher der Punkt Q das Bogenelement QS durchläuft, denken wir uns den ganzen Umfang des Halbkreises in n solche gleich grosse Bogenelemente getheilt. Die Zeittheilchen, welche zur Durchlaufung derselben nöthig sind, erhalten wir, indem wir

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2n}$$

setzen und für ψ der Reihe nach die Werthe

$$1\frac{\pi}{2n},\ 2\frac{\pi}{2n},\ 3\frac{\pi}{2n}, \ldots,\ n\frac{\pi}{2n}$$

substituiren. Addiren wir alle so erhaltenen Werthe von τ und setzen zuletzt $n = \infty$, so ergiebt sich die Dauer t einer Viertel schwingung

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\,[\Sigma\frac{\pi}{2n} + \tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\Sigma\frac{\pi}{2n}\cos^2 k\frac{\pi}{2n} + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\frac{\alpha}{2}\,\Sigma\frac{\pi}{2n}\cos^4 k\frac{\pi}{2n} + \ldots.],$$

wo alle Summationen sich auf die n Werthe $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ erstrecken.

Es ist aber offenbar

$$\Sigma\frac{\pi}{2n} = n \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2},$$

und dann zufolge (8)

$$\Sigma\frac{\pi}{2n}\cos^2 k\frac{\pi}{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\Sigma\frac{\pi}{2n}\cos^4 k\frac{\pi}{2n} = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2},$$

. . . .

Mithin erhält man für die Dauer einer Viertelschwingung des Pendels die Formel

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots\right]. \ldots (14)$$

II.

Ueber die Gestalt kleiner Flächenstücke.

Von

Herrn Professor *Karl Exner*
am akademischen Gymnasium in Wien.

(Figur s. Taf. I.)

Zwischen den Krümmungshalbmessern der Normalschnitte eines Punktes einer krummen Fläche besteht nach Euler die Relation:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha.$$

Hier bedeuten R_1, R_2 die Halbmesser der Hauptschnitte, ϱ den Halbmesser eines beliebigen Normalschnittes, α den Winkel dieses Schnittes mit einem der Hauptschnitte.

Es scheint aus dieser Gleichung eine bestimmte Vorstellung hervorzugehen über die Gestalt kleiner Flächenstücke, welche unabhängig von jener Formel und der Analysis überhaupt aus einigen einfachen geometrischen Betrachtungen abzuleiten die Aufgabe der folgenden Auseinandersetzungen ist.

1. Wenn man eine Curve nur in der Nähe eines ihrer Punkte

betrachtet, so erfährt daselbst der Krümmungshalbmesser der Curve keine merkliche Aenderung. Desshalb hat jedes kleine Curvenstück die Gestalt eines Kreisbogens.

2. Denkt man eine Ebene parallel zu sich selbst in Bewegung, während sie eine krumme Fläche beständig in einer Curve und eine auf der krummen Fläche befindliche Curve beständig in einem Punkte durchschneidet, so wird die Krümmung der Schnittcurve in der Nähe dieses Punktes eine Function der Lage der Ebene sein. Wenn man aber die Bewegung der Ebene nur um ein unendlichkleines Stück vor sich gehen lässt, so wird jene Krümmung sich um nichts merkliches ändern und daher als constant anzusehen sein.

3. Es sei F ein unendlichkleines Flächenstück, π ein etwa in der Mitte desselben gelegener Punkt, n die Normale des Punktes, N eine Normalebene, s der zugehörige Normalschnitt, τ die tangirende Ebene. Nach 1. ist s ein Kreisbogen. Wenn man N und n in Drehung versetzt, so ändert s seinen Halbmesser beständig, bis er nach einer ganzen Umdrehung wieder seinen ursprünglichen Werth annimmt. Man kann daher das Flächenstück F aus seinen Normalschnitten s construiren, wenn man die Function weiss, nach welcher sich der Radius von s ändert. Diese Function scheint willkürlich zu sein. Sie ist es aber in Wahrheit nicht, da die Normalschnitte der Bedingung unterworfen sind, dass ihre Durchschnittspunkte mit einer beliebigen Ebene einen Kreisbogen bilden müssen. Es folgt hieraus sogleich, dass die Gestalt von F durch drei aufeinander folgende Normalschnitte völlig bestimmt ist.

4. Es werde F geschnitten durch eine Ebene E parallel zu n und senkrecht zu einer Normalebene N. Der Schnitt heisse s_1. Er ist nach 1. ein Kreisbogen. Die beiden Schnitte s und s_1 werden sich in einem Punkte π_1 schneiden und s_1 daselbst eine Tangente t haben und einen Radius r. Im Allgemeinen wird t gegen T und daher r gegen n geneigt sein. Man nehme aber an, s habe ein Maximum oder ein Minimum der Krümmung. Dann wird s vollkommen congruent mit einem benachbarten Normalschnitte. Daher wird t parallel zu τ und r parallel zu n. Man gebe jetzt der Ebene E eine Bewegung parallel zu sich selbst. In jedem Momente der Bewegung hat man einen Schnitt s_1, welcher ein Kreisbogen ist, den Schnitt s in einem Punkte π_1 schneidet, daselbst eine Tangente t parallel zu T und einen Radius r parallel zu n hat. Ueberdiess sind alle Radien r gleich gross nach dem, was unter 2. gesagt worden

ist. Man kann nunmehr das Flächenstück F aus allen Schnitten s_1 construiren und gelangt daher zu dem folgenden Satze:

Jedes unendlichkleine Flächenstück entsteht durch die stetige Bewegung des unendlichkleinen Kreisbogens, welcher an einem zweiten unendlichkleinen Kreisbogen so fortgleitet, dass die Ebenen beider beständig auf einander senkrecht stehen, und der Mittelpunkt des ersten beständig in der Ebene des zweiten bleibt.

Zur Bestimmung der Gestalt eines unendlichkleinen Flächenstückes ist es daher nöthig die beiden Radien R_1, R_2 der erzeugenden Kreisbogen zu kennen und zu wissen, ob dieselben nach derselben Seite gerichtet sind oder nach entgegengesetzten Seiten, da im ersten Falle eine haubenförmige, im zweiten Falle eine sattelförmige Figur entsteht.

5. Aus der oben gegebenen Construction lassen sich leicht verschiedene Sätze ableiten. Um beispielsweise den Euler'schen Satz zu ziehen, seien ab, bc (s. die Figur) die beiden erzeugenden Kreisbogen, ac ein Normalschnitt vom Radius ϱ. Dann ist:

$$ad = \frac{\overline{dc}^2}{2\varrho}, \quad be = \frac{\overline{ae}^2}{2R_1} = \frac{\overline{dc}^2 . \cos^2\alpha}{2R_1}, \quad cf = \frac{\overline{bf}^2}{2R_2} = \frac{\overline{dc}^2 . \sin^2\alpha}{2R_2}.$$

Diess in die Gleichung $ad = be + cf$ gesetzt, giebt:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha.$$

III.

Ein merkwürdiger Kreis um den Schwerpunkt des Perimeters des geradlinigen Dreiecks als Analogon des Kreises der neun Punkte.

Von

Herrn Dr. *Th. Spieker,*
Oberlehrer an der Realschule in Potsdam.

(Figur s. Taf. I.).

Da ich in der mir bekannten Literatur nirgends dieses Kreises Erwähnung gefunden habe, derselbe aber als Gegenstück zum Feuerbach'schen Kreise Interesse verdient, so scheint es mir nicht unwerth, an diesen zwar elementaren, aber mit Unrecht vernachlässigten Gegenstand zu erinnern.

Bezeichnet man die fünf merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks der Kürze wegen:

1. den Schwerpunkt mit S,
2. den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises mit O,
3. den Schnittpunkt der Höhen mit H,
4. den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises mit M,
5. den Schnittpunkt der Ecktransversalen zu den Berührungspunkten der den Gegenseiten anbeschriebenen Kreise mit Q *);

---

*) In Betreff dieses Punktes vergl. Grunert's Archiv Bd. 42. die Abhandlungen von Harnischmacher und Reuschle p. 90 und 352; ferner Chr. Nagel's Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreieck gehörigen Kreise. Leipzig 1836 und des Verfassers Lehrbuch der ebenen Geometrie. 3. Aufl. p. 177. Potsdam 1868.

so liegen bekanntlich die drei Punkte O, S, H in einer Geraden, so dass $OS : SH = 1 : 2$; ebenso die drei Punkte M, S, Q in einer Geraden, so dass $MS : SQ = 1 : 2$. Die vier Punkte O, M, Q, H bilden daher ein Trapez, dessen Diagonalen sich in S schneiden, und in welchem $OM = \frac{1}{2}QH$ ist.

Ferner ist bekanntlich der Halbirungspunkt der Linie OH ein ausgezeichneter Punkt, nämlich das Centrum des dem Mittendreieck (dessen Seiten die Mitten der Seiten des Dreiecks verbinden) umbeschriebenen Kreises, des s. g. Feuerbach'schen oder des Kreises der neun Punkte. Der Mittelpunkt dieses Kreises soll mit N bezeichnet werden.

Nun vervollständigt sich die Analogie zwischen den beiden Punktsystemen O, S, H und M, S, Q, welche sich nach verschiedenen Richtungen verfolgen lässt, namentlich auch dadurch, dass der Halbirungspunkt von MQ, den wir mit P bezeichnen wollen, ebenfalls ein ausgezeichneter Punkt des Dreiecks, nämlich das Centrum des dem Mittendreieck einbeschriebenen Kreises und mithin der Schwerpunkt des Perimeters ist; und dass dieser Kreis dem Feuerbach'schen Kreise vollkommen, aber in reciproker Weise analog ist.

Um die erste Behauptung zu beweisen, seien in dem Dreieck ABC (s. die Figur) die merkwürdigen Punkte M, S, Q und das Mittendreieck DEF verzeichnet; P sei der Halbirungspunkt der Strecke MQ. Man verbinde A mit M und D mit P, und ziehe die Schwerpunktstransversale AD. Da nun $MP = \frac{1}{2}MQ$, und $MS = \frac{1}{3}MQ$, so ist:

$$MS : SP = 2 : 1. \quad \text{Ferner}$$
$$AS : SD = 2 : 1$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$AM \ddagger DP.$$

Daher halbirt DP den $\angle EDF$ des Mittendreiecks. Aus gleichen Gründen halbirt auch EP den $\angle DEF$ und FP den $\angle DFE$. Daher ist P das Centrum des dem Dreieck DEF einbeschriebenen Kreises und mithin der Schwerpunkt des Umfangs des Dreiecks ABC.

Um zweitens die Analogie zwischen dem einbeschriebenen Kreise des Dreiecks DEF, den wir kurz Kreis um P nennen wollen, und dem Feuerbach'schen Kreise übersichtlicher zu machen, stellen wir die Eigenschaften beider gegenüber.

Kreis der neun Punkte.

1. Die Punkte O, S, N, H liegen harmonisch; S und H sind daher innerer und äusserer Aehnlichkeitspunkt des umbeschriebenen und des Feuerbach'schen Kreises.

2. Der Radius des Feuerbach'schen Kreises ist halb so gross, als der Radius des umbeschriebenen Kreises.

3. Das Centrum N des Feuerbach'schen Kreises liegt auf der Verbindungslinie der Mitte jeder Seite mit dem Halbirungspunkte des obern Abschnitts der zugehörigen Höhe (Ecktransversale durch H), und ist der Halbirungspunkt derselben.

Kreis um P.

1ª. Die Punkte M, S, P, Q liegen harmonisch; S und Q sind daher innerer und äusserer Aehnlichkeitspunkt des einbeschriebenen und des Kreises um P.

2ª. Der Radius des Kreises um P ist halb so gross, als der Radius des einbeschriebenen Kreises.

3ª. Der Punkt P liegt auf der Verbindungslinie der Mitte jeder Seite mit dem Halbirungspunkte des obern Abschnitts der zugehörigen Ecktransversale durch Q, und ist der Halbirungspunkt derselben.

Beweis. G sei der Halbirungspunkt des obern Abschnitts der Ecktransversale AQ. Nach der Theorie des Punktes Q ist bekanntlich $DM \# AQ$, und $DM = \frac{1}{2}AQ$. Da nun P der Halbirungspunkt von QM ist, so geht auch DG durch P, und es ist $DP = PG$.

4. Der dem Mittendreieck umbeschriebene Kreis geht auch durch die Halbirungspunkte der obern Abschnitte der Höhen.

4ª. Der dem Mittendreieck einbeschriebene Kreis berührt auch die Seiten des Dreiecks, dessen Ecken die Halbirungspunkte der obern Abschnitte der Ecktransversalen durch Q sind.

Beweis. G, J, K seien die Halbirungspunkte der obern Abschnitte der Ecktransversalen durch Q. Fällt man von M, P und Q die Lothe Mm, Pp, Qq auf die Seite BC, so ist:

$$Pp = \frac{1}{2}(Mm + Qq).$$

Nun ist $JK \# BC$ und Qq wird von der Linie JK halbirt. Subtrahirt man daher von obiger Gleichung beiderseits $\frac{1}{2}Qq$, so ergiebt sich, dass das Loth von P auf $JK = \frac{1}{2}Mm$, d. h. nach 2ª. gleich dem Radius des Kreises um P ist. Daher berührt dieser Kreis die Linie JK, und aus gleichen Gründen auch die beiden andern Seiten des Dreiecks GJK.

5. Der Feuerbach'sche Kreis schneidet die Seiten des Dreiecks in den Punkten, wo sie von den Höhen getroffen werden.

5ª. Der Kreis um P berührt die Seiten des Mittendreiecks in den Punkten, wo sie von den Ecktransversalen durch Q geschnitten werden.

Beweis. Der Berührungspunkt der Linie EF mit dem Kreise um P heisse L. Fällt man das Loth Mm auf BC und verlängert es bis zum Schnitt in m' mit der Ecktransversale AQ, so ist bekanntlich $Mm' = Mm = \varrho$. Da nun nach 2ª. $PL = \frac{1}{2}\varrho$, so ist:

$$Mm' : PL = QM : QP,$$

und da $PL \mathrel{\#} Mm'$, so liegt der Punkt L auf der Linie AQ, w. z. b. w.

6. Der Feuerbach'sche Kreis schneidet die durch die Halbirungspunkte der obern Höhenabschnitte mit den zugehörigen Seiten gezogenen Parallelen da, wo dieselben von den durch O nach den Mitten der Seiten gerichteten Transversalen getroffen werden.

6ª. Der Kreis um P berührt die Seiten des durch die Halbirungspunkte G, J, K der obern Transversalabschnitte bestimmten Dreiecks da, wo dieselben von den durch M nach den Mitten der Seiten gerichteten Transversalen getroffen werden.

Beweis. Da $JK \mathrel{\#} EF$, so liegt der Berührungspunkt des Kreises mit der Linie JK in der Verlängerung von PL, und zwar um sich selbst. Da aber ferner auch $QA \mathrel{\#} MD$ und $PQ = PM$ ist, so muss auch der Schnittpunkt von MD und JK mit jenem Berührungspunkte zusammenfallen. Aus gleichen Gründen fallen auch die Schnittpunkte von ME und MF und resp. der Linien GK und GJ mit den Berührungspunkten des Kreises zusammen

Während daher der Feuerbach'sche Kreis durch sechs ausgezeichnete Punkte, nämlich die Mitten der Seiten und die Halbirungspunkte der obern Höhenabschnitte geht, berührt der Kreis um P sechs correspondirende Linien, nämlich die Parallelen durch die Mitten der Seiten und durch die Halbirungspunkte der obern Abschnitte der Ecktransversalen durch Q. Während ferner der Feuerbach'sche Kreis durch sechs andere ausgezeichnete Punkte, nämlich die Gegenpunkte der sechs ersten auf dem Transversalsystem durch H und dem ihm parallelen durch O geht, berührt der letztere jene sechs Linien in den Schnittpunkten der parallelen Transversalsysteme durch Q und M. Im Lichte dieser Analogie wird es übrigens bemerklich, dass es folge-

richtig wäre, den Feuerbach'schen Kreis den Kreis der zwölf Punkte zu nennen, da das vierte Punktsystem auf den Perpendikeln durch O, das man gewöhnlich vernachlässigt, mit demselben Rechte diesem Kreise angehört, wie die Fusspunkte der Höhen.

Die Punkte O und N sind nur einzelne, die Punkte M und P dagegen je vierfache. Denn so wie dem Centrum M des einbeschriebenen Kreises drei Centra M_1, M_2, M_3 der anbeschriebenen Kreise zugehörig sind, sind auch dem Punkte Q noch drei andere Q_1, Q_2, Q_3 correlat, von denen z. B. Q_1 durch die Ecktransversale von A nach dem Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises mit der Seite BC, durch die Ecktransversale von B nach dem Berührungspunkte des Kreises um M_3 mit der Verlängerung von AC, und durch die Ecktransversale von C nach dem Berührungspunkte des Kreises um M_2 mit der Verlängerung von AB bestimmt wird. Die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 liegen mit den gleichnamigen M_1, M_2, M_3 und mit S je auf einer Geraden und in Abständen von S, die sich wie $2:1$ verhalten. In aller Kürze und ohne Beweise will ich noch anführen, dass auch die Halbirungspunkte der Linien M_1Q_1, M_2Q_2, M_3Q_3, die entsprechend mit P_1, P_2, P_3 bezeichnet werden müssen, in Beziehung auf die gleichnamigen Elemente alle die für P bewiesenen Eigenschaften besitzen. Die entsprechenden Kreise um P_1, P_2, P_3 sind die dem Mittendreieck DEF anbeschriebenen. Die Radien dieser Kreise sind halb so gross, als die der gleichnamigen anbeschriebenen Kreise des Dreiecks ABC. Jeder von ihnen berührt auch die Seiten desjenigen Dreiecks, das durch die Halbirungspunkte der obern Abschnitte der durch das gleichnamige Q gezogenen Ecktransversalen bestimmt wird. Die Seiten des Mittendreiecks werden in denjenigen Punkten berührt, wo die Ecktransversalen durch das gleichnamige Q sie schneiden, und die Seiten des andern Dreiecks werden in denjenigen Punkten berührt, wo sie von den Transversalen durch das gleichnamige Q nach den Mitten der Seiten des Dreiecks ABC geschnitten werden.

IV.

Ueber den Schwerpunkt der Umgrenzung bei den einfachsten Figuren und Körpern.

Von

Herrn Dr. *R. Most,*
Lehrer an der Realschule I. Ordnung in Stettin.

(Figuren s. Taf. I.)

In Nachfolgendem soll der bekannte Satz von dem Schwerpunkte des Triangels für den Umfang des Vierecks benutzt und dann die entsprechenden Constructionen für die drei- und vierseitige Pyramide angegeben werden:

1. Sind drei Punkte A, A_1, A_2 (Fig. 1) mit den Gewichten α, α_1, α_2 belastet, so hat der Schwerpunkt S eine solche Lage, dass sich verhält:

$$\Delta SA_1A_2 : \Delta SA_2A : \Delta SAA_1 = \alpha : \alpha_1 : \alpha_2 \text{ *)}.$$

Bezeichnet man den Schnittpunkt von AS und A_1A_2 mit B, so ist der harmonische Punkt T zu A, S und B der Schwerpunkt der mit $-\alpha$, α_1 und α_2 belasteten Punkte A, A_1 und A_2.

Beweis: ad I. Es verhält sich $\alpha_1 : \alpha_2 = BA_2 : BA_1$
$= SA_2A : SA_1A$

ad II. Es verhält sich $TB : TA = SB : SA$
$= \alpha : (\alpha_1 + \alpha_2)$.

---

*) Vergl. Möbius, der barycentrische Calcul pag. 26 u. f.

2. Werden die Ecken eines Dreiecks AA_1A_2 mit dem Gewicht der gegenüberliegenden Seiten a, a_1, a_2 belastet, so sind die Mittelpunkte der vier Berührungskreise M, N, N_1, N_2 die Schwerpunkte und zwar gilt der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises für gleichartige Massen, die der äusseren Berührungskreise für ungleichartige Massen.

Beweis: Es sollen die Belastungen α, α_1, α_2 so gewählt werden, dass der Schwerpunkt S mit M zusammenfällt; bezeichnet man den Radius des eingeschriebenen Kreises mit ϱ, so muss sich nach 1. verhalten:

$$\varrho a : \varrho a_1 : \varrho a_2 = \alpha : \alpha_1 : \alpha_2,$$

dem durch $\alpha = a$, $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2$ genügt wird. — Ferner übersieht man leicht, dass A, M, B und N (Fig. 2) harmonische Punkte sind, da die vier von A_1 ausgehenden Strahlen harmonische sind.

3. Sind vier Punkte des Raumes A, A_1, A_2, A_3 mit den Gewichten α, α_1, α_2, α_3 belastet, so hat der Schwerpunkt S die Lage, dass sich verhält:

$$SA_1A_2A_3 : SA_2A_3A : SA_3AA_1 : SAA_1A_2 = \alpha : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 \text{ *)}.$$

Bezeichnet man den Schnittpunkt von AS und $A_1A_2A_3$ mit B, so ist der harmonische Punkt T zu A, S und B der Schwerpunkt der mit $-\alpha$, α_1, α_2, α_3 belasteten Punkte A, A_1, A_2, A_3.

Beweis: Da B der Schwerpunkt von A_1, A_2, A_3 sein muss, so verhält sich nach 1.:

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = BA_2A_3 : BA_3A_1 : BA_1A_2$$

also auch

$$= SAA_2A_3 : SAA_3A_1 : SAA_1A_2;$$

mit Hülfe der entsprechenden Punkte B_1, B_2, B_3 ergeben sich die entsprechenden Proportionen. — In Bezug auf T ergiebt sich:

$$TB : TA = SB : SA = \alpha : (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

4. Wenn man bei einem Tetraeder $AA_1A_2A_3$ die Ecken mit dem Gewicht der gegenüberliegenden Seitenflächen a, a_1, a_2, a_3 belastet, so sind die Mittelpunkte der Berührungskugeln M, N, N_1, N_2, N_3 die Schwerpunkte derselben und zwar bezieht sich

*) a. a. O. pag. 28.

der Mittelpunkt der inneren Berührungskugel auf gleichartige, die der äusseren auf ungleichartige Massen.

Beweis: Ist ϱ der Radius der eingeschriebenen Kugel, so muss sich nach 3. verhalten:

$$\alpha:\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3 = \varrho a:\varrho a_1:\varrho a_2:\varrho a_3,$$

dem durch $\alpha = a$ $\alpha_1 = a_1$ u. s. w. genügt wird. — Dass ferner N der harmonische Punkt zu A, M und B ist, erkennt man daraus, dass die etwa durch A_1A_2 nach diesen vier Punkten gelegten vier Ebenen harmonische sind.

5. Bestimmt man in einem Dreieck das der Seitenmitten, so sind die Mittelpunkte M, N, N_1, N_2 der vier Berührungskreise des letzteren die Schwerpunkte für den Umfang des gegebenen, je nachdem die drei Seiten von gleicher oder ungleichartiger Masse gedacht werden.

Beweis: Ist in Fig. 3. das Dreieck AA_1A_2 gegeben mit den Mitten der Seiten C, C_1, C_2, so sind dieselben mit A_1A_2, A_2A, AA_1 oder mit $2.C_1C_2$, $2.C_2C$, $2.CC_1$ belastet zu denken, die Schwerpunkte ergeben sich also nach 2.:

M	für	$+A_1A_2$	$+A_2A$	$+AA_1$
N	„	$-A_1A_2$	$+A_2A$	$+AA_1$
N_1	„	$+A_1A_2$	$-A_2A$	$+AA_1$
N_2	„	$+A_1A_2$	$+A_2A$	$-AA_1$.

6. Wenn man bei einem Viereck in den beiden durch eine Diagonale gebildeten Dreiecken die Dreiecke der Mitten nimmt und zu diesen die Mittelpunkte der inneren Berührungskreise mit M und M_1, die der Diagonale abgewendeten äusseren Berührungskreise mit N und N_1 bestimmt, so ist der Durchschnitt von MN_1 und M_1N der Schwerpunkt des Umfanges.

Beweis: Gegeben sei das Viereck (Fig. 4) mit den Seiten a, b, c, d und der Diagonale e, die Mitten derselben werden mit A, B, C, D und E bezeichnet, dann ist in leicht verständlicher Schreibweise für den Schwerpunkt S des Umfanges:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)\,S &= a.A+b.B+c.C+d.D\\ &= a.A+b.B+e.E+cC+d.D-e.E\\ &= (a+b+e)\,M+(c+d-e)\,N_1\end{aligned}$$

also liegt S auf MN_1

$$\text{oder} = a.A + b.B - e.E + c.C + d.D + e.E$$
$$= (a + b - e)N + (c + d + e)M_1$$
also liegt S auf M_1N.

Anmerkung: Durch nahe liegende Betrachtungen ergiebt sich für den Schwerpunkt des Umfanges eines Vierecks auch folgende Construction:

Man zeichne in dem gegebenen Viereck (Fig. 5) das Parallelogramm der Mitten $ABCD$, halbire die vier Winkel des gegebenen Vierecks, so dass die Halbirungslinien die vorliegenden Seiten des Parallelogramms in E, F, G, H schneiden, nehme zu diesen auf den betreffenden Seiten des Parallelogramms die Gegenpunkte E_1, F_1, G_1 und H_1, so ist der Durchschnitt von E_1G_1 und F_1H_1 der Schwerpunkt des Umfanges.

7. Wenn man in einem Viereck zwei Gegenseiten bis zum Durchschnitt verlängert, in den dadurch gebildeten Dreiecken die der Mitten nimmt und in dem grösseren der so erhaltenen Dreiecke den Mittelpunkt des inneren, in dem kleineren den Mittelpunkt des vom Viereck abliegenden äusseren Berührungskreises bestimmt, so geht die Verbindungslinie beider durch den Schwerpunkt des Umfanges.

Beweis: Man denke sich die Verlängerungen der Gegenseiten mit positiver und negativer Masse belegt.

Anmerkung: Da man die Construction des vorigen Abschnittes in Bezug auf zwei Diagonalen, die des letzten Abschnittes in Bezug auf zweimal zwei Gegenseiten ausführen kann, so erhält man, mit Berücksichtigung der Anmerkung zu 6., acht Linien, welche durch einen Punkt gehen.

8. Wenn man bei einem Tetraeder das der Schwerpunkte der vier Seitenflächen bestimmt, so sind die fünf Mittelpunkte M, N, N_1, N_2, N_3 der innern und äussern Berührungskugeln des letzteren die Schwerpunkte der Oberfläche des gegebenen Tetraeders, je nachdem alle Flächen gleichartige Masse haben oder eine von entgegengesetzter Masse zu den andern ist.

Beweis. Gegeben sei das Tetraeder $AA_1A_2A_3$ mit den Schwerpunkten der Seitenflächen C, C_1, C_2, C_3, so ist

C mit $A_1A_2A_3 = 9.C_1C_2C_3$ belastet
C_1 „ $A_2A_3A = 9.C_2C_3C$ „

und entsprechend C_2, C_3, so dass 4. in Anwendung kommen kann.

9. Theilt man eine vierseitige Pyramide durch eine Diagonalfläche in zwei Tetraeder und bestimmt für die nach 8. construirten Schwerpunktstetraeder beider die Mittelpunkte der inneren Berührungskugeln M und M_1 und die Mittelpunkte der der Diagonalfläche abliegenden äusseren Berührungskugeln N und N_1, so schneiden sich M_1N und MN_1 in dem Schwerpunkte der Oberfläche der gegebenen vierseitigen Pyramide.

Beweis: Man denke sich die Diagonalfläche positiv und negativ belegt.

Anmerkung: Als Analogon zu der unter 6. angegebenen Construction ergiebt sich folgende:

Ist P die Spitze, $ABCD$ die Grundfläche der vierseitigen Pyramide, so lege man durch die Ecke A die Linie, deren Punkte von den drei in A zusammentreffenden Flächen gleich weit abstehen, dieselbe schneide PBD in E; ist nun F der Schwerpunkt zu PBD, so ziehe man EF und verlängere dieselbe um $\frac{1}{3}EF$ bis G, dann ziehe man AG und schneide von G aus $\frac{1}{4}AG$ bis H ab; gewinnt man entsprechend für B, C und D die Punkte H_1, H_2, H_3, so schneiden sich HH_2 und H_1H_3 in dem gesuchten Schwerpunkte.

10. Verlängert man zwei Gegenflächen einer vierseitigen Pyramide bis zum Durchschnitt, bestimmt in den dadurch gebildeten Tetraedern die Schwerpunktstetraeder und construirt in dem grösseren derselben den Mittelpunkt M der inneren Berührungskugel, zu dem kleineren den Mittelpunkt M_1 der der ursprünglichen Pyramide abliegenden äusseren Berührungskugel, so geht MM_1 durch den Schwerpunkt der Oberfläche der gegebenen Pyramide.

Beweis: Man denke sich die Verlängerungen der Gegenflächen und der Grundfläche bis zur gemeinschaftlichen Ecke positiv und negativ belegt.

Anmerkung: Auch hier erhält man nach 9. und 10. acht Linien, welche durch einen Punkt gehen.

V.

Die geodätischen Correctionen der auf dem Sphäroid beobachteten Horizontalwinkel.

Von

dem Geodäten Herrn *A. Sonderhof*
in Rohnstedt bei Greussen in Schwarzburg-Sondershausen.

(Figuren s. Taf. II.)

Mit den Fortschritten in Theorie und Technik wächst in der angewandten Mathematik im Allgemeinen die Anzahl der kleinen Verbesserungen, welche dem unmittelbaren Ergebniss der Beobachtung hinzugefügt werden müssen, jenachdem es die Bedingungen der Aufgabe erheischen. Bevor man in der Geodäsie die Theorie der sphäroidischen Trigonometrie kannte, konnte z. B. keine Rücksicht auf den Unterschied zwischen der geodätischen Linie und dem Normalschnitt genommen werden. Man würde auch jetzt noch diese sehr kleine Differenz vernachlässigen können, wenn die Messinstrumente, welche man gegenwärtig gebraucht, nicht den entsprechenden Genauigkeitsgrad besässen. Die Schärfe dieser Instrumente reicht aber bis zu dem kleinsten Sehwinkel von 0,05 Secunden hinauf, sie fordert also, dass jenem Unterschiede, welcher die eben bemerkte Grösse übersteigt, Rechnung getragen werde.

Bedeutender, als die besprochene, sind die Differenzen, welche dadurch entstehen, dass die Winkel nicht unmittelbar auf dem ideellen Rotationsellipsoid der Erde, sondern in verschiedenen Höhen über der Meeresfläche beobachtet werden — Differenzen, denen vielleicht bisher weniger Beachtung geschenkt worden ist. Sie werden in Folgendem ausführlich behandelt.

Ferner ist die Strahlenbrechung zu erwähnen. Eine Erörterung der verticalen Refraction lag zwar nicht in Absicht, konnte aber nicht ganz übergangen werden, da die Untersuchungen über die horizontale Abweichung der terrestrischen Lichtcurve einige Kenntniss derselben voraussetzen. Was nun die eben gedachten Untersuchungen betrifft, so resultirt aus ihnen freilich kein positives Ergebniss, weil die horizontale Abweichung der Lichtcurve für die Praxis verschwindet; dies lässt sich jedoch nicht ohne Weiteres und als selbstverständlich annehmen, sondern bedarf des theoretischen Nachweises, welcher denn auch in Folgendem gegeben worden ist.

1. Reduction des Azimuths auf die Grundfläche.

Die geodätischen Messungen bewegen sich nicht unmittelbar auf der Grundfläche der Erde, welche man sich im Niveau des Meeres vorstellt, sondern in verschiedenen Höhen über derselben. Dieser Umstand würde die Resultate der Messung weiter nicht afficiren, wenn die Erde eine vollkommene Kugel wäre. Dies ist aber nicht der Fall, man hat es mit einem Rotationsellipsoid zu thun, dessen Normalen sich bekanntlich nicht schneiden. Aus diesem Grunde ist es auch nicht gleichgültig, in welcher Höhe über der Meeresfläche die Richtung nach einem zweiten Punkte genommen wird; denn ein Unterschied in der Höhe dieses Punktes verursacht zugleich einen Unterschied im Azimuth. Wir ermitteln die Grösse dieser Abweichung und benutzen hierzu die Figur 1. Es sind darin k und k_1 die Flächennormalen der Punkte a und b, e ist ihr kürzester Abstand, ds die Verbindung der Punkte a und b, welche nach Umständen als gerade Linie oder Kreisbogen betrachtet werden kann, acd eine Ebene, senkrecht zur Richtung des kürzesten Abstandes, dc und db parallel zu k_1, resp. e.

Es ist

$$\operatorname{tg} bfd = \operatorname{tg} w = \frac{e}{k \sin d\tau} = \frac{e}{k \,.\, d\tau}.$$

Man lässt k um die kleine Grösse h und w um die entsprechende kleine Grösse $\Delta\alpha$ wachsen, so kommt

$$\frac{\Delta\alpha}{\cos w^2} = -\frac{e \,.\, h}{k^2 \, d\tau}.$$

Umgeformt lautet diese Gleichung

$$1)\quad \frac{\Delta\alpha}{h} = -\frac{e.\cos w^2}{k^2 d\tau} = -\frac{e}{(1+\operatorname{tg} w^2)k^2 d\tau} = -\frac{e}{(1+\frac{e^2}{k^2 d\tau^2})k^2 d\tau}$$

$$= -\frac{e.d\tau}{k^2 d\tau^2 + e^2}.$$

Aus der analytischen Geometrie hat man die Formeln:

$$e = ds\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\tau'};\quad \tau'^2 = \frac{\cos\alpha^2}{\varrho_0^{\,2}} + \frac{\sin\alpha^2}{\varrho_1^{\,2}};\quad k = \frac{1}{\varrho.\tau'^2};$$

$$\tau' = \frac{d\tau}{ds};$$

$$\varrho = \frac{\cos\alpha^2}{\varrho_0} + \frac{\sin\alpha^2}{\varrho_1};$$

worin ϱ den Krümmungsradius von ds, ϱ_0 und ϱ_1 die Radien der beiden Hauptkrümmungen, α den Winkel zwischen der Tangente der grössten Krümmung und ds, $d\tau$ den Winkel zwischen den benachbarten Normalen, k den Pol der Normale bedeuten.

Führt man diese Grössen in die Gleichung 1. ein, so folgt

$$2)\quad \frac{\Delta\alpha}{h} = -\frac{ds\left(\frac{1}{\varrho_0}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\tau'}d\tau}{\frac{d\tau^2}{\varrho^2\tau'^4} + e^2} = -\frac{\left(\frac{1}{\varrho_0}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\sin\alpha\cos\alpha.\varrho^2\tau'^2}{1+\left(\varrho\left(\frac{1}{\varrho_0}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\sin\alpha\cos\alpha\right)^2}.$$

Setzt man

$$\varrho^2\tau'^2 = 1+\varepsilon,$$

ferner

$$\left(\varrho\left(\frac{1}{\varrho_0}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\sin\alpha\cos\alpha\right)^2 = 1+\varepsilon_1,$$

so kommt

$$2^a)\quad \frac{\Delta\alpha}{h} = -\left(\frac{1}{\varrho_0}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_1} = -\left(\frac{1}{\varrho_0}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\sin\alpha\cos\alpha\,(1+\varepsilon-\varepsilon_1+\ldots).$$

Da ε und ε_1 nur kleine Grössen sind, welche noch dazu als Multiplicatoren der an sich schon sehr kleinen Grösse $\left(\frac{1}{\varrho_0}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\sin\alpha\cos\alpha$ vorkommen, so kann man die letzten Glieder schwinden lassen und erhält sodann die für die Praxis vollkommen ausreichende Formel

$$3)\quad \Delta\alpha = -h.\left(\frac{1}{\varrho_0}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\sin\alpha\cos\alpha.$$

Für $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_0}}$ wird der kürzeste Abstand e ein Maximum, nämlich $e = \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\varrho_1 + \varrho_0} \cdot ds$. Führt man diesen Ausdruck ein und setzt für k den Näherungswerth $\frac{\varrho_1 + \varrho_0}{2}$, so kommt

$$4) \qquad \Delta\alpha = -\frac{2 \cdot h \cdot (\varrho_1 - \varrho_0)}{(\varrho_1 + \varrho_0)^2}.$$

Es kann bemerkt werden, dass der Quotient $\frac{\Delta\alpha}{h}$ unabhängig von der Grösse des Bogens ds ist, d. h.

> bei gleicher Höhendifferenz der Punkte begehet man in der Beobachtung des Azimuths denselben Fehler, mag die horizontale Entfernung derselben irgendwie — natürlich zwischen gewissen Grenzen — verschieden sein. Man hat diesen Fehler besonders in Gebirgsgegenden zu berücksichtigen.

Der Winkelunterschied $\Delta\alpha$ ist sehr gering und erreicht die Grösse einer Secunde nicht. Es findet sich z. B. unter der geographischen Breite von 45°, bei einer Höhe von ½ Meile, die Maximalabweichung 0,2 Secunden. Unter gleichen Voraussetzungen hat man am Aequator die Differenz der Azimuthe gleich 0,403 Secunden.

2. Die kürzeste Linie der Parallelfläche und die geodätische Linie.

Man erhält eine Parallelfläche, (Fig. 2), sobald man auf jeder Normalen des Rotationsellipsoids eine gleiche Grösse h aufwärts abträgt. Die Parallelfläche ist mithin auch eine Rotationsfläche. Die Gleichungen des Meridianschnitts des Erdsphäroids und der Parallelfläche sind

$$r = a\cos u. \qquad r_1 = r + h\cos\pi.$$

$$z = c\sin u. \qquad z_1 = z + h\sin\pi.$$

Die Tangente hat für beide Curven denselben Werth, nämlich $\frac{dz}{dr} = -\frac{c\cos u}{a\sin u}$ = der negativen Cotangente des Winkels, welchen die r-Axe mit der Normalen einschliesst, d. h. gleich der negativen Cotangente der geographischen Breite π, daher kommt

$$r_1 = \frac{a^2 \cos\pi}{\sqrt{a^2\cos\pi^2 + c^2\sin\pi^2}} + h\cos\pi = \frac{a\cos\pi}{\sqrt{1-e^2\sin\pi^2}} + h\cos\pi.$$

$$z_1 = \frac{c^2 \sin\pi}{\sqrt{a^2\cos\pi^2 + c^2\sin\pi^2}} + h\sin\pi = \frac{c^2\sin\pi}{\sqrt{1-e^2\sin\pi^2}} + h\sin\pi.$$

Daraus findet man

$$dr_1 = -\left(\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin\pi^2)^{\frac{3}{2}}} + h\sin\pi\right)d\pi.$$

Für jede Rotationsfläche hat man die Differentialgleichung der kürzesten Linie

$$d\lambda = \frac{\gamma}{r^2}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2}{1-\frac{\gamma^2}{r^2}}}\,.\,dr,$$

worin r den Radius des Parallelkreises, λ die Länge, $\gamma = r_0 \sin\alpha_0$ eine Constante, α_0 das Azimuth am Anfangspunkte der Linie bedeuten. Führt man den Werth von $\frac{dz}{dr}$ ein, so erhält man

$$d\lambda = \frac{\gamma}{r^2}\sqrt{\frac{1+\operatorname{cotg}\pi^2}{1-\frac{\gamma^2}{r^2}}}\,dr = \frac{1}{\sin\pi}\cdot\frac{\frac{\gamma}{r^2}\,dr}{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{r^2}}}.$$

Versuchen wir diese Gleichung zu integriren:

$$\lambda = \frac{1}{\sin\pi}\arccos\frac{\gamma}{r} + \int \arccos\frac{\gamma}{r}\cdot\frac{\cos\pi}{\sin\pi^2}\,d\pi.$$

Man setzt $\pi = \pi_0 + d\pi_0$ und entwickelt den Ausdruck unter dem Integralzeichen nach dem Taylor'schen Satze

$$f(\pi_0 + \varDelta\pi_0) = f(\pi_0) + \varDelta\pi_0 f'\pi_0 + \frac{\varDelta\pi_0^{\,2}}{1.2} f''\pi_0 + \ldots\ldots$$

Für $f'(\pi)$ erhält man den Ausdruck

$$-\left[\arccos\frac{\gamma}{r_0}\left(\frac{1+\cos\pi_0^{\,2}}{\sin\pi_0^{\,3}}\right) + \frac{\gamma(\varrho_0+h)\operatorname{cotg}\pi_0}{r_0^{\,2}\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{r_0^{\,2}}}}\right].$$

Führt man diesen Werth ein, so kommt, zwischen den Grenzen 0 und $\varDelta\pi_0$ integrirt,

$$\lambda = \frac{1}{\sin\pi}\arccos\frac{\gamma}{r} - \frac{1}{\sin\pi_0}\arccos\frac{\gamma}{r_0} + \arccos\frac{\gamma}{r_0}\cdot\frac{\cos\pi_0}{\sin\pi_0^2}\Delta\pi_0$$

$$-\left(\arccos\frac{\gamma}{r_0}\left(\frac{1+\cos\pi_0^2}{\sin\pi_0^3}\right) + \frac{\gamma(\varrho_0+h)\operatorname{cotg}\pi_0}{r_0^2\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{r_0^2}}}\right)\cdot\frac{\Delta\pi_0^2}{1.2}+\ldots,$$

oder

$$5)\qquad \lambda = \frac{\arccos\frac{\gamma}{r}}{\sin\pi} - \arccos\frac{\gamma}{r_0}\left(\frac{1-\operatorname{cotg}\pi_0\Delta\pi_0}{\sin\pi_0}\right)$$

$$-\left[\arccos\frac{\gamma}{r_0}\cdot\frac{1+\cos\pi_0^2}{\sin\pi_0^3} + \frac{\gamma(\varrho_0+h)\operatorname{cotg}\pi_0}{r_0^2\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{r_0^2}}}\right]\frac{\Delta\pi_0^2}{1.2}+\ldots.$$

Die höhern Derivationen von $f(\pi)$ werden umfangreiche und complicirte Ausdrücke, sie mögen deshalb unberücksichtigt bleiben, zumal da es uns nicht auf eine genaue Bestimmung von λ ankommt, sondern vielmehr auf die Ermittelung des Unterschieds der Azimuthe der geodätischen Linie und der entsprechenden kürzesten Linie der Parallelfläche. Im Allgemeinen ist $\Delta\pi_0$ ein kleiner Bogen, man kann deshalb auch das letzte Glied der Gleichung vernachlässigen; dann lässt sich aber für $\frac{1}{\sin\pi}$ setzen $\frac{1}{\sin\pi_0}(1-\operatorname{cotg}\pi_0\Delta\pi_0)$. Demnach erhält man

$$6)\qquad \lambda = \frac{1-\operatorname{cotg}\pi_0\Delta\pi_0}{\sin\pi_0}\left(\arccos\frac{\gamma}{r} - \arccos\frac{\gamma}{r_0}\right)$$

$$= \frac{1-\operatorname{cotg}\pi_0\Delta\pi_0}{\sin\pi_0}\left(\arccos\frac{\gamma}{r} + \alpha_0 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Um das Verhältniss der Incremente von α und h zu finden, nimmt man π und λ constant an und differentiirt nach α und h. Es kommt

$$-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{r^2}}}\left[\frac{d\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{d\alpha}d\alpha + \frac{d\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{dh}.dh\right] + d\alpha = 0.$$

Führt man die Differentiation aus und beachtet, dass

$$\frac{\gamma}{r_1} = \frac{r_0\sin\alpha_0}{r_1}$$

ist, so folgt

$$\frac{d\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{d\alpha} = \frac{r_0 \cos\alpha_0}{r_1}; \quad \frac{d\left(\frac{r_0}{r_1}\sin\alpha_0\right)}{dh} = \sin\alpha_0 \frac{(r_1\cos\pi_0 - r_0\cos\pi_1)}{r_1^2}.$$

Werden diese Werthe eingesetzt, so erhält man

$$\frac{d\alpha_0}{dh} = \frac{\frac{\sin\alpha_0}{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{r_1^2}}}\left(\frac{r_1\cos\pi_0 - r_0\cos\pi_1}{r_1^2}\right)}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{r_1^2}}}\frac{r_0}{r_1}\cos\alpha_0}.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen lässt sich umformen; es ist $r_1 \sin\alpha_1 = r_0 \sin\alpha_0$, daher

$$\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{r_1^2}} = \sqrt{1 - \frac{r_0^2 \sin\alpha_0^2}{r_1^2 \sin\alpha_1^2}\cdot\sin\alpha_1^2} = \cos\alpha_1.$$

Dies eingeführt giebt

$$7) \qquad \frac{d\alpha_0}{dh} = \frac{\sin\alpha_0}{r_1}\cdot\frac{r_1\cos\pi_0 - r_0\cos\pi_1}{r_1\cos\alpha_1 - r_0\cos\alpha_0}.$$

Man setzt $r_1 = r_0 + dr_0$, $\alpha_1 = \alpha_0 + d\alpha_0$, dann hat man für den Zähler des vorstehenden Ausdrucks

$$(r_0 + dr_0)\cos\pi_0 - r_0(\cos\pi_0 - \sin\pi_0 d\pi_0) = \cos\pi_0 dr_0 + r_0\sin\pi_0 d\pi_0,$$

ferner für den Nenner

$$(r_0 + dr_0)(\cos\alpha_0 - \sin\alpha_0 d\alpha_0) - r_0\cos\alpha_0 = \cos\alpha_0 dr_0 - r_0\sin\alpha_0 d\alpha_0.$$

Man sucht die Relation zwischen dr und $d\alpha$ nach der Gleichung $r\sin\alpha = \gamma$ und erhält

$$r\cos\alpha d\alpha + \sin\alpha dr = 0,$$

mithin

$$d\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{dr}{r}.$$

Dadurch geht der Nenner über in den Ausdruck

$$\cos\alpha_0 dr_0 + \frac{\sin\alpha_0^2 . r_0 . dr_0}{\cos\alpha_0 . r_0} = \frac{dr_0}{\cos\alpha_0}.$$

Man erhält deshalb

$$\frac{d\alpha}{dh} = \frac{\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{r_1}\left(\frac{\cos\pi_0 dr_1 + r_0\sin\pi_0 d\pi_0}{dr_0}\right).$$

Nunmehr führt man die Radien der beiden Hauptkrümmungen ein nach den Gleichungen

$$r_1 = (\varrho_1 + h)\cos\pi, \quad dr_1 = -(\varrho_0 + h)\sin\pi . d\pi,$$

dann folgt

$$\frac{d\alpha}{dh} = \frac{\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{r_1} \cdot \frac{\cos\pi_0 . \sin\pi_0 . d\pi_0}{-(\varrho_0 + h)\sin\pi_0 . d\pi_0} . (\varrho_1 + h - (\varrho_0 + h))$$

$$= -\frac{\sin\alpha_0\cos\alpha_0 . \cos\pi_0}{r_1}\left(\frac{(\varrho_1 + h) - (\varrho_0 + h)}{(\varrho_0 + h)}\right).$$

Für $\frac{1}{r_1}$ setzt man

$$\frac{1}{r_1}\left(1 - \frac{\frac{dr_0}{r_0}}{1 + \frac{dr_0}{r_0}}\right),$$

dann erhält man

$$8) \quad \frac{d\alpha}{dh} = -\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{\varrho_0 + h} - \frac{1}{\varrho_1 + h}\right)\left(1 - \frac{\frac{dr_0}{r_0}}{1 + \frac{dr_0}{r_0}}\right).$$

Bezieht man die Abweichung des Azimuths unmittelbar auf die geodätische Linie, so wird $h=0$ und die Gleichnng 8) geht über in

$$9) \quad d\alpha = -\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\left(1 - \frac{\frac{dr_0}{r_0}}{1 + \frac{dr_0}{r_0}}\right) . dh.$$

Man bemerkt sofort, dass der erste Theil dieser Formel ganz genau mit dem ersten Gliede des im §. 1. entwickelten Ausdrucks 2ᵃ) für $\Delta\alpha$ übereinstimmt. Die letzten Glieder in beiden Gleichungen sind sehr kleine Grössen. Vernachlässigt man z. B. den Factor $\frac{dr}{r}$ für den Fall, wo $\pi = 45^0$, $\Delta\pi_0 = 1^0$, $\alpha = 45^0$, $h = \frac{1}{4}$ Meile angenommen wird, so begehet man nur einen Fehler von 0,0034 Secunden. In der Nähe des Pols kann zwar der Bruch $\frac{\frac{dr}{r}}{1+\frac{dr}{r}}$

bis zu 1 wachsen, dann nähert sich aber die Grösse $\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right)$ der Null. Für die Praxis fällt mithin die Projection der kürzesten Linie der Parallelfläche genau mit der geodätischen Linie zusammen. Theoretisch hingegen lässt sich nichts Allgemeines aus den entwickelten Formeln über die gegenseitige Lage der beiden Linien aussagen, da das Grössenverhältniss der letzten Glieder für verschiedene Längen der in Betracht gezogenen Linien, für verschiedene Breitengrade und Azimuthe variirt.

Bewegt sich die Messung auf einer Hochebene, so schliesst man nach diesen Ergebnissen, dass die Seiten des gemessenen geodätischen Dreiecks zwar dieselben Flächennormalen treffen, wie die Seiten des entsprechenden Dreiecks auf der Grundfläche, dass hingegen die Grössenverhältnisse der Seiten und Winkel beider Dreiecke verschieden sind.

3. Reduction der Polhöhe auf die Grundfläche.

Beachtet man, dass sich die Attraction mit wachsender Höhe über der Meeresfläche vermindert, die Centrifugalkraft hingegen vergrössert, so kommt man zu dem Schlusse, dass die Lothlinie in einer gewissen Entfernung vom Fusspunkte eine Ablenkung erleidet. Diese Ablenkung kann nur sehr gering sein und übt niemals einen merklichen Einfluss auf die Grösse der Horizontalwinkel aus. Es können aber Fälle eintreten, wo sie von Bedeutung für die Bestimmung der Polhöhe wird.

In Figur 3| stellt G die Componente der Attraction der ruhenden Erde, g dieselbe Componente der rotirenden Erde und zugleich die Richtung der Lothlinie, f die Centrifugalkraft, π die Polhöhe und φ den Winkel zwischen G und g vor. Man hat die Gleichungen

$$10)\qquad G\cos\varphi = g + f\cos\pi;\quad G\sin\varphi = f\sin\pi.$$

Die letzte Gleichung wird differentiirt:

$$G\cos\varphi d\varphi + \sin\varphi dG = f\cos\pi d\pi + \sin\pi . df;$$

oder, da $d\pi = d\varphi$ ist,

$$(G\cos\varphi - f\cos\pi)d\pi = \sin\pi . df - \sin\varphi . dG,$$

daraus folgt

$$d\pi = \frac{\sin\pi . df - \sin\varphi . dG}{g}.$$

Man ermittelt die Differentialien dG und df.

1. Wird die Winkelgeschwindigkeit w genannt, so ist $f = w^2 r$, also $df = w^2 dr = w^2 h \cos\pi$.

2. Die Richtung von G nimmt man für beide Punkte constant an. Es ist

$$G + dG = \frac{G . R^2}{(R+h)^2} = G\left(1 - \frac{2h}{R}\right),$$

mithin

$$\frac{dG}{G} = -\frac{2.h}{R}.$$

Diese Grössen führt man ein und setzt für $\sin\varphi$ den Ausdruck $\frac{f . \sin\pi}{G}$, dann kommt

11) $$d\pi = \frac{h}{g} \sin\pi \cos\pi \left(w^2 + \frac{2w^2 . r}{\varrho_1 \cos\pi}\right),$$

wenn man annähernd für R den Krümmungsradius ϱ_1 setzt. Da aber $\varrho_1 \cos\pi = r$ ist, so folgt

12) $$d\pi = \frac{3w^2}{g} . h \sin\pi \cos\pi.$$

Ermitteln wir die Grösse von $d\pi$ für den Fall: $\pi = 45^0$; $h = 1000$ Meter. Es ist

$$w^2 = \frac{4 . \pi^2}{(86164)^2},$$

mithin

$$d\pi = \frac{3 . 1000 . 4 . \pi^2}{2 . g . (86164)^2}.$$

$\log 6000$	$= 3{,}7781513$	$\log . 86164^2$	$= 9{,}8706518$
$\log . \pi^2$	$= 0{,}9942998$	$\log . g$	$= 0{,}9916247$
	$4{,}7724511$	$\log \sin 1''$	$= 0{,}6855749 - 6$
	$5{,}5478514$		$5{,}5478514$
$\log d\pi$	$= 0{,}2245997 - 1$		
$d\pi$	$= 0{,}17$ Secunden.		

4. Die Normalschnitte und die geodätische Linie.

Die drei vorzüglichsten Linien, welche zwei Punkte auf dem Sphäroid verbinden, sind die beiden Normalschnitte und die

geodätische Linie. Wir betrachten zuerst die Normalschnitte und benutzen hierzu die bekannte Fig. 1. Die Sehne ab bildet die Schnittlinie der beiden Normalebenen, von da ab trennen sich dieselben und gehen durch die Punkte c und g des kürzesten Abstandes. Diese Betrachtung führt auf eine leichte Ermittelung des Winkels, welchen beide Ebenen einschliessen; man braucht den kürzesten Abstand e nur im Sinne der Senkrechten zum ersten Verticalschnitt zu nehmen, also die Länge cg auf diese Senkrechte zu projiciren, um sofort das Maass des Winkels zu bekommen. Nennt man z den Winkel zwischen der Senkrechten und der Linie cg, dann hat man für den Winkel δ der beiden Normalschnitte die Gleichung $\delta = \frac{e.\cos z}{k}$. Für z führt man die Ergänzung $x = 90 - z$ ein und erhält

$$\delta = \frac{e.\sin x}{k}.$$

x ist der Winkel zwischen den beiden conjugirten Tangenten, die analytische Geometrie giebt dafür die Gleichung

$$\cos x = \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\tau'}, \text{ annähernd} = \varrho\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\sin\alpha\cos\alpha.$$

Dieser Ausdruck (das ε_1 des §. 1) stellt eine kleine Grösse vor, man kann deshalb $\sin x = 1$ setzen und bekommt

$$\delta = \frac{e}{k} = s\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{k\tau'},$$

oder, da $k\tau'$ nahe $= \frac{ds}{ds} = 1$ ist,

$$13) \qquad \delta = s\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\sin\alpha\cos\alpha.$$

Von dem Winkel δ der Normalebenen kann man leicht zu dem Winkel der beiden Tangenten der Normalschnitte übergehen, indem man den Winkel δ auf dem Horizont von a reducirt. Nennt man den gesuchten Winkel Δn, so kommt nach Fig. 4

$$14) \qquad \Delta n = \frac{l.\sin u.\delta}{l} = \delta.\sin u.$$

u ist der Winkel zwischen der Sehne und der Tangente, daher $\sin u = \frac{s}{2k}$. Dies eingeführt giebt

15) $$\Delta n = \frac{s \cdot \delta}{2 \cdot k} = \frac{s^2}{2 \cdot k}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right) \sin\alpha \cos\alpha.$$

Setzt man $k = \sqrt{\varrho_0 \varrho_1}$, dann folgt

16) $$\Delta n = \frac{s^2}{2} \frac{(\varrho_1 - \varrho_0)}{(\varrho_1 \varrho_0)^{\frac{3}{2}}} \sin\alpha \cos\alpha.$$

Dies ist der Winkelunterschied; jetzt fragen wir nach dem grössten linearen Abstande der Normalschnitte auf dem Sphäroid. Derselbe befindet sich nahe in der Mitte des Bogens s. Der Abstand dieses Punktes von der Sehne ist $\frac{s^2}{8k}$, mithin der Abstand D der beiden Normalschnitte

17) $$D = \frac{s^2 \cdot \delta}{8 \cdot k} = \frac{s^3}{8 \cdot k} \cdot \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right) \sin\alpha \cos\alpha$$

$$= \frac{s^3}{8} \cdot \frac{(\varrho_1 - \varrho_0)}{(\varrho_1 \varrho_0)^{\frac{3}{2}}} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{s}{4} \cdot \Delta n.$$

Die numerische Berechnung giebt für den speciellen Fall: $\pi = 45^0$, $s = 30$ Meilen, $\alpha = 45^0 2' 52{,}7''$ die Werthe

$$\Delta n = 0{,}21 \text{ Secunden}, \quad D = 0{,}18 \text{ Par. Fuss}.$$

Es ist ersichtlich, dass die durch die Zweideutigkeit des Normalschnitts entstehenden Differenzen nur sehr gering sind, dessenungeachtet sucht sie der Geodät dadurch zu vermeiden, dass er die geodätische Linie, als die einzige unzweideutige Verbindung zweier Punkte auf dem Sphäroid, in Rechnung zieht. Suchen wir die Lage dieser Linie zu ermitteln. Figur 5 stellt einen Meridianschnitt nebst Evolute dar. Erleidet der Meridian eine Drehung um die Axe, so dass der Punkt a nach α, b nach β, c nach γ gelangt, so beschreiben die Normalen ac und bc Kegelflächen. Eine Ebene durch ac stellt einen Normalschnitt des Punktes a vor; sobald dieselbe den Punkt α trifft, so wird sie auch den Punkt γ schneiden, weil die Punkte a, c, α, γ in einer Ebene liegen. Drehet man nunmehr die Normalebenen bis zum Punkte β, so befindet sich γ, mithin auch die Normale $\beta\gamma$ des zweiten Punktes, rechts von der Normalebene $ac\beta$. Gehet man also von a nach β, so befindet sich die Flächennormale des zweiten Punktes auf der dem ersten Meridian abgekehrten Seite des Normalschnitts von a. Man überzeugt sich leicht, dass dies Resultat für alle Richtungen $a\beta$ gilt. Ebenso leicht findet man, dass nach derjenigen Seite hin, wo die benachbarte Flächennormale abweicht, die Concavität der kürzesten Linie gerichtet

ist. Stellen nämlich in Fig. 6 aa_1, bb_1, u. s. w. die durch die kürzeste Linie getroffenen Flächennormalen vor und versucht man diese Linie zu construiren, so gehet man von a nach b und in der Tangente weiter bis c. Die Krümmungsebene von b erleidet eine Drehung gleich dem Winkel δ um die Tangente abc. Dadurch wird der dritte Punkt γ der Curve von der Ebene aa_1c ab nach dem Auge zu dirigirt, das Azimuth $a\gamma$ weicht also in derselben Richtung vom Azimuth ab ab. Denkt man sich nunmehr die Normalebene $aa_1\gamma$ construirt, so ist ersichtlich, dass der Punkt d der Tangente $b\gamma d$ ebenfalls nach dem Auge zu von dieser Ebene abweicht, weil b auf der entgegengesetzten Seite derselben liegt. Noch grösser wird die Abweichung, wenn man den Punkt d in der Krümmungsebene $b\gamma c_1\partial$ auf die Fläche projicirt. Das Azimuth $a\partial$ erleidet mithin wiederum eine Drehung in der schon mehrfach genannten Richtung. Die kürzeste Linie bleibt also immer auf einer Seite des Normalschnitts und wendet ihre concave Seite, vom Anfangspunkte a der Linie aus betrachtet, der Normalebene dieses Punktes zu. Man kann sich die Lage derselben durch Fig. 7. versinnlichen, in welcher die ausgezogenen Linien die geodätische, die punktirten Linien den Normalschnitt andeuten. Denkt man sich dieselbe Figur im Punkte b, so müsste, von b aus gesehen, die geodätische Linie nicht die Lage acb, sondern adb haben. Das ist auch in Wirklichkeit der Fall, es ist eine Eigenschaft der kürzesten Linie, von ihren Endpunkten aus gesehen, nach zwei entgegengesetzten Seiten hin concav zu erscheinen. Daraus folgt, dass sich diese Linie zwischen den beiden Verticalschnitten befindet.

Für die Abweichung des Azimuths der geodätischen Linie von dem des Normalschnitts hat man die bekannte Formel

$$18)\qquad A-\alpha=\frac{s^2.e^2.\cos\pi^2\cos\alpha\sin\alpha}{6a^2};$$

für den Unterschied der beiden Normalschnitte haben wir oben gefunden

$$\Delta n=\frac{s^2}{2k}\left(\frac{1}{\varrho_0}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\sin\alpha\cos\alpha.$$

Formen wir den Ausdruck für Δn so um, dass er mit der ersten Gleichung verglichen werden kann. Setzt man für k den bequemsten Werth ein, so erhält man

$$\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{\varrho_0}-\frac{1}{\varrho_1}\right)=\frac{\dfrac{(1-e^2\sin\pi^2)^{\frac{3}{2}}}{a(1-e^2)}-\dfrac{1}{a}\sqrt{1-e^2\sin\pi^2}}{k=\varrho_1=\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\pi^2}}}$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{(1-e^2\sin\pi^2)^2}{1-e^2}-1+e^2\sin\pi^2$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[(1-2e^2\sin\pi^2)(1+e^2)-1+e^2\sin\pi^2\right]$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[1+e^2-2e^2\sin\pi^2-1+e^2\sin\pi^2\right]=\frac{e^2\cos\pi^2}{a^2}.$$

Daher findet man

$$19)\qquad \Delta n=\frac{s^2.\,e^2.\cos\pi^2\sin\alpha\cos\alpha}{2a^2}.$$

Der Unterschied zwischen dem Normalschnitt und der geodätischen Linie ist also $\frac{1}{3}$ des Unterschieds zwischen den beiden Normalschnitten.

5. Einiges über den Einfluss der erörterten Correctionen auf das Resultat der Messung.

Wenn man die in den vorigen Paragraphen behandelten kleinen Unterschiede lediglich nach den Zahlen, welche aus der numerischen Berechnung resultiren, beurtheilen wollte, so könnte die Bedeutung derselben leicht unterschätzt werden. Man betrachte z. B. die Reduction der Polhöhe. Die im §. 3. ausgeführte numerische Berechnung weist die sehr geringe Differenz von 0,17 Secunden nach — eine Winkeldifferenz, welche, auf mässige Längendimensionen bezogen, nur eine ganz kleine lineare Abweichung verursacht. Im vorliegenden Falle jedoch hat man sich den Winkelunterschied am Mittelpunkte der Erde vorzustellen, und von hier aus schliessen die Schenkel desselben auf der Oberfläche einen Bogen von ungefähr 16 Fuss ein; dies ist eine Grösse, welche sich bei der Triangulation, auch über beträchtliche Strecken hinweg, bemerkbar macht. Im Uebrigen ist die in Rede stehende Correction insofern von geringerer Bedeutung, als Polhöhenbestimmungen in grösseren Höhen seltener vorkommen.

Was die beiden übrigen Correctionen betrifft, so haben sie, wie aus den Formeln 3) und 18) leicht zu ersehen ist, zwei Eigenschaften gemein: erstens erreichen beide ihren grössten Werth

am Aequator, bei einem Azimuth von 45°, zweitens wechseln beide das Vorzeichen in jedem folgenden Quadranten. Sonst stehen sie in keiner Beziehung zu einander, denn die eine ist Funktion der Entfernung, die andere ist Function der Höhendifferenz der betreffenden Punkte, ausserdem bewirken sie Aenderungen des Azimuths, welche einander entgegengesetzt sind.

Der Unterschied zwischen dem Normalschnitt und der kürzesten Linie kommt nur bei sehr grossen Dreiecken in Betracht, der Einfluss desselben ist deshalb gering. Von grösserem Einfluss kann die Correction $\Delta\alpha$ werden und besonders dann, wenn sich die Messung auf längere Strecken über ein Gebirge hinweg zieht. Man überzeugt sich leicht, dass alle Winkel, deren Schenkel die Verticale zum Meridian einschliessen, durch die Correction kleiner, hingegen alle Winkel, welche den Meridian einschliessen, grösser werden, weil sich in beiden Fällen die Verbesserungen der einzelnen Azimuthe summiren. Dadurch wird das ganze System von Dreiecken in der Richtung des Meridians zusammengeschoben. Die Correction bewirkt also, wenn es sich um die Bestimmung der Erdgestalt handelt, eine Verminderung der Krümmung und infolgedessen — in unsern Breitegraden — eine Vergrösserung der Abplattung.

Die eben erörterten kleinen Winkelunterschiede haben zum Theil ihren Grund in der Unregelmässigkeit der Erdoberfläche. Aehnliche Abweichungen müssen stattfinden, sobald die natürliche Grundgestalt der Erde nicht mit dem durch Berechnung ermittelten Rotationsellipsoid übereinstimmt. Dieser Fall kann aber häufig eintreten, weil das gedachte Rotationsellipsoid das Ergebniss vieler Gradmessungen ist, welche zum Theil beträchtlich von einander abweichen, abgesehen von den kleinen Fehlern, welche dadurch entstanden sind, dass man der Erdoberfläche bald im Voraus die Gestalt eines Rotationsellipsoids octroirte. Man kann hiernach ermessen, wie schwierig die Lösung der Aufgabe ist, welche sich die Geodäsie in neuerer Zeit gestellt hat und als offene Frage dürfte wohl noch angesehen werden müssen: ob es nicht zweckentsprechender sei, das mehrfach gedachte Rotationsellipsoid nur aushülfsweise zu benutzen und unter alleiniger Voraussetzung einer Rotationsfläche mittelst der für diese Fläche geltenden Differentialformel der kürzesten Linie zu operiren.

6. Die Strahlenbrechung.

Sobald ein Lichtstrahl in ein Mittel von anderer Beschaffenheit übergeht, erleidet derselbe eine Ablenkung von der ursprüng-

lichen Richtung in der Weise, dass Anfangs- und Endrichtung des Strahls mit der Normalen der Grenzfläche in Einer Ebene liegen. Sind viele lichtbrechende Schichten in sehr kleinen Abständen parallel über einander gelagert, so bildet der Weg, welchen der gebrochene Lichtstrahl durchläuft, eine stetig gekrümmte Linie. Von der räumlichen Gestaltung der Parallelflächen hängt es ab, ob diese Linie eine Curve einfacher oder doppelter Krümmung sei. Das Erstere findet nur dann statt, wenn die lichtbrechenden Schichten durch parallele Ebenen oder concentrische Kugelflächen begrenzt werden, in jedem andern Falle entstehet eine Curve doppelter Krümmung, weil sich die benachbarten Flächennormalen nicht schneiden. Diese Betrachtung, bezogen auf die Strahlenbrechung der Erdatmosphäre, zeigt, dass die doppelt gekrümmte Lichtcurve neben der verticalen auch eine horizontale Abweichung haben muss. Wir behandeln zuerst

A. Die verticale Strahlenbrechung.

Bei Untersuchungen über die verticale Strahlenbrechung sieht man von der sphäroidischen Gestalt der Erde ab und betrachtet die Luftschichten gleicher Dichte wie concentrische Kugelschalen. Die Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels verhalten sich wie die Lichtgeschwindigkeiten in den betreffenden Schichten. Nennt man die Einfallswinkel am 1., 2., 3. u. s. w. Lothe entsprechend $x_1, x_2, x_3 \ldots$, die Brechungswinkel $y_1, y_2, y_3 \ldots$, ferner die Geschwindigkeit des Lichts in der Höhe $h = \varphi(h)$, so hat man die Gleichung

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\varphi(h)}{\varphi(h+dh)}.$$

Man drückt die Sinus durch die Curvenelemente aus, dann kommt

$$\sin x = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{ds}{dh}\right)^2}}; \quad \sin x_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{ds + d^2s}{dh}\right)^2}}.$$

Da die Lichtcurve in einer Ebene liegt, so ist Fig. 8 s nur allein von h abhängig, man kann deshalb für $\sin x$ die Funktion $\psi(h)$ setzen, dann wird $\sin x_1 = \psi(h + dh)$.

Um vom Winkel x_1 zum Winkel y überzugehen, benutzt man die Beziehung $y = x_1 + d\tau$, mithin ist $\sin y = \sin x_1 + \cos x_1 d\tau$. Man hat demnach unter Einführung der neuen Bezeichnung

$$\frac{\varphi(h+dh)}{\varphi(h)} = \frac{\psi(h+dh)}{\psi(h)} + \frac{\cos x_1 \,.\, d\tau}{\varphi(h) = \sin x};$$

oder, da x nahe gleich x_1 ist,

$$\frac{\varphi(h+dh)}{\varphi(h)} = \frac{\psi(h+dh)}{\psi(h)} + \operatorname{cotg} x \,.\, d\tau.$$

Das letzte Glied lässt sich umformen,

$$\operatorname{cotg} x \text{ ist} = \frac{dh}{ds_1};$$

ferner

$$d\tau = \frac{ds_1}{\varrho + h},$$

mithin kommt

$$\operatorname{cotg} x . d\tau = \frac{dh}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{\varrho + h} = \frac{dh}{\varrho + h}.$$

Man erhält also

$$\frac{\varphi'(h)\, dh}{\varphi(h)} = \frac{\psi'(h)\, dh}{\psi(h)} + \frac{dh}{\varrho + h}.$$

Davon nimmt man das Integral von h_0 bis h:

20) $$\log \frac{\varphi(h)}{\varphi(h_0)} = \log \frac{\psi(h)}{\psi(h_0)} + \log \frac{(\varrho + h)}{\varrho + h_0},$$

oder

$$\frac{\psi(h)}{\psi(h_0)} = \frac{\varphi(h)(\varrho + h_0)}{\varphi(h_0)(\varrho + h)}.$$

$\psi(h)$ ist $= \sin x$ oder auch $= \sin z$, wenn man mit z die Zenithdistanz bezeichnet; man erhält deshalb

21) $$\frac{\sin z}{\sin z_0} = \frac{(\varrho + h_0)\varphi(h)}{\varphi(h_0)(\varrho + h)};$$

oder, wenn

$$\frac{(\varrho + h_0)\sin z_0}{\varphi(h_0)} = a_0$$

gesetzt wird,

22) $$\sin z = \frac{a_0 \cdot \varphi(h)}{\varrho + h}.$$

Drückt man $\sin z$ oder $\sin x$ durch die Curvenelemente aus, so erhält man die Gleichung

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{ds}{dh}\right)^2}} = \frac{a_0 \cdot \varphi(h)}{\varrho + h},$$

oder

23) $$\frac{ds}{dh} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a_0^2 \varphi(h)^2}{(\varrho + h)^2}}}.$$

Gehet man mittelst der Relation $ds^2 = (\varrho + h)^2 d\tau^2 + dh^2$ zu Polarcoordinaten über, so kommt

24) $$\frac{d\tau}{dh} = \frac{a_0 . \varphi(h)}{(\varrho + h)^2 \sqrt{1 - \frac{a_0^2 \varphi(h)^2}{(\varrho + h)^2}}}.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Curve, sie kann integrirt werden, sobald $\varphi(h)$ bekannt ist.

Die Gleichung 21) zeigt, dass zur Ermittelung der Höhendifferenz zweier Punkte die Kenntniss der Funktion $\varphi(h)$ nicht erforderlich ist, wenn man an beiden Punkten die Zenithdistanzen und die numerischen Werthe von $\varphi(h)$ (durch Thermometer und Barometer) beobachtet. Soll aber der Höhenunterschied von Einem Punkte aus bestimmt werden, so hat man die Kenntniss der Funktion $\varphi(h)$ nöthig. Das Mariotte'sche Gesetz ist hierzu nicht ausreichend, weil die Temperatur der Schichten variirt und zwar nach einem Gesetze, welches nicht hinlänglich bekannt ist. Für geringe Höhendifferenzen dürfte die Annahme gerechtfertigt sein, dass sich die Lichtgeschwindigkeit linear ändere, also durch eine Funktion von der Form $p + q . h.$ darstellen lasse. Setzt man diesen Ausdruck in die Differentialgleichung 24) und integrirt, so erhält man zwar die Gleichung der Lichtcurve, aber in einer Form, welche für weitere Untersuchungen zu complicirt ist. Man wird deshalb darauf geführt, die Aufgabe umzukehren und diejenige Funktion zu suchen, welche den gebrochenen Lichtstrahl zu einer möglichst einfachen Curve, nämlich zu einem Kreisbogen macht. Dann bleibt zu beurtheilen, inwieweit die so ermittelte Funktion mit der Wirklichkeit übereinstimmt.

In Figur 9. sei c der Mittelpunkt der Erde, c_1 das Centrum der Lichtcurve, e die Excentricität, ϱ der Radius der Erde, r der Radius der Lichtcurve.

Man erhält die Gleichung

$$e^2 = (\varrho + h)^2 + r^2 - 2r(\varrho + h)\cos v.$$

Es ist aber

$$v = z - 90^0;\ \cos v = \sin z = \frac{a_0 \varphi(h)}{\varrho + h},$$

[illegible] kommt

$$\frac{a_0 \varphi(h)}{\varrho + h} = \frac{(\varrho + h)^2 + r^2 - e^2}{2r.(\varrho + h)}.$$

Für a_0 hat man in diesem Falle den Ausdruck

$$\frac{\varrho . \sin z_0}{\varphi(0)} = \frac{\varrho(\varrho^2 + r^2 - e^2)}{\varphi(0).2.r.\varrho};$$

es folgt

$$\frac{\varrho^2 + r^2 - e^2}{2r\varphi(0)} \cdot \frac{\varphi(h)}{\varrho + h} = \frac{(\varrho + h)^2 + r^2 - e^2}{2r.(\varrho + h)},$$

oder

$$\frac{\varphi(h)}{\varphi(0)} = \frac{(\varrho + h)^2 + r^2 - e^2}{\varrho^2 + r^2 - e^2} = \frac{h^2 + 2\varrho h + \varrho^2 + r^2 - e^2}{\varrho^2 + r^2 - e^2 = 2r\varrho \sin z_0};$$

25)
$$\frac{\varphi(h)}{\varphi(0)} = \frac{h^2}{2\varrho r \sin z_0} + \frac{h}{r \sin z_0} + 1.$$

Dies ist die gesuchte Funktion $\varphi(h)$; $r \sin z_0$ hat darin die Bedeutung einer Constanten; setzt man dieselbe gleich c, so kommt

26)
$$\frac{\varphi(h)}{\varphi(0)} = \frac{h^2}{2\varrho c} + \frac{h}{c} + 1.$$

Das quadratische Glied ist nur eine sehr kleine Grösse, deshalb weicht die ermittelte Funktion $\varphi(h)$ wenig von einer linearen Funktion ab.

Nunmehr ist es leicht, die Refraction zu bestimmen. Man hat annähernd $\varrho\tau = s = l \sin z_0$, daraus folgt

27.
$$u = \frac{l}{2r} = \frac{s}{2r \sin z_0} = \frac{s}{2c}.$$

Die Refraction u ist demnach proportional dem Centriwinkel τ oder der linearen Entfernung s. Die Constante c wird gleich dem Radius der Lichtcurve, sobald die Zenithdistanz 90° beträgt. Man kann sich Lage und Grösse dieser Radien leicht vorstellen, sobald man auf der Verlängerung der Normalen ac die Constante c abträgt und dann die Senkrechte mn zieht. Diese Senkrechte ist der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte aller vom Punkte a aus in der angenommenen Ebene denkbaren Lichtcurven. Die Constante c ist durch Beobachtung bestimmt und gleich 7 bis 9 Erdhalbmessern gefunden worden.

B. Die horizontale Abweichung der Lichtcurve auf dem Erdsphäroid.

Wir wenden zur nähern Bestimmung der horizontalen Abweichung des Lichtstrahls die im §. 4. bezüglich der kürzesten Linie befolgte Methode an, wonach gewisse äusserste Grenzen ermittelt werden, innerhalb welcher sich die gesuchte Curve befindet. Die Lichtcurve hat mit der kürzesten Linie die Eigenschaft gemein, dass ihre benachbarten Elemente mit der betreffenden Flächennormalen in einer Ebene liegen. Diese Eigenschaft war das wesentliche Moment in der Beweisführung des §. 4, die dort gezogenen Schlussfolgerungen haben mithin auch in Bezug auf die Lichtcurve Geltung, d. h. die Lichtcurve liegt zwischen den beiden Normalschnitten ihrer Endpunkte. Verbindet man mit diesem Ergebniss die Resultate des vorigen Paragraphen über die verticale Strahlenbrechung, so erhält man die zur Bestimmung der äussersten Grenzen nöthigen Data. In Fig. 10 stellt ai den Radius der Lichtcurve as_1b in der Normalebene acb, bh hingegen denselben Radius in der Normalebene bga vor. Beschreibt man mit beiden Radien Kreisbogen, so hat man die Norschnitte der Lichtcurve. Für den Winkel, den die Tangenten dieser Normalschnitte mit einander bilden, giebt der §. 4. die Formel $\Delta n = \delta \sin u$. Im vorliegenden Falle ist $\sin u = \frac{s_1}{2r}$, mithin

$$\Delta n_1 = \frac{\delta . s}{2r},$$

Der grösste Abstand D wird bestimmt durch die Gleichung

$$D_1 = \frac{s}{4} \Delta n = \frac{s^2 . \delta}{8r}.$$

Der Radius der Lichtcurve ist nach dem vorigen Paragraphen ohngefähr gleich 7 Erdhalbmessern, oder, mit Bezug auf die Formeln 14), 15) und 17), $= 7 . k$. Die Werthe von Δn und D sind mithin durch 7 zu dividiren, wenn man von dem Unterschiede der Normalschnitte auf dem Sphäroid zu dem Unterschiede der Normalschnitte der Lichtcurve übergeht. Führt man diese Operation in Betreff der im §. 4. ermittelten numerischen Werthe aus, so findet sich, dass die Abweichungen ausserhalb der Grenze der Sichtbarkeit liegen. Der Winkelunterschied beträgt 0,03″ und grösser kann auch im ungünstigsten Falle die Differenz zwischen Normalschnitt und Lichtcurve nicht werden. Die Lichtcurve fällt also für die Praxis vollständig mit dem Normalschnitt zusammen.

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn sich die Beobachtungsorte in verschiedenen Höhen über der Meeresfläche befinden. Die Elevation ist in allen Fällen sehr gering, deshalb weichen Entfernung der Punkte, sowie Radius der Lichtcurve wenig von den entsprechenden Grössen des vorhin behandelten Falles ab.

Aus der obigen geometrischen Entwickelung ist deutlich zu erkennen, wie die Grösse der horizontalen Refraction mit der Intensität der lichtbrechenden Kraft zusammenhängt. Setzt man z. B. den Krümmungsradius der Lichtcurve gleich dem Erdradius voraus, so würde der Lichtstrahl nicht den Normalschnitt, sondern die geodätische Linie beschreiben.

Die horizontale Abweichung der astronomischen Lichtcurve lässt sich theoretisch nicht ermitteln, weil die mathematischen und physikalischen Verhältnisse der Atmosphäre nicht hinlänglich bekannt sind. Man kann die Lage dieser Curve auch nicht, wie oben geschah, mit den Normalschnitten der Endpunkte vergleichen, selbst wenn diese bekannt wären, weil die Normalschnitte für solche Punkte, welche in beträchtlichen Höhen liegen, eine andere Bedeutung erlangen. Die höhern Luftschichten werden nicht mehr durch Parallelflächen zum Erdsphäroid begrenzt, die Normalen der sich auf den verschiedenen Niveauflächen entsprechenden Punkte fallen deshalb nicht in eine gerade Linie zusammen, sie bilden vielmehr in ihrer Aufeinanderfolge eine Curve, welche die örtlichen Normalen der Niveauflächen einhüllt. Selbst der zenithale Lichtstrahl ist mithin keine grade Linie, sondern eine Curve, welche nahe, aber nicht ganz, mit der Umhüllungslinie der Normalen übereinstimmt.

Unter solchen theils unbekannten, theils complicirten Verhältnissen kann die Ermittelung der horizontalen Abweichung der astronomischen Lichtcurve, wenn eine solche überhaupt bemerkbar ist, nur Aufgabe der Beobachtung sein.

Hätte man es nur mit Kugelflächen zu thun, so würde die Gleichung 21 einigen Aufschluss über die Höhe des lichtbrechenden Mittels geben. Die astronomische verticale Strahlenbrechung ist durch Beobachtung bestimmt worden, man kennt also die Winkeldifferenz der ersten und letzten Tangente der Lichtcurve. Stellt in Fig. 11 *ab* die Lichtcurve, *ad* die Tangente derselben am Beobachtungsorte, *ac* die Richtung nach dem Stern, *dbe* die letzte der lichtbrechenden Schichten vor, so sieht man leicht, dass der Eintrittspunkt *b* des Lichtstrahls zwischen den Punkten

c und d enthalten sein muss. Für den Punkt d erhält man aus der Figur die Relation $(\varrho + h)\sin v = \varrho \sin z_0$. Nennt man die Refraction u, so ist $v = z_1 - u$, also $\sin v = \sin z_1 \cos u - \cos z_1 \sin u$. Ferner hat man die Formel der verticalen Strahlenbrechung

$$\frac{\sin z_1}{\sin z_0} = \frac{\varphi(h)}{\varphi(0)} \cdot \frac{\varrho}{\varrho + h}.$$

Eliminirt man z_1 aus diesen beiden Gleichungen und löst nach h auf, so erhält man

$$\varrho + h = \varrho \sin z_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\cos u - \frac{\varphi(h)}{\varphi(0)}}{\sin u}\right)^2}.$$

Damit ist eine untere Grenze für die Höhe der Atmosphäre ermittelt. Wollte man dieselbe Methode in Bezug auf den Punkt c zur Ermittelung einer obern Grenze anwenden, so würde man keinen bestimmten Werth für h erhalten.

Die Erde hat zwei Punkte sphärischer Krümmung, nämlich die beiden Pole; dort angestellte Beobachtungen würden mithin der angedeuteten Rechnung unterworfen werden können. Vielleicht liefert die nächste deutsche Nordpolexpedition hierzu einiges Material.

VI.

Nachtrag zu der Abhandlung: „Die geodätischen Correctionen der auf dem Sphäroid beobachteten Horizontalwinkel. Nr. V.“

Von

dem Geodäten Herrn *A. Sonderhof*

in Rohnstedt bei Greussen in Schwarzburg-Sondershausen.

(Fig. s. Taf. II.)

Am Schlusse des §. 4. kam die Formel zur Erwähnung, welche den Unterschied zwischen dem Azimuth der kürzesten Linie und dem des Normalschnitts darstellt. Sie wurde dort als bekannt vorausgesetzt und ist in der That auch schon auf verschiedene Weise, aber stets nach der analytischen Methode entwickelt worden. In Folgendem soll die Aufgabe auf geometrischem Wege gelöst werden. Es dürfte diese Lösung insofern vielleicht von einigem Interesse sein, als sich dadurch unmittelbar die Abkürzungen und Annäherungen erkennen lassen, welche die gedachte Formel voraussetzt.

Wir nehmen an, dass die Veränderungen, welche Azimuth und Krümmungsradien in der ganzen Ausdehnung der betrachteten Linie erleiden, vernachlässigt werden können. Dadurch geht in der Gleichung

$$\Delta n = s^2 \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right) \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\varrho},$$

welche nach §. 4. den Winkelunterschied zwischen den Tangenten der beiden Normalschnitte ausdrückt, die Grösse

$$\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right) \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\varrho}$$

in eine Constante über.

Denkt man sich nun erstens die kürzeste Linie in unendlich viele kleine und gleiche Theile zerlegt und alle Normalschnitte zwischen den auf einander folgenden Theilpunkten construirt, so ist in Folge der obigen Annahme der Winkelunterschied Δn für alle diese Curvenelemente derselbe, d. h. in Bezug auf die beigefügte Fig. 12.

$$\angle dbc = \angle ecm = \angle gmn = ds^2 . v,$$

wenn man nämlich mit v die Grösse $\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\varrho}$ bezeichnet, und wenn die Linien *bd*, *ce* und *mg* die rückwärts verlängerten Tangenten der Normalschnitte darstellen.

Verbindet man ferner alle Punkte *b*, *c*, *m*, *n* u. s. w. mit dem Anfangspunkt *a* durch die zugehörigen Normalschnitte, so folgt ebenfalls aus obiger Annahme, dass der Unterschied zwischen dem Normalschnitt und der kürzesten Linie an dem einen Endpunkte jeder Linie *ab*, *ac*, *am*, u. s. w. gleich ist derselben Grösse am andern Endpunkte.

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich nunmehr die Veränderung ermitteln, welche das Azimuth irgend eines Normalschnitts aa_1m erleidet, sobald man von einem Punkte m zum nächsten Punkte n übergeht.

Wenn die Linie *mf* die Verlängerung der Tangente des Normalschnitts aa_1m bedeutet, so ist der Winkel *fmg* oder *amc* gleich dem Winkel zwischen den beiden Normalschnitten aa_1m und mm_1a weniger dem Winkel zwischen einem dieser Normalschnitte und der kürzesten Linie. Nennt man den Bogen des letzten Winkels Sm, so erhält man daher die Gleichung

$$\text{arc}\, fmg = (m.ds)^2.v - Sm,$$

sobald m zugleich die Stellenzahl des betreffenden Curvenelements vorstellt.

Addirt man nun zum Bogen *fmg* den Bogen *gmn*, welcher den Werth $ds^2.v$ besitzt, und multiplicirt danach mit ds, so folgt erstens der lineare Werth des Bogens *fn* durch die Formel:

$$fn = [(m^2+1)\, ds^2.v - Sm]\, ds,$$

und ferner die azimuthale Veränderung des Normalschnitts durch die Gleichung

$$d\alpha_n = \frac{(m^2+1)\, ds^2.v - Sm}{n}.$$

Die letzte Formel kann man besser so schreiben:

(1) $$d\alpha_n = \frac{[(n-1)^2+1]\,ds^2.v - S_{n-1}}{n},$$

wenn allgemein mit n die Stellenzahl der Curvenelemente bezeichnet wird.

Es kommt nun darauf an, die sämmtlichen Winkelincremente, deren allgemeine Gleichung eben entwickelt wurde, zu summiren, um dadurch die azimuthale Differenz zwischen dem Normalschnitt und der kürzesten Linie zu finden. Setzt man in der Gleichung (1) für n nach und nach alle ganzen Zahlen von 2 bis n und beachtet, dass S_{n-1} gleich ist der Summe der Winkelzunahmen $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, $d\alpha_3$ bis $d\alpha_{n-1}$, so erhält man die Werthe:

$$d\alpha_2 = \tfrac{1}{2}.ds^2.v,$$

$$d\alpha_3 = \frac{2^2+1-\frac{1}{2}}{3}.ds^2.v,$$

$$d\alpha_4 = \frac{3^2+1-\frac{2^2+1-\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{2}}{4}.ds^2.v, \text{ u.s.w.}$$

Die ersten Glieder der Reihen lassen sich allgemein durch die Form $\frac{n^2+1}{n+1}$ darstellen, welche man auch schreiben kann:

$$\frac{n^2-1}{n+1}+\frac{2}{n+1}=n-1+\frac{2}{n+1}.$$

Integrirt man nun den letzten Ausdruck und setzt $n=\infty$, so ergiebt sich dadurch die Grösse $\frac{n^2}{2}$.

Daraus ist zu ersehn, dass die Reihensumme den Werth $\frac{n^2}{2}$ nicht überschreitet und dass man sicher zu einer Annäherungsgrenze gelangt, sobald man mehr und mehr auf einander folgende Werthe von $d\alpha$ summirt und durch das Quadrat der Anzahl derselben dividirt.

Es giebt aber einfachere Methoden, die Annäherungsgrenze zu ermitteln. Alle Glieder der durch (1) repräsentirten Gleichungen enthalten den gemeinschaftlichen Factor $ds^2.v$; eliminirt man denselben, so entsteht die Form

(2) $$d\alpha_n = \frac{(n-1)^2+1-G_{n-1}}{n}.$$

Die Grösse $\frac{G_n}{n^2}$ nähert sich, wie bereits oben bemerkt wurde, einer bestimmten Grenze. Daraus folgt, dass die Differenz

$$\frac{G_n}{n^2} - \frac{G_{n-1}}{(n-1)^2} = D$$

um so kleiner wird, je mehr die Zahl n wächst, und dass sie schliesslich für $n = \infty$ verschwindet. Diese Eigenschaft der gedachten Differenz führt auf ein Mittel zur Bestimmung der Annäherungsgrenze: Zwei auf einander folgende Werthe von G sind durch die Relation

$$G_{n-1} + d\alpha_n = G_n$$

verknüpft, welche, in Verbindung mit der Gleichung (2), die Berechnung des einen durch den andern ermöglicht. Berechnet man nun den Unterschied D, indem man versuchsweise der Grösse G_{n-1} verschiedene willkürliche Werthe beilegt, so wird man ebensoviel verschiedene Werthe von D erhalten. Für ein sehr grosses n muss aber nach dem Vorhergehenden die Differenz D verschwinden; deshalb schliesst man, dass derjenige Werth von G_{n-1} dem wahren am nächsten komme, welcher (nach Ausweis der Rechnung) die Grösse D zu einem Minimum macht.

Führt man die Rechnung für die Zahl $n = 1000$ aus, so ergiebt sich folgendes Resultat:

Der Grösse $\frac{G_{n-1}}{(n-1)^2}$ =	0,5	entspricht der Werth $\frac{G_n}{n^2}$ =	0,4995
„ „ „	0,4	„ „ „ „	0,3997
„ „ „	0,333333	„ „ „	0,333332
„ „ „	0,32	„ „ „ „	0,32003
„ „ „	0,3	„ „ „ „	0,30009.

Aus dieser Berechnung folgt also, dass sich die Reihensumme mit wachsendem n der Grösse $\frac{n^2}{3}$ nähert. Der Unterschied zwischen dem Azimuth der kürzesten Linie und dem des Normalschnitts wird daher ausgedrückt durch die Formel

$$d\alpha = \frac{n^2 ds^2 . v}{3} = \frac{s^2 . v}{3} = s^2 \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right) \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{6\varrho}.$$

In Uebereinstimmung mit der Entwickelung des §. 4. beträgt derselbe $\frac{1}{3}$ des Winkels zwischen den Tangenten der beiden Normalschnitte.

Damit wäre die Aufgabe auf geometrischem Wege gelöst. Es kann zum Schlusse noch erwähnt werden, dass nach derselben Methode und unter ähnlichen Voraussetzungen sich auch die horizontale Abweichung der Lichtcurve ermitteln lässt. Wir übergehen aber diese Ermittelung wegen der Geringfügigkeit des Objects.

VII.

Les angles que les côtés du triangle forment avec leurs lignes de gravité respectives *).

Par

Monsieur le professeur *Fasbender*
à Thorn.

La relation qui existe entre les cotangentes des trois angles $AA'B$, $BB'C$, $CC'A$, étant A', B', C' les milieux des côtés respectivement opposés aux sommets A, B, C du triangle ABC, est démontrée d'une manière très-élégante au moyen des cotangentes des angles A, B, C. Soit CD la perpendiculaire menée du sommet C au côté BA. Désignons par α, β, γ les angles $AA'B$, $BB'C$, $CC'A$. Alors de l'inspection des trois triangles rectangles CDB, CDA, CDC' il résulte

$$\text{cotang}\, B - \text{cotang}\, A = 2\,\text{cotang}\, \gamma,$$

l'angle γ étant aigu ou obtus. Par la même construction effectuée sur les deux autres côtés du triangle on trouve

$$\text{cotang}\, C - \text{cotang}\, B = 2\,\text{cotang}\, \alpha,$$

$$\text{cotang}\, A - \text{cotang}\, C = 2\,\text{cotang}\, \beta,$$

d'où l'on tire

$$\text{cotang}\, \alpha + \text{cotang}\, \beta + \text{cotang}\, \gamma = 0.$$

---

*) Voir Archiv. T. XLIX. Nr. XI. p 115.

On peut déduire encore les trois équations précédentes sans avoir recours aux hauteurs du triangle, en transformant la proportion

$$\sin(B+C):\sin C = 2\sin(B+\alpha):\sin\alpha$$

et les deux proportions analogues.

De plus, ces équations renferment la solution trigonométrique du problème, connaissant les angles α, β, γ, déterminer A, B, C. Pour déterminer l'angle C, on élimine B entre les deux équations

$$\text{cotang}\, C - \text{cotang}\, B = 2\,\text{cotang}\,\alpha$$

$$-\text{cotang}(B+C) - \text{cotang}\, C = 2\,\text{cotang}\,\beta$$

ce qui donne

$$3.\text{cotang}^2 C - 4.(\text{cotang}\alpha - \text{cotang}\beta).\text{cotang}\, C = 1 + 4\,\text{cotang}\alpha.\text{cotang}\beta.$$

La manière dont j'ai été conduit primitivement à l'équation $\text{cotang}\,\alpha + \text{cotang}\,\beta + \text{cotang}\,\gamma = 0$, en contient encore une démonstration, c'est pourquoi je vais l'exposer. Je m'occupai à traiter comme exercice de géométrie analytique le problème, très-simple d'ailleurs quant à la construction purement géométrique, étant donnés le côté BA et les deux angles $BA'A$ et $BB'A$, résoudre le triangle. Soit BA l'axe des abscisses positives, B l'origine des coordonnées, c la longueur du côté BA. Le point A' se trouve sur l'arc du segment capable de l'angle α décrit sur le côté BA. Or, la circonférence dont cet arc fait partie, a l'équation

$$y^2 + x^2 = cy.\text{cotang}\,\alpha + cx.$$

Faisons $CD = u$, $BD = v$. Nous aurons pour le point A'

$$y = +\tfrac{1}{2}u, \quad x = +\tfrac{1}{2}v,$$

par conséquent

$$\tfrac{1}{4}u^2 + \tfrac{1}{4}v^2 = \tfrac{1}{2}cu.\text{cotang}\,\alpha + \tfrac{1}{2}cv. \;\ldots\ldots\; 1)$$

De plus, pour le point B' on a

$$y = +\tfrac{1}{2}u, \quad x = +(\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2}c).$$

Ce point se trouvant sur l'arc du segment capable de l'angle $180^0-\beta$ décrit sur le côté BA, ses coordonnées doivent satisfaire à l'équation

$$y^2+x^2=-cy.\mathrm{cotang}\,\beta+cx.$$

Nous aurons donc

$$\tfrac{1}{4}u^2+\tfrac{1}{4}(v+c)^2=-\tfrac{1}{2}cu.\mathrm{cotang}\,\beta+\tfrac{1}{2}c.(v+c)\ldots.\ 2)$$

En retranchant l'équation 2) de 1) on trouve

$$\mathrm{cotang}\,\alpha+\mathrm{cotang}\,\beta=\frac{\tfrac{1}{2}c-v}{u}.$$

Le triangle rectangle CDC' donne

$$\mathrm{cotang}\,\gamma=\frac{v-\tfrac{1}{2}c}{u},$$

d'où il résulte

$$\mathrm{cotang}\,\alpha+\mathrm{cotang}\,\beta+\mathrm{cotang}\,\gamma=0.$$

Thorn, 23. Août 1869.

VIII.

Applications nouvelles des déterminants à la géométrie.

Par

Monsieur *J. Versluys,*

Professeur de Mathématiques à Groningue (Pays-Bas).

(Suite de Tome L. page 175.)

Dans les paragraphes suivants j'ai discuté l'équation générale du second degré en coordonnées tangentielles et la courbe d'intersection d'une surface du second degré et d'un plan. J'ai ajouté quelques autres théorèmes de géométrie analytique.

§. 18.

Que l'équation générale du second degré en coordonnées tangentielles soit

$$F(\lambda,\ \mu,\ \nu) = a\lambda^2 + 2h\lambda\mu + 2g\lambda\nu + b\mu^2 + 2f\mu\nu + c\nu^2 = 0;$$

que l'équation tangentielle d'un point soit

$$p\lambda + q\mu + r\nu = 0.$$

De la propriété énoncée à la fin du §. 2 suit, que *les deux droites qui passent par le point et qui sont tangentes à la courbe coïncident quand*

$$Q = \begin{vmatrix} a & h & g & p \\ h & b & f & q \\ g & f & c & r \\ p & q & r & \end{vmatrix}$$

est égal à nul; que les droites sont réelles et distinctes, quand Q est positif; et que ces droites sont imaginaires, quand Q est négatif.

Ainsi quand Q est zéro on a un point de la courbe; quand Q est négatif le point est intérieur à la conique; quand Q est positif le point est extérieur à la conique.

§. 19.

Exprimons en coordonnées tangentielles la condition qui exprime que les points d'intersection d'une droite et d'une conique soient réelles. Remarquons pour cela que dans ce cas les tangentes de la courbe qui passent par le pôle de la droite, sont réelles. Quand p, q et r sont les coordonnées de la droite, le pôle de cette droite est

$$p\frac{\partial F}{\partial \lambda} + q\frac{\partial F}{\partial \mu} + r\frac{\partial F}{\partial \nu} = 0, \quad \text{ou}$$

$$p\,(a\lambda + h\mu + g\nu) + q(h\lambda + b\mu + f\nu) + r(g\lambda + f\mu + c\nu) = 0.$$

Les tangentes qui passent par ce pôle sont réelles, quand

$$\begin{vmatrix} a & h & g & p_1 \\ h & b & f & q_1 \\ g & f & c & r_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 & \end{vmatrix} > 0,$$

où l'on a fait

$$p_1 = ap + hq + gr, \qquad q_1 = hp + bq + fr$$
$$r_1 = gp + fq + cr.$$

En ajoutant aux termes de la dernière colonne, ceux de la première colonne multipliés par $-p$, ceux de la deuxième colonne multipliés par $-q$, et ceux de la troisième colonne multipliés par $-r$, on obtient

$$-\begin{vmatrix} a & h & g & 0 \\ h & b & f & 0 \\ g & f & c & 0 \\ p_1 & q_1 & r_1 & F(p,q,r) \end{vmatrix} > 0,$$

ou ce qui revient au même

$$F(p, q, r) \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} < 0, \quad \text{ou}$$

$$F(p, q, r) \times H < 0.$$

Par conséquent d'une droite dont les coordonnées sont p, q et r et d'une conique les points d'intersection sont réels, quand $F(p, q, r) \times H < 0$; les points d'intersection sont imaginaires, quand $F(p, q, r) \times H > 0$; la droite est tangente à la courbe, quand $F(p, q, r) = 0$.

Quand A, B et C sont les côtés du triangle de référence, A, B et C sont les coordonnées de la droite à distance infinie. Designons cette droite par η. La conique sera tangente à η, si

$$F(A, B, C) = 0;$$

les points d'intersection de la courbe et de η sont réels, quand

$$F(A, B, C) \times H < 0;$$

les points d'intersection de la courbe et de η sont imaginaires, quand

$$F(A, B, C) \times H > 0.$$

§. 20.

Tous les points du lieu représenté par l'équation générale du second degré en coordonnées tangentielles sont situés en ligne droite, si

$$H = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0.$$

Quand $H = 0$, les trois binômes

$$ab - h^2, \quad bc - f^2, \quad ca - g^2$$

ont des signes semblables et Q a le signe contraire de ces binômes.

Donc quand $H = 0$ et l'un des binômes négatif, les droites qui sont tangentes à la conique et qui passent par le point

$$p\lambda + q\mu + r\nu = 0$$

sont réelles pour toutes les valeurs de p, q, r. Ces droites sont imaginaires, quand $H=0$ et l'un des binômes positif.

§. 21.

L'équation générale du second degré en coordonnées tangentielles peut représenter

1. Une hyperbole.
2. Une parabole.
3. Une ellipse.
4. Un lieu imaginaire.
5. Deux points réels et distincts.
6. Deux points imaginaires ou une droite.
7. Deux points coïncidents.

Caractères de ces cas.

1. Tous les points du lieu ne sont pas situés en ligne droite et il est rencontré par η en deux points réels et distincts; en sorte qu'on a

$$H \gtrless 0, \quad F(A,\, B,\, C) \times H < 0.$$

De ces deux conditions la seconde renferme la première.

2. Tous les points du lieu ne sont pas situés en ligne droite et η est tangente à la courbe. On a donc

$$H \gtrless 0, \quad F(A,\, B,\, C) = 0.$$

3. et 4. Des raisonnements tout-à-fait analogues à ceux des cas correspondants du §. 8 nous font voir qu'on a pour une ellipse

$$F(A,\, B,\, C) \times H > 0,$$

$ab - h^2$ et $\frac{H}{a}$ tous les deux négatifs ou l'un des deux négatif; pour un lieu imaginaire

$$F(A,\, B,\, C) \times H > 0, \quad ab - h^2 > 0, \quad \frac{H}{a} > 0.$$

5. et 6. Tous les points du lieu sont situés en ligne droite, de sorte qu'on a dans les deux cas $H=0$.

Pour discerner deux points réels d'avec deux points imaginaires, remarquons que dans le premier cas les deux droites qui passent par un point arbitraire et par l'un des points du lieu sont réelles, ce qui donne d'après le §. 20

l'un des binômes négatif.

Dans l'autre cas ces droites sont imaginaires, ce qui donne

l'un des binômes positif.

7. L'équation du second degré doit être un carré parfait, ce qui donne

$$ab-h^2 = bc-g^2 = ca-f^2 = 0.$$

§. 22.

Il y a donc des relations analytiques qui doivent exister dans les divers cas. Ces relations sont telles, que les relations qui doivent exister dans deux de ces cas ne peuvent pas exister en même temps. On peut donc réciproquement de l'existence des relations conclure à la figure du lieu.

En résumant

$F(A, B, C)\times H<0$ annonce — une hyperbole;

$H \gtrless 0$, $F(A, B, C)=0$ — une parabole;

$F(A, B, C)\times H>0$, $ab-h^2$ et $\frac{H}{a}$ tous les deux négatifs ou l'un des deux négatif — une ellipse;

$F(A, B, C)\times H>0$, $ab-h^2>0$, $\frac{H}{a}>0$ — un lieu imaginaire;

$H=0$, un des binômes négatif — deux points réels;

$H=0$, un des binômes positif — une droite;

les trois binômes zéro — deux points coïncidents.

Discussion de la courbe d'intersection d'un plan et d'une surface du second degré dont on connait le genre.

§. 23.

En discutant la courbe d'intersection du plan

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta = 0$$

et de la surface

$$a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2+2l\beta\gamma+2m\gamma\alpha+2n\alpha\beta+2p\alpha\delta+2q\beta\delta+2r\gamma\delta=0,$$

nous ferons un usage continuel des déterminants

$$Q=\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 \\ n & b & l & q & B_1 \\ m & l & c & r & C_1 \\ p & q & r & d & D_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & \end{vmatrix} \qquad R=\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 & A \\ n & b & l & q & B_1 & B \\ m & l & c & r & C_1 & C \\ p & q & r & d & D_1 & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & \\ A & B & C & D & & \end{vmatrix}$$

C ô n e.

La condition $Q=0$ exprime que le plan

$$A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma+D_1\delta=0$$

passe par le point double de la surface. Quand $Q=0$ la courbe d'intersection peut être

un seul point,

deux droites coïncidentes,

deux droites qui s'entrecoupent.

Dans le premier de ces cas les points d'intersection de la surface, du plan sécant, et du plan à distance infinie sont imaginaires; d'où suit d'après la propriété énoncée T. L. page 163, que R doit être positif.

Dans le deuxième cas R doit être zéro.

Dans le troisième cas R doit être négatif.

Quand Q n'est pas zéro, le plan sécant ne passe pas par le sommet du cône. La courbe d'intersection peut être alors

une ellipse,

une parabole,

une hyperbole.

D'après la propriété de T. L. page 163 on a dans le cas d'une ellipse R positif, dans le cas d'une parabole $R=0$, et dans le cas d'une hyperbole R négatif.

Les six cas qu'il y a à distinguer à l'égard de la courbe d'intersection et les caractères de ces cas sont donc

1. Un seul point: $Q = 0,\ R > 0.$
2. Deux droites coïncidentes: $Q = 0,\ R = 0.$
3. Deux droites sécantes: $Q = 0,\ R < 0.$
4. Ellipse: $Q \gtrless 0,\ R > 0.$
5. Parabole: $Q \gtrless 0,\ R = 0.$
6. Hyperbole: $Q \gtrless 0,\ R < 0.$

Cylindre.

La courbe d'intersection d'un plan et d'un cylindre dont on sait qu'il est hyperbolique, parabolique ou elliptique, est une conique de genre déterminé, quand Q diffère de nul. Quand Q est nul la courbe d'intersection peut être

deux droites parallèles,
imaginaire,
deux droites coïncidentes.

Dans le premier cas les points d'intersection de la surface, du plan donné, et d'un plan arbitraire

$$A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma + D_2\delta = 0$$

sont réels et distincts. Il faut pour cela qu'on ait pour des valeurs quelconques de A_2, B_2, C_2, D_2

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 & A_2 \\ n & b & l & q & B_1 & B_2 \\ m & l & c & r & C_1 & C_2 \\ p & q & r & d & D_1 & D_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & & \end{vmatrix} < 0.$$

Puisque $Q = 0$, le déterminant précédent sera un carré parfait (Salmon, Modern higher algebra, 36; Baltzer, Determinanten, §. 6, 4) par rapport à A_2, B_2, C_2, D_2, et il sera négatif, quand

$$S = \begin{vmatrix} a & n & m & A_1 \\ n & b & l & B_1 \\ m & l & c & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & \end{vmatrix} > 0.$$



Dans le deuxième cas on démontre de la même manière qu'on doit avoir

$$S < 0.$$

Dans le troisième cas il est évidemment nécessaire et suffisant qu'outre la condition $Q = 0$, une condition de plus soit remplie. Puisque l'avant-dernier déterminant doit être zéro alors, nous pouvons prendre pour cette condition

$$S = 0.$$

Cylindre hyperbolique.

La courbe d'intersection peut être

1. Deux droites coïncidentes: $Q = 0,\ S = 0.$
2. Deux droites différentes: $Q = 0,\ S > 0.$
3. Imaginaire: $Q = 0,\ S < 0.$
4. Hyperbole: $Q \gtrless 0.$

Cylindre parabolique.

La courbe d'intersection peut être

1. Deux droites coïncidentes: $Q = 0,\ S = 0.$
2. Deux droites distinctes: $Q = 0,\ S > 0.$
3. Imaginaire: $Q = 0,\ S < 0.$
4. Parabole: $Q \gtrless 0.$

Cylindre elliptique.

La courbe d'intersection peut être

1. Deux droites coïncidentes: $Q = 0,\ S = 0.$
2. Deux droites distinctes: $Q = 0,\ S > 0.$
3. Imaginaire: $Q = 0,\ S < 0.$
4. Ellipse: $Q \gtrless 0.$

§. 24.

Avant de passer aux autres genres de surfaces du second degré, nous allons démontrer quelques théorèmes:

Quand la surface n'a pas de point double, Q considéré comme fonction de A_1, B_1, C_1, D_1 n'aura ni valeur maximum ni valeur minimum.

Quand Q est maximum ou minimum, on peut satisfaire par un système de valeurs de A_1, B_1, C_1, D_1 aux équations

$$\frac{\partial Q}{\partial A_1}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial B_1}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial C_1}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial D_1}=0.$$

Quand on désigne dans

$$H=\begin{vmatrix} a & n & m & p \\ n & b & l & q \\ m & l & c & r \\ p & q & r & d \end{vmatrix}$$

le coefficient de a par a_1, de b par b_1, de c par c_1, etc., alors on peut écrire les équations précédentes

$$\begin{aligned} A_1a_1 + B_1n_1 + C_1m_1 + D_1p_1 &= 0, \\ A_1n_1 + B_1b_1 + C_1l_1 + D_1q_1 &= 0, \\ A_1m_1 + B_1l_1 + C_1c_1 + D_1r_1 &= 0, \\ A_1p_1 + B_1q_1 + C_1r_1 + D_1d_1 &= 0. \end{aligned}$$

Pour qu'il soit possible de satisfaire à ce système d'équations par des valeurs de A_1, B_1, C_1, D_1 qui ne sont pas toutes zéro, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} a_1 & n_1 & m_1 & p_1 \\ n_1 & b_1 & l_1 & q_1 \\ m_1 & l_1 & c_1 & r_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 & d_1 \end{vmatrix}=0.$$

Or ce déterminant est le réciproque de H et par conséquent égal à H^3. Donc

$$H^3=0,$$
$$\text{ou } H=0,$$

d'où suit que Q ne peut être ni maximum ni minimum, quand la surface n'a pas de point double.

§. 25.

L'équation d'un plan soit

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction continue de α, β, γ, δ. Ainsi, quand ce premier membre obtient des signes contraires pour deux systèmes de valeurs des coordonnées, on ne peut passer de l'un de ces systèmes à l'autre, sans que la valeur du premier membre passe par zéro. La signification géométrique de cela est que l'on ne peut passer du point représenté par le premier système de coordonnées au point représenté par l'autre système sans traverser la surface.

Réciproquement, quand on traverse le plan, le premier membre de l'équation linéaire change de signe.

Pour démontrer cela, que α_1, β_1, γ_1, δ_1 soit un point du plan, de sorte que

$$A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 + D\delta_1 = 0.$$

Les deux points

$$\alpha_1 + \partial\alpha, \quad \beta_1 + \partial\beta, \quad \gamma_1 + \partial\gamma, \quad \delta_1 + \partial\delta$$

et

$$\alpha_1 - \partial\alpha, \quad \beta_1 - \partial\beta, \quad \gamma_1 - \partial\gamma, \quad \delta_1 - \partial\delta,$$

que nous supposons hors du plan, son situés en ligne droite avec

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1, \quad \delta_1,$$

et se trouvent de côtés opposés du plan. Pour le premier des deux points le premier membre de l'équation linéaire est égal à

$$A\partial\alpha + B\partial\beta + C\partial\gamma + D\partial\delta.$$

Pour l'autre point le premier membre est égal à

$$-A\partial\alpha - B\partial\beta - C\partial\gamma - D\partial\delta.$$

Les deux valeurs précédentes ayant des signes contraires, le théorème réciproque est démontré.

A l'aide de ce qui précède, on peut distinguer si deux points se trouvent d'un même côté du plan ou de côtés opposés.

§. 26.

Désignons par $\varphi(\alpha\beta\gamma\delta) = 0$ l'équation d'une surface du second degré. Pour que φ soit maximum ou minimum, on doit avoir

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = \frac{\partial\varphi}{\partial\delta} = 0,$$

et ceci n'arrive que quand la surface a un point double, ce qui exige que le discriminant de φ soit zéro.

$\varphi(\alpha\beta\gamma\delta)$ est une fonction continue de α, β, γ, δ. Quand donc φ obtient des signes contraires pour les coordonnées de deux points, on ne peut passer de l'un de ces points à l'autre sans passer par zéro; ou, en d'autres mots: on ne peut passer de l'un des points à l'autre sans traverser la surface.

Réciproquement, quand le discriminant de φ n'est pas zéro, la valeur de φ, en passant par zéro, changera de signe en général.

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1, \quad \delta_1$$

soit un point de la surface. On a

$$\varphi(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1) = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}\alpha_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1}\beta_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_1}\gamma_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\delta_1}\delta_1 = 0.$$

L'équation du plan tangent dans le point donné est

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1}\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_1}\gamma + \frac{\partial\varphi}{\partial\delta_1}\delta = 0.$$

Quand on substitue les coordonnées des trois points

$$\begin{array}{llll} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1, \\ \alpha_1 + \partial\alpha, & \beta_1 + \partial\beta, & \gamma_1 + \partial\gamma, & \delta_1 + \partial\delta, \\ \alpha_1 - \partial\alpha, & \beta_1 - \partial\beta, & \gamma_1 - \partial\gamma, & \delta_1 - \partial\delta, \end{array}$$

dans l'équation de la surface, le premier membre devient zéro pour le premier de ces points. Pour le deuxième point on a

$$\varphi(\alpha_1 + \partial\alpha, \beta_1 + \partial\beta, \gamma_1 + \partial\gamma, \delta_1 + \partial\delta) = \varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1) + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}\partial\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1}\partial\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_1}\partial\gamma + \frac{\partial\varphi}{\partial\delta_1}\partial\delta + \varphi(\partial\alpha, \partial\beta, \partial\gamma, \partial\delta),$$

ou

$$\varphi(\alpha_1 + \partial\alpha, \text{etc.}) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}\partial\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1}\partial\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_1}\partial\gamma + \frac{\partial\varphi}{\partial\delta_1}\partial\delta\right) + \varphi(\partial\alpha, \partial\beta, \partial\gamma, \partial\delta),$$

de même

$$\varphi(\alpha_1 - \partial\alpha, \text{etc.}) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}\partial\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1}\partial\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_1}\partial\gamma + \frac{\partial\varphi}{\partial\delta_1}\partial\delta\right) + \varphi(\partial\alpha, \partial\beta, \partial\gamma, \partial\delta).$$

Dans chacune des deux équations précédentes le dernier terme du second membre est infiniment petit du second ordre. Le

signe de φ s'accorde donc avec le signe de l'autre partie du sécond membre; et ce signe est contraire dans les deux équations.

Donc quand on passe d'un point situé d'un côté de la surface à un point situé de l'autre côté, φ change de signe.

Quand les trois points donnés se trouvent tous dans le plan tangent, on a

$$\varphi(\alpha_1 + \partial\alpha, \beta_1 + \partial\beta, \gamma_1 + \partial\gamma, \delta_1 + \partial\delta) = \varphi(\partial\alpha, \partial\beta, \partial\gamma, \partial\delta),$$

$$\varphi(\alpha_1 - \partial\alpha, \beta_1 - \partial\beta, \gamma_1 - \partial\gamma, \delta_1 - \partial\delta) = \varphi(\partial\alpha, \partial\beta, \partial\gamma, \partial\delta),$$

d'où résulte que φ ne change pas de signe pour les points donnés, quand ces points se trouvent dans une tangente à la surface.

De ce qui précède on voit:

La droite qui joint les points $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ rencontre la surface en un seul point, quand

$$\varphi(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1) \quad \text{et} \quad \varphi(\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2)$$

ont des signes contraires; cette droite ne rencontre pas la surface, ou la rencontre en deux points (distincts ou coïncidents), quand

$$\varphi(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1) \quad \text{et} \quad \varphi(\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2)$$

ont des signes semblables.

De la même manière on trouve pour une conique dont on désigne l'équation par $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$:

La droite qui joint $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ à $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$ rencontre la courbe en un seul point, quand

$$\varphi(\alpha_1\beta_1\gamma_1) \quad \text{et} \quad \varphi(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$$

ont des signes contraires; cette droite rencontre la conique en deux points (distincts ou coïncidents), quand

$$\varphi(\alpha_1\beta_1\gamma_1) \quad \text{et} \quad \varphi(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$$

ont des signes semblables.

§. 27.

Dans le paragraphe 24 il est déjà démontré que Q, considéré

comme fonction de A_1, B_1, C_1, D_1, ne peut être ni maximum ni minimum, quand la surface n'a pas de point double. En général donc Q, en passant par zéro, changera de signe. Voyons de plus près ce qui peut arriver, quand Q passe par zéro. Pour cela considérons A_1, B_1, C_1, D_1 comme les coordonnées quadriplanaires d'une surface du second degré. D'après le paragraphe précédent, Q changera de signe en passant par zéro, excepté dans le cas où les valeurs consécutives de A_1, B_1, C_1, D_1,

$$A_1 + \partial A, \quad B_1 + \partial B, \quad C_1 + \partial C, \quad D_1 + \partial D$$

vérifient l'équation

$$\frac{\partial Q}{\partial A_1}(A_1 + \partial A) + \frac{\partial Q}{\partial B_1}(B_1 + \partial B) + \frac{\partial Q}{\partial C_1}(C_1 + \partial C) + \frac{\partial Q}{\partial D_1}(D_1 + \partial D) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 + \partial A \\ n & b & l & q & B_1 + \partial B \\ m & l & c & r & C_1 + \partial C \\ p & q & r & d & D_1 + \partial D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation ne diffère que d'un infiniment petit du second ordre de la moitié de la valeur du premier membre de

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 + \partial A \\ n & b & l & q & B_1 + \partial B \\ m & l & c & r & C_1 + \partial C \\ p & q & r & d & D_1 + \partial D \\ A_1 + \partial A & B_1 + \partial B & C_1 + \partial C & D_1 + \partial D & \end{vmatrix} = 0.$$

Or, la dernière équation nous dit que le plan

$$(A_1 + \partial A)\,\alpha + (B_1 + \partial B)\,\beta + (C_1 + \partial C)\,\gamma + (D_1 + \partial D)\,\delta = 0,$$

est tangent à la surface

$$a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2 + \text{etc.} \ldots = 0.$$

De ce qui précède suit que Q, en passant par zéro, change de signe, excepté dans le cas où le plan dans ses positions consécutives reste tangent à la surface.

Avec un changement continu du Q s'accorde un mouvement continu du plan

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta = 0.$$

Quand ce plan dans son mouvement devient tangent, alors la courbe d'intersection pour une surface qui n'est pas réglée, de réelle deviendra imaginaire ou réciproquement. De sorte que pour une surface qui n'est pas réglée, quand Q change de signe, la courbe d'intersection de réelle deviendra imaginaire, ou réciproquement.

Ellipsoïde.

§. 28.

Quand la courbe d'intersection est une ellipse, le plan sécant vient dans la position du plan à distance infinie en devenant plan tangent une fois pendant le mouvement. A l'instant que le plan devient tangent, Q change de signe; en sorte que la valeur de Q qui se rapporte à une ellipse, aura le signe contraire de

$$P = \begin{vmatrix} a & n & m & p & A \\ n & b & l & q & B \\ m & l & c & r & C \\ p & q & r & d & D \\ A & B & C & D & \end{vmatrix}.$$

Quand la courbe d'intersection est imaginaire, le plan sécant vient dans la position du plan à distance infinie en passant par zéro deux fois ou aucune fois. Dans ce cas donc P pour devenir égal à Q par des changements continus de A, de B, de C, et de D, doit passer par zéro deux fois ou aucune fois; de sorte que P et Q auront même signe.

Les différents cas que la courbe d'intersection peut représenter avec les caractères de ces cas sont donc

1. Un seul point: $Q = 0$.
2. Ellipse: P et Q ont des signes contraires.
3. Imaginaire: P et Q ont des signes semblables.

Hyperboloïde à deux nappes.

Les raisonnements du cas précédent montrent que P et Q auront des signes semblables, quand la courbe d'intersection est

une ellipse, et que P et Q auront des signes contraires, quand la courbe d'intersection est imaginaire.

La courbe d'intersection peut être:

1. Un seul point: $Q = 0$.
2. Une hyperbole: $R < 0$, $Q \gtrless 0$.
3. Une parabole: $R = 0$, $Q \gtrless 0$.
4. Une ellipse: $R > 0$, P et Q ont des signes semblables.
5. Imaginaire: $R > 0$, P et Q ont des signes contraires.

Paraboloïde elliptique.

Pour cette surface l'on ne peut discerner l'ellipse d'avec une intersection imaginaire au moyen des signes de P et de Q, puisque P est zéro. On peut se servir de la propriété démontrée T. L. page 165, de sorte qu'on trouve, en se servant de la série

$$1, \quad -\begin{vmatrix} a & p & A_1 \\ p & d & D_1 \\ A_1 & D_1 & \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a & n & p & A_1 \\ n & b & q & B_1 \\ p & q & d & D_1 \\ A_1 & B_1 & D_1 & \end{vmatrix}, \quad -Q, \qquad \text{(b)}$$

1. Un seul point: $Q = 0$.
2. Une parabole: $Q \gtrless 0$, $R = 0$.
3. Une ellipse: $Q \gtrless 0$, $R > 0$, 1 ou 2 variations de signe dans la série (b)
4. Imaginaire: $Q \gtrless 0$, $R > 0$, 0 ou 3 variations de signe dans la série (b).

Paraboloïde hyperbolique.

La courbe d'intersection peut être:

1. Deux droites à distance finie: $R < 0$, $Q = 0$.
2. Deux droites dont l'une à distance finie: $R = 0$, $Q = 0$.
3. Une hyperbole: $R < 0$, $Q \gtrless 0$.
4. Une parabole: $R = 0$, $Q \gtrless 0$.

Théorèmes divers.

§. 29.

La droite

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta = 0,$$
$$A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma + D_2\delta = 0$$

est tangente à la surface du second degré, quand

$$N = \begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 & A_2 \\ n & b & l & q & B_1 & B_2 \\ m & l & c & r & C_1 & C_2 \\ p & q & r & d & D_1 & D_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & & \end{vmatrix} = 0.$$

Cette propriété suit immédiatement du théorème démontré T. L. page 165. Salmon (Geometry of three dimensions, page 48.) après avoir obtenu le résultat sous une forme compliquée, le donne ensuite sous la forme précédente, sans ajouter comment il est parvenu à cette forme. Voici une autre démonstration de la même propriété.

Pour que la droite donnée soit tangente à la surface, il faut qu'il soit possible de trouver une valeur η, en sorte que le plan

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta + \eta A_2\alpha + \eta B_2\beta + \eta C_2\gamma + \eta D_2\delta = 0$$

soit tangent à la surface $u = 0$. Il est nécessaire pour cela que les coefficients des variables dans l'équation linéaire précédente soient proportionnels aux dérivées de u par rapport aux mêmes variables respectivement, pour des valeurs de α, β, γ, δ qui vérifient en même temps les équations de la droite donnée. Que ξ soit une autre quantité indéterminée, alors il doit être possible de satisfaire aux équations

$$a\alpha + a\beta + m\gamma + p\delta = \xi A_1 + \xi\eta A_2,$$
$$n\alpha + b\beta + l\gamma + q\delta = \xi B_1 + \xi\eta B_2,$$
$$m\alpha + l\beta + c\gamma + r\delta = \xi C_1 + \xi\eta C_2,$$
$$p\alpha + q\beta + r\gamma + d\delta = \xi D_1 + \xi\eta D_2,$$
$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta = 0,$$
$$A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma + D_2\delta = 0,$$

par un même système de valeurs de

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta,\quad \xi,\quad \xi\eta.$$

La résultante de ces équations linéaires est le déterminant que nous avons désigné par N, de sorte que

$$N=0$$

est la condition qui exprime que la droite est tangente à la surface.

§. 30.

Le point d'intersection des plans

$$A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma+D_1\delta=0,$$
$$A_2\alpha+B_2\beta+C_2\gamma+D_2\delta=0,$$
$$A_3\alpha+B_2\beta+C_3\gamma+D_3\delta=0$$

se trouve dans la surface du second degré, quand on a

$$M=\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 & A_2 & A_3 \\ n & b & l & q & B_1 & B_2 & B_3 \\ m & l & c & r & C_1 & C_2 & C_3 \\ p & q & r & d & D_1 & D_2 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & & & \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & & & \end{vmatrix}=0.$$

Ce théorème se trouve sans démonstration dans Salmon, Lessons on modern higher algebra, page 16. On peut en donner une démonstration analogue à celle du théorème précédent.

Remarquons pour cela que dans le cas où le point se trouve dans la surface, il doit être possible de trouver deux indéterminées λ, μ pour lesquelles

$$A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma+D_1\delta+\lambda(A_2\alpha+B_2\beta+C_2\gamma+D_2\delta)$$
$$+\mu(A_3\alpha+B_3\beta+C_3\gamma+D_3\delta)=0$$

soit un plan tangent à la surface $u=0$. Il faut pour cela qu'il soit possible de trouver des valeurs de α, β, γ, δ qui vérifient les équations linéaires données, et qui rendent en même temps les dérivées de u par rapport à α, β, γ, δ proportionnelles aux coefficients des mêmes quantités dans l'équation linéaire précédente.

Que ν soit une autre quantité indéterminée, il doit être possible de satisfaire aux équations

$$\begin{aligned}
a\alpha + n\beta + m\gamma + p\delta &= \nu A_1 + \lambda\nu A_2 + \mu\nu A_3,\\
n\alpha + b\beta + l\gamma + q\delta &= \nu B_1 + \lambda\nu B_2 + \mu\nu B_3,\\
m\alpha + l\beta + c\gamma + r\delta &= \nu C_1 + \lambda\nu C_2 + \mu\nu C_3,\\
p\alpha + q\beta + r\gamma + d\delta &= \nu D_1 + \lambda\nu D_2 + \mu\nu D_3,
\end{aligned}$$

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta = 0,$$

$$A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma + D_2\delta = 0,$$

$$A_3\alpha + B_3\beta + C_3\gamma + D_3\delta = 0,$$

par un même système de valeurs de

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta,\quad \nu,\quad \lambda\nu,\quad \mu\nu.$$

La résultante des équations précédentes est M, de sorte que

$$M = 0$$

est la condition qui exprime que le point donné se trouve dans la surface.

§. 31.

M considéré comme fonction de A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3 n'aura ni valeur maximum ni valeur minimum.

Pour que M eût une valeur maximum ou minimum on devrait avoir

$$\frac{\partial M}{\partial A_1} = \frac{\partial M}{\partial A_2} = \frac{\partial M}{\partial A_3} = \frac{\partial M}{\partial B_1} = \text{etc.} = 0.$$

Ces dérivées sont des déterminants mineurs du sixième degré de M, et de l'évanouissement de ces déterminants mineurs suit que M serait zéro, de même que tous les autres déterminants mineurs du sixième degré. De

$$\begin{vmatrix}
a & n & m & p & A_1 & A_2\\
n & b & l & q & B_1 & B_2\\
m & l & c & r & C_1 & C_2\\
p & q & r & d & D_1 & D_2\\
A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & \\
A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & &
\end{vmatrix} = 0$$

suit que la droite

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta = 0,$$

$$A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma + D_2\delta = 0$$

est tangente à la surface. De même la droite représentée par la deuxième équation linéaire et la troisième, et la droite représentée par la troisième équation et la première, doivent être tangentes à la surface. De $M = 0$ suit que le point d'intersection des trois plans se trouve dans la surface. Toutes ces conditions exigeraient que les trois plans fussent coïncidents, et nous les supposons distincts. M n'aura donc ni valeur maximum ni valeur minimum.

Quand M n'a ni valeur maximum ni valeur minimum, il changera de signe en général, à l'instant qu'il passe par zéro. Des raisonnements analogues à ceux du §. 27 font voir que M ne change pas de signe dans le seul cas où le point se meut dans une tangente à la surface. Nous avons donc la propriété.

La droite qui joint le point d'intersection de trois plans au point d'intersection de trois autres plans, rencontre la surface en un seul point, quand les valeurs correspondantes de M ont des signes contraires; cette droite ne rencontre pas la surface, ou la rencontre en deux points, distincts ou coïncidents, quand les valeurs correspondantes de M ont même signe.

§. 32

La propriété précédente nous permet de distiguer si le point d'intersection de trois plans donnés est intérieur ou extérieur à un ellipsoïde. Que ces trois plans soient les mêmes que ceux ci-dessus. Que le plan à distance infinie soit

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0.$$

Le point d'intersection de ce plan et de deux des autres plans est extérieur à l'ellipsoïde; de sorte que le point d'intersection des trois plans donnés est extérieur à l'ellipsoïde, quand M a même signe que

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 & A_2 & A \\ n & b & l & q & B_1 & B_2 & B \\ m & l & c & r & C_1 & C_2 & C \\ p & q & r & d & D_1 & D_2 & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & & & \\ A & B & C & D & & & \end{vmatrix}.$$

Ce point est intérieur à la surface, quand le déterminant précédent et M ont des signes contraires.

§. 33.

Le discriminant de l'équation cubique

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

est donné ordinairement sous la forme

$$a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd.$$

On obtient le discriminant sous la forme d'un déterminant simple de la manière suivante: Le discriminant est la résultante des équations que l'on obtient, en différentiant par rapport à x et y l'équation donnée.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$
$$bx^2 + 2cxy + dy^2 = 0.$$

D'après la méthode dyalitique de Sylvester on trouve la résultante du système

$$\begin{aligned} ax^3 + 2bx^2y + cxy^2 \qquad &= 0, \\ ax^2y + 2bxy^2 + cy^3 &= 0, \\ bx^3 + 2cx^2y + dxy^2 \qquad &= 0, \\ bx^2y + 2cxy^2 + dy^3 &= 0. \end{aligned}$$

Le discriminant est donc

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c & \\ & a & 2b & c \\ b & 2c & d & \\ & b & 2c & d \end{vmatrix}.$$

Quand ce déterminant s'évanouit, l'équation donnée a deux

de ses racines égales; quand il est positif deux racines sont imaginaires; quand il est négatif toutes les racines sont réelles et distinctes. (Voyez Salmon, page 136.)

§. 34.

Déterminer si les trois points d'intersection de

$$u = ax^3 + by^3 + cz^3 + 3dx^2y + 3exy^2 + 3fx^2z + 3gxz^2 + 3hy^2z + 3kyz^2 + 6lxyz = 0,$$

et de

$$px + qy + rz = 0,$$

sont tous réels et distincts, si deux de ces points coïncident, ou si deux de ces points sont imaginaires.

On pourrait éliminer z et former ensuite le discriminant de l'équation résultante. Les termes de ce discriminant sont très-compliqués. Le résultat vient sous une forme plus simple par le raisonnement suivant. Pour que deux systèmes de racines soient coïncidents, il faut qu'un même système de valeurs de

$$x^2,\quad xy,\quad y^2,\quad xz,\quad yz,\quad z^2,\quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

vérifie les équations

$$\begin{aligned}
&ax^2 + 2dxy + ey^2 + 2fxz + 2lyz + gz^2 - \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{p}{r} = 0,\\
&dx^2 + 2exy + by^2 + 2lxz + 2hyz + kz^2 - \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{q}{r} = 0,\\
&fx^2 + 2lxy + hy^2 + 2gxz + 2kyz + cz^2 - \frac{\partial u}{\partial z} = 0,\\
&px^2 + qxy + rxz = 0,\\
&pxy + qy^2 + ryz = 0,\\
&pxz + qyz + rz^2 = 0.
\end{aligned}$$

Pour cela il faut que x^2, xy, y^2 soient proportionnels aux déterminants que l'on obtient, en omettant la première, la deuxième, ou la troisième colonne du déterminant

$$\left\|\begin{matrix}
a & 2d & e & 2f & 2l & g & p\\
d & 2e & b & 2l & 2h & k & q\\
f & 2l & h & 2g & 2k & c & r\\
p & q & & r & & & \\
 & p & q & & r & & \\
 & & & p & q & r &
\end{matrix}\right\|$$

et comme $(xy)^2 - x^2 \times y^2 = 0$, on doit avoir

$$Q = Z^2 - X \times Y, \text{ où}$$

$$Z = \begin{vmatrix} a & e & 2f & 2l & g & p \\ d & b & 2l & 2h & k & q \\ f & h & g & 2k & c & r \\ p & & r & & & \\ & q & & r & & \\ & & p & q & r & \end{vmatrix}.$$

X et Y sont des déterminants de la même forme que celui ci-dessus; dans X il n'y a pas de terme a, dans Y il y a un terme a.

Dans Q le terme où se trouve a^2 a le signe plus, comme dans le déterminant que l'on aurait pu former après l'élimination de z; donc

quand $Q = 0$, deux systèmes de racines sont égaux; quand Q est positif, deux systèmes de racines sont imaginaires; quand Q est négatif, toutes les racines sont réelles et distinctes.

§. 35.

Déterminer les conditions qui expriment que les trois points d'intersection d'une droite et d'une courbe du troisième degré coïncident.

Pour que les trois racines de $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0$ soient égales, il faut qu'on puisse satisfaire simultanément aux équations que l'on obtient en différentiant l'équation précédente deux fois par rapport à x, deux fois par rapport à y, et une fois par rapport à x et à y

$$ax + by = 0,$$

$$bx + cy = 0,$$

$$cx + dy = 0. \text{ On doit donc avoir}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} b & c \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

Pour résoudre le problème proposé, on pourrait éliminer z et différentier ensuite. Mais ont peut aussi commencer par différentier, et éliminer après. On trouve ainsi qu'un même système de valeurs de

$$x,\quad y,\quad z,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

doit vérifier les équations

$$ax + dy + fz - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{p^2}{r^2} = 0,$$

$$dx + ey + lz - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{pq}{r^2} = 0,$$

$$ex + by + hz - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{q^2}{r^2} = 0,$$

$$gx + ky + cz - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad = 0,$$

$$px + qy + rz \qquad = 0.$$

Les conditions cherchées sont donc

$$\begin{vmatrix} a & d & f & p^2 \\ d & e & l & pq \\ e & b & h & q^2 \\ p & q & r & \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & d & f & p^2 \\ d & e & l & pq \\ g & k & c & r^2 \\ p & q & r & \end{vmatrix} = 0.$$

Groningue. Juillet, 1869.

IX.

Ueber den Ausdruck des Krümmungsradius in Polarcoordinaten und über diejenigen Kurven deren Gleichung

$r^k = a^k \sin k\theta$.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien.

(Figuren s. Tafel III.)

Die bekannten Ausdrücke für den Halbmesser ϱ des Krümmungskreises einer ebenen Kurve in Polarcoordinaten und die Coordinaten R, Θ seines Mittelpunktes erlangen eine einfachere Form durch die Einführung des Winkels τ, welchen die Tangente mit dem Leitstrahl bildet, wodurch namentlich die Differenzialgleichung zweiter Ordnung für ϱ leichter die Bedingungen der Integrabilität erkennen lässt.

Die folgende Untersuchung gibt eine Anwendung dieser Transformation auf jene ausgedehnte Classe interessanter Kurven deren Gleichung $r^k = a^k \sin k\theta$, mit welchen sich schon Fagnano, Legendre, Serret, Tortolini u. A. beschäftiget haben.

Diese Transformation führt uns aus der schon von Fagnano für positive k entdeckten Tangenteneigenschaft und einer ähnlichen für negative k zur Construction und zu den allgemeinen Eigenschaften ihrer Krümmungsmittelpunkte.

Wir haben gezeigt, dass diese Classe von Kurven nothwendig in zwei Gattungen zerfällt für positive und negative Werthe von k, von welchen die erstere zurücklaufend und schlingenförmig mit einem vielfachen Punkt, als eine Verallgemeinerung der

Lemniscate, die letztere Gattung aus getrennten unendlich und asymptotisch verlaufenden Zweigen bestehend, als Verallgemeinerung der Hyperbel zu betrachten ist; während allerdings beide Gattungen durch ihre Fusspunktkurven, welche letzteren derselben Kurvenclasse angehören, in ähnlicher Weise mit einander zusammenhängen, wie die Lemniscate mit der gleichseitigen Hyperbel.

Der von Serret bewiesenen schönen Eigenschaft für die Kurven erster Gattung mit ganzzahligem k entspricht eine ähnliche Eigenschaft der Kurven zweiter Gattung, welche wir in §. 17. bewiesen haben.

§. 1.

Es sei

(1) . . . . $r = f(\theta)$

die Gleichung der ebenen Kurve M (Fig. 1.) in Bezug auf O als Pol und Ox als Polaxe; der Winkel θ, welcher als independente Veränderliche gilt, wird von Null aus im positiven Sinne nach aufwärts bis 360^0 und so weiter gezählt. Zieht man in dem Kurvenpunkt M eine Tangente, welche die Polaxe in T trifft, so wird der Winkel φ, welchen dieselbe mit der Polaxe einschliesst, in demselben Sinne positiv gezählt, wie der Winkel θ. Als Tangentenwinkel τ bei M ist immer der spitze oder stumpfe Winkel zu verstehen, welcher in dem Dreieck OMT vorkommt, und wird positiv oder negativ gezählt, je nachdem er mit dem Polwinkel θ auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite des Leitstrahls liegt, so dass allgemein:

(2) . . . . $\varphi = \theta + \tau.$

Bezeichnet r' die erste Derivirte der Function r nach θ gezogen aus der Gleichung (1), so ist bekanntlich:

(3) . . . . $\sin\tau = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$

(4) . . . . $\cos\tau = \dfrac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$

(5) . . . . $\operatorname{tg}\tau = \dfrac{r}{r'},$

(6) . . . . $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2}, \quad ds = \dfrac{r\,d\theta}{\sin\tau};$

aber aus (5) folgt auch noch:

$$(7) \ldots\ldots \quad \frac{d\tau}{d\theta} = \tau' = \frac{d}{d\theta}\left\{\operatorname{arc.tg}\frac{r}{r'}\right\},$$

und aus (2):

$$(8) \ldots\ldots \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \tau'.$$

Errichtet man in M die Normale und in O eine Senkrechte auf den Radiusvector bis zum Durchschnitt N, so ist in dem rechtwinkeligen Dreieck OMN nach (3), (4), (5) die Kathete ON gleich r' und $MN = \sqrt{r^2 + r'^2}$.

Der Krümmungshalbmesser des Punktes M wird durch die Gleichung definirt:

$$\varrho = \frac{ds}{d\varphi},$$

oder weil θ die unabhängige Veränderliche ist, durch:

$$\varrho = \frac{\frac{ds}{d\theta}}{\frac{d\varphi}{d\theta}};$$

mit Anwendung der Gleichungen (3), (4), (6) und (8) erhält man hieraus:

$$(9) \ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{r}{\varrho} = \sin\tau(1+\tau'), \\ \dfrac{r'}{\varrho} = \cos\tau(1+\tau'). \end{cases}$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit r' und bedenkt, dass nach (5)

$$r'\sin\tau = r\cos\tau,$$

so folgt:

$$\frac{rr'}{\varrho} = r'\sin\tau + r\cos\tau\,.\,\tau'$$

oder:

$$(10) \ldots \quad \frac{rr'}{\varrho} = \frac{d}{d\theta}\{r\sin\tau\} = \frac{d}{d\theta}\left\{\frac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2}}\right\}.$$

Fällt man vom Pol auf die Tangente eine Senkrechte p, so ist offenbar

$$(11) \quad\quad p = r \sin\tau = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

die Gleichung (10) kann also auch in folgender Form geschrieben werden:

$$(12) \quad\quad \frac{rr'}{\varrho} = \frac{dp}{d\theta}.$$

Diese Ausdrücke (9), (10) und (12) für den Krümmungshalbmesser in Polarcoordinaten empfehlen sich durch ihre Einfachheit; sie sind besonders geeignet zur Auffindung von Kurven, welchen gegebene Eigenschaften zukommen, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Wird in (10) die Differenziation rechts ausgeführt und bezeichnet r'' die zweite Derivirte von r nach θ im Sinne der Gleichung (1), so erhält man nach Kürzung mit rr' die gewöhnliche Form von Jacob Bernoulli:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{\sqrt{r^2 + r'^2}^3}.$$

Anmerkung. In den Annales de Math. von Gergonne (1831) T. XXI, p. 31 hat Le Barbier einen Ausdruck für den Krümmungshalbmesser gegeben, in welchem statt des Tangentenwinkels τ der Bogen s erscheint:

$$\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3}{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 - r^2 . \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)}.$$

Auf folgende Art erlangt derselbe unsere Form. Nach (6) ist $\frac{ds}{d\theta} = \frac{r}{\sin\tau}$, mithin auch:

$$\varrho = \frac{r}{\sin\tau} \cdot \frac{1}{1 - \sin^2\tau . \frac{d}{d\theta}\left(\frac{r'}{r}\right)}$$

oder

$$\frac{rr'}{\varrho} = r' \sin\tau . \left\{ 1 - \sin^2\tau . \frac{d}{d\theta}\left(\frac{r'}{r}\right) \right\};$$

nun ist aber nach (7):

$$\sin^2\tau . \frac{d}{d\theta}\left(\frac{r'}{r}\right) = \sin^2\tau \frac{rr'' - r'^2}{r^2} = -\frac{d\tau}{d\theta} = -\tau',$$

also

$$\frac{rr'}{\varrho} = r' \sin\tau (1 + \tau');$$

weil aber $r' \sin\tau = r\cos\tau$, so ist:

$$(10) \; . \; . \; . \quad \frac{rr'}{\varrho} = r' \sin\tau + r\cos\tau . \tau' = \frac{d}{d\theta}\{\sin\tau\}.$$

In Crelle's Journal Bd. 45, p. 265 gibt auch Schellbach folgende von ihm empfohlene Form für den Ausdruck des Krümmungshalbmessers:

$$\varrho = \frac{u^3 s'^3}{u + u''}, \quad \text{mit} \quad u = \frac{1}{r};$$

welche sich aus der Jacob Bernoulli'schen Form leicht ermitteln lässt, denn es ist:

$$u' = -r^{-2}.r', \quad u'' = 2r^{-3}.r'^2 - r^{-2}.r'',$$

also

$$u + u'' = r^{-1} + 2r^{-3}.r'^2 - r^{-2}.r'' = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^3}$$

oder

$$u + u'' = u^3 (r^2 + 2r'^2 - rr'').$$

§. 2.

Bezeichnen R, Θ die Coordinaten des Krümmungsmittel punktes C (Fig. 1), so gibt das Dreieck OCM, wenn von C auf den Leitstrahl r eine Senkrechte gefällt wird, unmittelbar:

$$(13) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \begin{cases} R\sin(\Theta - \theta) = \varrho\cos\tau, \\ R\cos(\Theta - \theta) = r - \varrho\sin\tau \end{cases}$$

oder durch Substitution der Werthe für $\varrho\cos\tau$, $\varrho\sin\tau$ aus (9):

$$(14) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \begin{cases} R\sin(\Theta - \theta) = \dfrac{r'}{1 + \tau'}, \\ R\cos(\Theta - \theta) = \dfrac{r\tau'}{1 + \tau'}; \end{cases}$$

werden diese Gleichungen dividirt, ferner beide quadrirt und addirt, so folgt:

$$(15) \; . \; . \; . \quad \operatorname{tg}(\Theta - \theta) = \frac{r'}{r\tau'}, \qquad R = \frac{\sqrt{r^2\tau'^2 + r'^2}}{1 + \tau'};$$

durch Elimination von r und θ aus diesen Gleichungen und jener (1) $r = f(\theta)$ gelangt man zur Gleichung der Evolute.

§. 3.

Um die Anwendung der in §. 1. abgeleiteten allgemeinen Ausdrücke zu zeigen, setzen wir in (9):

$$(16) \ldots\ldots \quad \tau = k\theta, \quad \text{also} \quad \tau' = k,$$

worin k eine von Null verschiedene Constante bedeute, so wird mit (3):

$$(17) \ldots \quad \varrho = \frac{r}{(1+k)\sin\tau} = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{1+k} = \frac{MN}{1+k},$$

und mit (5) $r' = r.\operatorname{ctg} k\theta$ oder

$$\frac{dr}{r} = \operatorname{ctg} k\theta . d\theta;$$

hieraus folgt durch Integration, wenn a die arbiträre Constante bezeichnet:

$$(18) \ldots\ldots \quad \left(\frac{r}{a}\right)^k = \sin k\theta,$$

die Polargleichung derjenigen Kurve, welche der Bedingung (16) entspricht*). Nach dieser kann durch Annahme eines der beiden Winkel τ, θ der zweite leicht gefunden werden; wodurch ermöglicht ist, Tangenten und Normalen geometrisch zu construiren; dann zeigt die Gleichung (17) die Construction des Krümmungsmittelpunktes.

§. 4.

Durch die Annahme $\tau = \alpha$, wobei α einen unveränderlichen Winkel bezeichnet, wird $\tau' = 0$, also nach (9):

---

*) Mit dieser Kurve beschäftiget sich bereits Fagnano in seinen Produzioni matematiche, 1750, V. II, p. 375. Er stellt sich die Aufgabe, diejenige Kurve zu finden, für welche die Winkel zwischen Radiusvector und einer festen Axe und zwischen der Normale und derselben Axe sich wie zwei gegebene Zahlen verhalten. Wenn k eine ganze Zahl ist, zeigt B. Tortolini, wie man die Gleichung (18) durch rechtwinkelige Coordinaten darstellen kann. (Annali di matematica etc. T. I, 1858, p. 178). S. a. Grunert's Archiv, Thl. 31, Literarischer Bericht Nr. CXXI, p. 7.

$$\frac{r}{\varrho} = \sin\alpha, \quad \varrho = MN$$

und nach (5) $r = r'.\mathrm{tg}\alpha$, $d\theta = \mathrm{tg}\alpha.\frac{dr}{r}$, woraus folgt, wenn a die Integrationsconstante bedeutet:

$$r = a.e^{\frac{\theta}{\mathrm{tg}\alpha}},$$

welche Gleichung die logarithmische Spirale bezeichnet.

Man kann daher sagen: Bei der logarithmischen Spirale schliesst die Tangente mit dem Leitstrahl einen constanten Winkel ein, Leitstrahl und Krümmungsradius haben ein constantes Verhältniss und die aus dem Krümmungsmittelpunkt N auf den Leitstrahl gefällte Senkrechte geht immer durch den Pol.

Für $\alpha = 90^0$ degenerirt die Kurve in einen Kreis vom Halbmesser a. Die logarithmische Spirale entspricht dem Ausnahmsfall des §. 3. mit $k = 0$.

§. 5.

Eigenschaften der durch die Gleichung (18) bezeichneten Kurve.

Aus der Gleichung (3) folgt:

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{r}{\sin\tau},$$

also mit Rücksicht auf (17):

$$(1+k)\varrho = \frac{r}{\sin\tau}, \quad \frac{r}{\varrho} = (1+k)\sin\tau;$$

bezeichnet nun p die Senkrechte vom Pol auf die Tangente, so ist nach (11) $p = r.\sin\tau$ und die vorige Gleichung gibt:

(19) . . . . $r^2 = (1+k)p.\varrho$,

d. h. der Leitstrahl ist immer die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Krümmungsradius und der $(1+k)$-fachen Senkrechten vom Pol auf die Tangente.

Für $\theta = \frac{\pi}{2k} \pm \lambda$ erhält nach (18) r denselben Werth, derjenige Leitstrahl also, welcher

$$(20) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \theta = \frac{\pi}{2k}$$

entspricht, ist für den ganzen Verlauf der Kurve eine Axe der Symmetrie. Für $\theta = v \, . \, 2\pi + \lambda$ erhält der Leitstrahl dieselbe Richtung, so oft v eine ganze Zahl ist; er erhält auch dieselbe Grösse, so oft in

$$k\theta = kv \, . \, 2\pi + k\lambda$$

kv eine ganze Zahl ist. Ist also k eine ganze Zahl oder ein rationaler Bruch, so kehrt die Kurve unendlich oft in sich selbst zurück.

Die Gleichungen (15) geben, wegen $\tau' = k$, unmittelbar:

$$(21) \; . \; . \; . \; . \quad R = \frac{\sqrt{k^2 r^2 + r'^2}}{1+k}, \quad \operatorname{tg}(\Theta - \theta) = \frac{r'}{kr}.$$

Verlängern wir den Radiusvector r bis P (Fig. 1.), so dass $OP = kr$ und ziehen NP, so ist also

$$R = \frac{NP}{1+k};$$

dieses gibt in Verbindung mit (17):

$$(21') \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{R}{\varrho} = \frac{NP}{MN}.$$

In dem rechtwinkeligen Dreieck ONP ist $ON = r'$ und nach der Construction $OP = kr$, also ist nach der zweiten Gleichung in (21) der Winkel bei P gleich $\Theta - \theta$, mithin, wenn OC bis zum Durchschnitt Q mit der NP gezogen wird:

$$(22) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad OQ = PQ,$$

also liegt der Punkt Q auf der Mitte der NP.

§. 6.

Für $k = 1$ vereinfacht sich die Gleichung (18) in:

$$(23) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad r = a \sin\theta,$$

sie bezeichnet einen Kreis vom Durchmesser a, welcher die Polaxe im Pol berührt. Die Tangente schliesst mit dem Leitstrahl den Winkel θ ein. Die aus dem Mittelpunkt der Krümmung auf den Leitstrahl gefällte Senkrechte halbirt denselben. $\tau = \theta$, $\varrho = \frac{1}{2} MN$.

Für $k = 2$ wird:

(24) . . . . $r = a\sqrt{\sin 2\theta}$,

und diese Gleichung bezeichnet die Bernoulli'sche Lemniscate, welche die Axe im Pol berührt, die zweite Tangente in diesem Punkt steht darauf senkrecht. Der Winkel zwischen Tangente und Leitstrahl ist dem doppelten Polwinkel gleich. $\varrho = \frac{1}{3}MN$. Fällt man vom Krümmungsmittelpunkt auf den Leitstrahl eine Senkrechte, so ist der Abschnitt vom Pol aus zwei Dritteln des letzteren gleich, wonach der Krümmungsmittelpunkt immer leicht construirt werden kann *).

ABC in Fig. 2. zeigt die Gestalt der Kurve für $k=3$; hier ist

(24′) . . . . $r = a\sqrt[3]{\sin 3\theta}$.

$$\tau = 3\theta,\ OP = 3r,\ \varrho = \tfrac{1}{4}MN.$$

Für $k = \frac{1}{2}$ wird

(25) . . . . $r = a.\sin^2 \frac{1}{2}\theta$;

diese Gleichung entspricht der Cardioide (Fig. 3.) deren Grundkreis $\frac{1}{2}a$ zum Durchmesser hat. $\tau = \frac{1}{2}\theta$, hiernach können Tangente und Normale leicht construirt werden. Halbirt man den Leitstrahl OM in P und zieht NP, halbirt NP in Q und zieht OQ bis zum Durchschnitt C mit der Normale, so ist C der Krümmungsmittelpunkt für M.

Für $k = \frac{2}{3}$ geht die Gleichung (18) über in:

(26) . . . . $r = a.(\sin \frac{2}{3}\theta)^{\frac{3}{2}}$

und die Fig. 4. zeigt den Verlauf der durch dieselbe bezeichneten Kurve. Es ist $\tau = \frac{2}{3}\theta$, $\varrho = \frac{3}{5}MN$, für den Krümmungsmittelpunkt C gelten noch die Gleichungen: $OP = \frac{2}{3}r$, $NQ = QP$.

§. 7.

Die Quadratur und Rectification der durch die Gleichung (18) bezeichneten Kurve ist in geschlossener Form darstellbar, wenn

---

*) Diese Construction findet sich in der interessanten gelehrten Schrift von Dr. Bierens de Haan, Lemniscata Bernoulliana. (Amsterdam 1847. p. 29, Theoremata XXIII.)

die Constante $\frac{1}{k}$ eine ganze Zahl n ist *). In diesem Falle lautet die Gleichung der Kurve nun so:

$$(27) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad r = a\left(\sin\frac{\theta}{n}\right)^n.$$

Bezeichnet f die Fläche, welche der Leitstrahl r durchstreicht, während der Polwinkel von 0 bis θ wächst, so wird

$$2f = a^2\int_0^\theta \left(\sin\frac{\theta}{n}\right)^{2n}.d\theta;$$

die Ausführung der Integration gibt:

$$(28) \ldots \quad 2f = a^2\,\frac{1.3.5\ldots(2n-3)(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n-2)\,2n}$$

$$-\frac{a^2}{2}\cos\frac{\theta}{n}\left\{\left(\sin\frac{\theta}{n}\right)^{2n-1} + \frac{2n-1}{2n-2}\left(\sin\frac{\theta}{n}\right)^{2n-3}\right.$$

$$\left.+\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}\left(\sin\frac{\theta}{n}\right)^{2n-5} + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots5.3}{(2n-2)(2n-4)\ldots4.2}\sin\frac{\theta}{n}\right\}.$$

Setzt man in diesem Ausdruck $\theta = \frac{n\pi}{2}$, welcher Werth der Axe der Symmetrie entspricht, so erhält man die Fläche F, welche der Leitstrahl durchstreicht, während der Endpunkt desselben den halben Umfang der Kurve durchläuft; einzelne Flächentheile erscheinen, wenn $n > 2$ ist, ein- oder mehrmal über einander gelagert, und werden eben so oft in Rechnung gebracht. Dann ist

$$(29) \ldots \quad 2F = a^2\,\frac{1.3.5\ldots.(2n-3)(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n-2)\,2n}\cdot\frac{n\pi}{2}.$$

Für die Cardioide z. B. ist $n = 2$, also

$$2f = a^2\,\frac{1.3}{2.4}\,\theta - \frac{a^2}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left\{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right\}$$

oder

$$(30) \ldots\ldots\ldots \quad 2f = \frac{a^2}{16}(6\theta - 8\sin\theta + \sin 2\theta)$$

---

*) Für $k = 2, 4, 6$ hat Legendre die Bogenlänge s durch elliptische Integrale erster Gattung dargestellt, A. Serret durch Euler'sche Integrale zweiter Gattung. (S. Journal de Liouville, 1842—43, T. VII, p. 114, T. VIII, p. 495.)

und

$$(31) \ldots\ldots\ldots \qquad 2F = \frac{3a^2}{8}\pi.$$

Zur Berechnung der Bogenlänge s gibt die Gleichung (6), indem jetzt $r' = r.\mathrm{ctg}\frac{\theta}{n}$:

$$s = a\int_0^\theta (\sin\frac{\theta}{n})^{n-1}.d\theta,$$

und hier ist zur Ausführung der Integration die Unterscheidung zweier Fälle nothwendig, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Für $n = 2m+1$, also

$$(32) \ldots\ldots \qquad r = a(\sin\frac{\theta}{2m+1})^{2m+1},$$

wird:

$$(33) \ldots \qquad s = a\frac{1.3.5\ldots(2m-3)(2m-1)}{2.4.6\ldots(2m-2)2m}\theta$$

$$-a\frac{2m+1}{2m}\cos\frac{\theta}{2m+1}\Big\{(\sin\frac{\theta}{2m+1})^{2m-1} + \frac{2m-1}{2m-2}(\sin\frac{\theta}{2m+1})^{2m-3}$$

$$+\frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m-2)(2m-4)}(\sin\frac{\theta}{2m+1})^{2m-5} + \ldots + \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots5.3}{(2m-2)(2m-4)\ldots4.2}\sin\frac{\theta}{2m+1}\Big\}$$

und der ganze Umfang der Kurve:

$$(34) \ldots \quad U = a\frac{1.3.5\ldots(2m-3)(2m-1)}{2.4.6\ldots(2m-2)2m}(2m+1)\pi.$$

Ist $n = 2m$ eine gerade Zahl, also

$$(35) \ldots\ldots \qquad r = a(\sin\frac{\theta}{2m})^{2m},$$

so erhält man:

$$(36) \ldots \qquad s = a\frac{2.4.6\ldots(2m-2)\,2m}{1.3.5\ldots(2m-3)(2m-1)}$$

$$-a\frac{2m}{2m-1}\cos\frac{\theta}{2m}\Big\{(\sin\frac{\theta}{2m})^{2m-2} + \frac{2m-2}{2m-3}(\sin\frac{\theta}{2m})^{2m-4}$$

$$+\frac{(2m-2)(2m-4)}{(2m-3)(2m-5)}(\sin\frac{\theta}{2m})^{2m-6} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots6.4}{(2m-3)(2m-5)\ldots5.3}(\sin\frac{\theta}{2m})^2 + \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots4.2}{(2m-3)(2m-5)\ldots3.1}\Big\}.$$

Die Cardioide entspricht diesem letzteren Fall mit $m = 1$, und es wird:

$$(37) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} s = 4a\sin^2 \tfrac{1}{4}\theta, \\ U = 4a. \end{cases}$$

§. 8.

Die durch die Gleichung:

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d}{d\theta}\left\{\frac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2}}\right\} = \frac{rr'}{\varrho}$$

dargestellte Beziehung ist in allen Fällen zur Auffindung der Kurve dienlich, wenn der Krümmungsradius ϱ als Function des Leitstrahls r gegeben ist. Bezeichnet $F(r)$ irgend eine Function von r, $F'(r)$ ihre erste Derivirte und ist

$$(38) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varrho = \frac{r}{F'(r)},$$

so gibt hiermit (10) nach einmaliger Integration, wenn G die willkürliche Constante bezeichnet:

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2}} = F - G,$$

oder wenn man auf r' reducirt:

$$r' = r\frac{\sqrt{r^2-(F-G)^2}}{F-G},$$

und hieraus, wenn η eine neue arbiträre Constante bezeichnet:

$$(39) \quad \ldots\ldots \quad \theta + \eta = \int_0^r \frac{F-G}{\sqrt{r^2-(F-G)^2}} \cdot \frac{dr}{r}.$$

In Bezug auf die von uns im Vorhergehenden untersuchten Kurven ist zu bemerken, dass der Krümmungsradius derselben

$$(17) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varrho = \frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{1+k}$$

nicht lediglich eine Function von r, sondern eine Function von r und r' ist. Dieser Fall ist in der obigen Verallgemeinerung nicht eingeschlossen.

§. 9.

Die Fusspunktkurven in Polarcoordinaten.

Fällt man vom Pol auf die Tangente des Punktes M (Fig. 5.) der Basiskurve $r=f(\theta)$ die Senkrechte p und ist v der Polwinkel derselben, so sind p, v die Polarcoordinaten eines Punktes V der Fusspunktkurve.

Aus der Figur folgt:

$$v-\theta=\tau-90^0,\quad p=r\sin\tau,$$

also $\operatorname{ctg}(v-\theta)=-\operatorname{tg}\tau$, mithin nach (5) und (11):

$$(40)\ \dots\dots\ \begin{cases}\operatorname{tg}(\theta-v)=\dfrac{r'}{r},\\[2ex] p=r\sin\tau=\dfrac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2}};\end{cases}$$

werden aus diesen beiden Gleichungen und jener (1) $r=f(\theta)$, r und θ eliminirt, so erhält man die Gleichung der Fusspunktkurve für O als Pol.

§. 10.

Als Anwendung der allgemeinen Gleichungen (40) suchen wir die Fusspunktkurve der oben behandelten Kurve, deren Gleichung:

$$(18)\ \dots\dots\ \left(\frac{r}{a}\right)^k=\sin k\theta.$$

Für diese ist $v=(1+k)\theta-90^0$, $p=r\sin k\theta$, woraus folgt:

$$\theta=\frac{v+90^0}{1+k},\qquad r=\frac{p}{\sin\dfrac{k}{1+k}(v+90^0)},$$

und durch Substitution dieser Werthe in (18) erhält man:

$$(41)\ \dots\dots\ \left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{k}{1+k}}=\sin\frac{k}{1+k}\,(v+90^0)$$

als Gleichung der Fusspunktkurve. Diese Kurve ist offenbar von derselben Art, wie jene (18), nur steht

$$(42)\ \dots\dots\ k_1=\frac{k}{1+k}$$

an der Stelle von k, p statt r, und der Polwinkel

$$(43) \quad \ldots\ldots\ldots \quad w = v + 90^0$$

ist von der Axe Oy aus zu zählen, welche auf Ox senkrecht steht; alsdann lautet ihre Gleichung:

$$(44) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left(\frac{p}{a}\right)^{k_1} = \sin k_1 w.$$

Setzt man in der Gleichung (18) der Reihe nach statt k:

$$k_1 = \frac{k}{1+k}, \quad k_2 = \frac{k_1}{1+k_1}, \quad k_3 = \frac{k_2}{1+k_2}, \ldots$$

oder

$$(45) \quad \ldots \quad k_1 = \frac{k}{1+k}, \quad k_2 = \frac{k}{1+2k}, \quad k_3 = \frac{k}{1+3k}, \ldots,$$

so entsprechen die entstehenden Gleichungen einer Reihe von Kurven von der Gattung (18), von welchen jede folgende die Fusspunktkurve der vorhergehenden ist.

Für $k = 1$, welcher Werth dem Kreis entspricht, wird $k_1 = \frac{1}{2}$, welcher Werth der Cardioide entspricht: Die Cardioide ist also die Fusspunktkurve des Kreises, wenn der Pol in der Peripherie liegt.

Die Fusspunktkurve der Cardioide hat, da für $k = \frac{1}{2}$, $k_1 = \frac{1}{3}$ wird, die Gleichung:

$$(46) \quad \ldots\ldots\ldots \quad r = a(\sin \tfrac{1}{3}\theta)^3.$$

Für die Lemniscate ist $k = 2$, also $k_1 = \frac{2}{3}$, die in §. 6. beschriebene Kurve (Fig. 4.) deren Gleichung

$$(26) \quad \ldots\ldots\ldots \quad r = a(\sin \tfrac{2}{3}\theta)^{\frac{3}{2}}$$

ist, die Fusspunktkurve der Lemniscate.

§. 11.

Eine zweite Gattung von Kurven, welche mit den vorhergehenden in unmittelbarem Zusammenhang stehen, erlangt man durch die Bedingung:

$$(47) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \tau = 180^0 - k\theta,$$

wobei wie in (16) k eine positive Constante bezeichnen soll. Weil jetzt $\operatorname{tg}\tau = -\operatorname{tg} k\theta$, $\tau' = -k$, so wird nach (9)

$$\frac{r}{\varrho} = (1-k)\sin\tau,$$

oder mit Anwendung der Gleichung (3):

$$(47') \quad \ldots\ldots \quad \varrho = \frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{1-k} = \frac{MN}{1-k},$$

so dass auch in diesem Falle der Krümmungsmittelpunkt eines jeden Kurvenpunktes leicht gefunden werden kann.

Ferner ist nach (5) $r = -r'.\mathrm{tg}\,k\theta$, woraus folgt:

$$-\frac{dr}{r} = \mathrm{ctg}\,k\theta . d\theta,$$

oder durch Integration, wenn a die willkürliche Constante bezeichnet:

$$\lg\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{1}{k}\lg\sin k\theta,$$

$$(48) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left(\frac{a}{r}\right)^k = \sin k\theta,$$

und diese ist die Polargleichung der gesuchten Kurve. Da für die Richtungen

$$\theta = 0, \quad \frac{\pi}{k}, \quad \frac{2\pi}{k}, \quad \frac{3\pi}{k}, \ldots$$

$\sin k\theta = 0$, also $r = \infty$ wird, so bezeichnen dieselben Asymptoten oder Axen der unendlichen Verzweigung, deren Anzahl endlich ist, wenn k eine rationale Zahl bezeichnet.

§. 12.

Für $k = 1$ bezeichnet dieselbe eine im Abstand a zur Polaxe parallele Gerade.

Für $k = \frac{1}{2}$ wird

$$(49) \quad \ldots\ldots\ldots \quad r = \frac{a}{\sin^2 \frac{1}{2}\theta},$$

und diese Gleichung bezeichnet eine Parabel deren Brennpunkt der Pol ist, die Polaxe ist die Axe der Symmetrie. Da in diesem Falle $\tau = 180^0 - \frac{1}{2}\theta$, so ergiebt sich hieraus für die Tangente eines Parabelpunktes die Construction: Man halbire den Polwinkel und

ziehe durch den Berührungspunkt zur halbirenden Geraden eine Parallele. Ebenso folgt aus

$$(50) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varrho = 2.MN$$

eine einfache Construction der Krümmungsmittelpunkte: Man ziehe (Fig. 6.) Radiusvector und Normale und errichte im Pol auf erstere eine Senkrechte, dann ist der Krümmungshalbmesser, der doppelten Hypotenuse des so entstandenen Dreieckes gleich *).

Ist $k = 2$, so bezeichnet (48), da

$$(51) \quad \ldots\ldots\ldots \quad r = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\theta}},$$

eine gleichseitige Hyperbel mit dem Pol als Mittelpunkt und die Polaxe als eine Asymptote. Hierfür wird nach (47) und (47')

$$(52) \quad \ldots\ldots \quad \tau = 180^0 - 2\theta, \quad \varrho = -MN,$$

das von der Polaxe, dem Leitstrahl und der Tangente formirte Dreieck ist also gleichschenkelig mit dem Basiswinkel θ.

Aus der zweiten Gleichung in (52) folgt eine einfache Construction der Krümmungsmittelpunkte der gleichseitigen Hyperbel: Man ziehe zum gegebenen Punkt M (Fig. 4.) Radiusvector und Normale, errichte im Pol auf ersteren eine Senkrechte, bis zum Durchschnitt N mit der Normale; trägt man nun die Hypotenuse MN auf die entgegengesetzte Seite der Normale nach MC, so ist C der Krümmungsmittelpunkt zum Punkt M.

Fig. 6. zeigt den Verlauf der Kurve für $k = \frac{1}{3}$,

$$(53) \quad \ldots\ldots\ldots \quad r = \frac{a}{(\sin \frac{1}{3}\theta)^3};$$

hierfür wird:

$$(54) \quad \ldots\ldots \quad \tau = 180^0 - \tfrac{1}{3}\theta, \quad \varrho = \tfrac{3}{4} MN;$$

für θ gleich 90^0 und 5.90^0 wird $r = 8a$, diese Werthe entsprechen dem Punkt S, in welchem die beiden Zweige der Kurve sich kreuzen. θ gleich 180^0 und 360^0 geben $r = \frac{8a}{3\sqrt{3}}$, diesen Wer-

*) In der Parabel ist also die Projection des Krümmungshalbmessers auf den Leitstrahl dem doppelten Leitstrahl gleich. Dieser Satz wurde von Lamarle bewiesen, Bulletins de l'Académie de Belgique, 1857, Nr. 5, p. 33.

then entsprechen die Punkte B, B' in der Polaxe. θ gleich 270° gibt $r = a$ im Punkt A. Die auf der Polaxe senkrechte Gerade AS ist eine Axe der Symmetrie. Für θ gleich Null und 3.180° wird $r = \infty$, die Kurve ist sonach nach beiden Seiten der AS in's Unendliche verzweigt.

$\alpha\beta\gamma$ in Fig. 2. zeigt die Gestalt der Kurve für $k = {}^{3}$,

$$(55) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad r = \frac{a}{\sqrt[3]{(\sin \frac{3}{2}\theta)^2}};$$

hierfür wird:

$$(56) \quad \ldots\ldots \quad \tau = 180^\circ - \tfrac{3}{2}\theta, \quad \varrho = -2.MN.$$

Die Kurve besteht aus drei getrennten sich in's Unendliche erstreckenden Zweigen, welche die den Polwinkeln 0, 120°, 240° entsprechenden Leitstrahlen zu gemeinschaftlichen Asymptoten haben.

Ist $\frac{1}{k} = n$ eine ganze Zahl, so lassen sich auch die Kurven zweiter Gattung quadriren und rectificiren in geschlossener Form, und die Rechnung ist ähnlich jener in §. 7.

§. 13.

Um die Fusspunktkurve der durch die Gleichung (48) repräsentirten Kurve zu ermitteln, wenden wir uns zu den allgemein giltigen Gleichungen (40) und erhalten daraus:

$$\operatorname{ctg}(v - \theta) = \operatorname{tg} k\theta, \quad v - \theta = 90^\circ - k\theta, \quad \text{also} \quad \theta = \frac{v - 90^\circ}{1 - k}$$

und

$$p = r \sin k\theta;$$

nach (48) ist:

$$r = a(\sin k\theta)^{-\frac{1}{k}}, \quad \text{also} \quad p = a(\sin k\theta)^{1 - \frac{1}{k}}$$

oder wenn für θ der oben gefundene Werth substituirt wird:

$$(57) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{k}{1-k}} = \sin \frac{k}{1-k}(v - 90^\circ).$$

Die durch diese Gleichung angezeigte Kurve ist offenbar von derselben Art wie jene (48) nur steht

$$(58) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad k' = \frac{k}{1-k}$$

an der Stelle von k, und die Polwinkel werden von einer neuen Axe aus gezählt, welche mit der alten Axe einen Winkel von 90^0 einschliesst. Setzt man, um auf gleiche Zählung zu reduciren:

$$(59) \quad \ldots\ldots\ldots \quad w = v - 90^0,$$

so erhält die Gleichung der Fusspunktkurve die Form:

$$(60) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left(\frac{a}{p}\right)^{k'} = \sin k'w.$$

Wird also die Constante k in (48) der Reihe nach durch

$$k' = \frac{k}{1-k}, \quad k'' = \frac{k'}{1-k'}, \quad k''' = \frac{k''}{1-k''}, \ldots$$

oder, was dasselbe ist, durch

$$(61) \quad \ldots \quad k' = \frac{k}{1-k}, \quad k'' = \frac{k}{1-2k}, \quad k''' = \frac{k}{1-3k}, \ldots$$

ersetzt, so entsprechen die entstehenden Gleichungen einer Reihe von Kurven, wovon jede folgende die Fusspunktkurve der vorhergehenden ist.

§. 14.

Ist $k = \frac{1}{2}$, so wird $k' = 1$; dem ersteren Werth entspricht die Parabel für den Pol als Brennpunkt und ihre Fusspunktkurve ist bekanntlich eine Gerade, welche durch den Scheitel geht und auf der Polaxe senkrecht steht.

Ist k ein echter Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine ganze Zahl n ist, so wird:

$$(62) \quad \ldots \quad k = \frac{1}{n}, \quad k' = \frac{1}{n-1}, \quad k'' = \frac{1}{n-2}, \ldots$$

$$\ldots\ldots \quad k^{(n-3)} = \tfrac{1}{3}, \quad k^{(n-2)} = \tfrac{1}{2}, \quad k^{(n-1)} = 1$$

und diesen Werthen entsprechen n Kurven, deren jede die Fusspunktkurve ihrer Vorgängerin ist, welche Reihe mit der Parabel und der geraden Linie abschliesst.

In dieser Kurvenreihe ist die drittletzte Kurve, für welche $k^{(n-3)} = \frac{1}{3}$, besonders bemerkenswerth, denn ihre Fusspunktkurve ist die Parabel. Es ist dieselbe Kurve, welche wir bereits in §. 12. unter (53) (Fig. 6.) kennen gelernt haben.

In Folge dieser Eigenschaft, dass die durch die Gleichung

$$(53) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad r = \frac{a}{(\sin\frac{1}{3}\theta)^3}$$

dargestellte Kurve die Parabel zur Fusspunktkurve hat, ergibt sich eine einfache Construction, um in einem Kurvenpunkt M oder von einem Punkt L ausserhalb eine Tangente zu ziehen, welche beide Constructionen in der Figur angedeutet sind.

§. 15.

Ist die Constante k nicht von der Form $\frac{1}{n}$, sondern irgend eine andere positive Zahl, so tritt in der Reihe (61), welche nun eine unendliche wird, sicher einmal ein Zeichenwechsel ein, d. h. in der Reihe k, k', k'',... sind, von einem gewissen Gliede ab, alle folgenden Glieder negativ. Wäre z. B. $k > 1$, so tritt diese Erscheinung schon vom zweiten Gliede ab ein.

Um den geometrischen Sinn derselben zu deuten, setzen wir in der Gleichung (48) $-k$ statt k und auch $-\theta$ statt θ, so dass wir jetzt die Polwinkel im entgegengesetzten Sinne zählen; hierdurch verwandelt sich dieselbe in:

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \left(\frac{r}{a}\right)^k = \sin k\theta,$$

welche Gleichung genau mit jener (18) übereinstimmt. Hieraus schliessen wir, dass die den negativen Werthen von k entsprechenden Kurven, Kurven der ersten Gattung sind, welche sich also an die Reihe der Fusspunktkurven für die Gattung (48) anschliessen.

§. 16.

So hat die gleichseitige Hyperbel (Fig. 4.), welche mit $k=2$ eine Kurve der zweiten Gattung ist, zur Fusspunktkurve die Lemniscate, welche mit demselben Werth von k der ersten Gattung angehört.

Die oben untersuchte Kurve zweiter Gattung (Fig. 2.), deren Gleichung

$$(55) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad r = \frac{a}{\sqrt[3]{(\sin\frac{2}{3}\theta)^2}},$$

hat zur Fusspunktkurve jene erster Gattung, welche wir in §. 6. kennen gelernt haben und deren Gleichung:

$$(24') \quad r = a\sqrt[3]{\sin 3\theta};$$

nur werden die Polwinkel von einer anderen Axe aus gezählt.

§. 17.

Aus O (Fig. 7.) als Pol beschreiben wir mit dem Radius e einen Kreis und theilen denselben von einem gewissen Theilungspunkt f_1 ausgehend in k gleiche Theile, so dass also von nun an k eine ganze positive Zahl bezeichnet; Of_1, Of_2, Of_3,.. seien die entsprechenden Leitstrahlen. Irgend ein Punkt M in dem Winkel f_1Ox, dessen Coordinaten r und θ sind, verbinden wir mit diesen sämmtlichen Theilungspunkten und bezeichnen diese Strecken der Ordnung nach mit r_1, r_2, r_3,...r_k. Hierdurch entstehen k Dreiecke, welche im Pol O je zwei Seiten gleich e und r haben, und wenn wir den Winkel $f_1OM = \alpha$ setzen, so sind die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel:

$$\alpha, \quad \alpha + \frac{2\pi}{k}, \quad \alpha + \frac{4\pi}{k}, \quad \alpha + \frac{6\pi}{k}, \ldots \alpha + \frac{(k-1)2\pi}{k};$$

mithin:

$$r_1^2 = e^2 + r^2 - 2er.\cos\alpha,$$

$$r_2^2 = e^2 + r^2 - 2er.\cos(\alpha + \frac{2\pi}{k}),$$

$$r_3^2 = e^2 + r^2 - 2er.\cos(\alpha + \frac{4\pi}{k}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_k^2 = e^2 + r^2 - 2er.\cos(\alpha + \frac{(k-1)2\pi}{k});$$

werden sämmtliche Gleichungen mit einander multiplicirt, so ist nach dem bekannten Satz von Moivre:

$$(63) \quad (r_1 r_2 r_3 \ldots r_k)^2 = e^{2k} + r^{2k} - 2e^k r^k.\cos k\alpha.$$

§. 18.

Ueber die noch unbestimmt gelassenen Grössen e, α, r verfügen wir im Sinne der folgenden Gleichungen:

$$(64) \quad e = \frac{a}{\sqrt[k]{2}},$$

(65) . . . . $\alpha = \frac{\pi}{2k} - \theta,$

(18) . . . . $r^k = a^k \sin k\theta,$

so dass jetzt M einen Punkt der Kurve erster Gattung bezeichnet; hierdurch reducirt sich die Gattung (63) auf:

(66) . . . . $r_1 r_2 r_3 \ldots r_k = e^k,$

d. h. die Kurven erster Gattung, deren Gleichung (18), haben die merkwürdige Eigenschaft, dass das Product der Entfernungen eines jeden Punktes derselben von k festen Punkten constant ist.

Diese k festen Punkte liegen in der Peripherie eines Kreises vom Halbmesser $\frac{a}{\sqrt[k]{2}}$, und ihre Leitstrahlen entsprechen den Polwinkeln:

$$\frac{\pi}{2k}, \frac{5\pi}{2k}, \frac{9\pi}{2k}, \ldots \frac{(4k-3)\pi}{2k}.$$

Für die Lemniscate z. B. ist $k=2$, also $e = \frac{a}{\sqrt{2}}$ und

(67) . . . . $r_1 r_2 = e^2.$

Diese Eigenschaft hat bereits A. Serret a. a. O. nachgewiesen, und wir benützen nun die allgemeine Gleichung (63), um die entsprechende Eigenschaft der Kurven zweiter Gattung aufzufinden.

Setzt man in derselben:

(68) . . . . $e = a\sqrt[k]{2},$

(65) . . . . $\alpha = \frac{\pi}{2k} - \theta,$

(48) . . . . $r^k = \frac{a^k}{\sin k\theta};$

so gehört der Punkt M zu einer Kurve zweiter Gattung und man hat nach kurzer Rechnung:

(69) . . . . $r_1 r_2 r_3 \ldots r_k = r^k,$

d. h. die Kurven zweiter Gattung, deren Gleichung (48), haben die Eigenschaft, dass das Product der Entfer-

nungen eines jeden Punktes derselben von k festen Punkten der $k$ten Potenz seines Leitstrahles gleich ist.

Diese k festen Punkte liegen in der Peripherie eines Kreises vom Halbmesser $a\sqrt[k]{2}$, und ihre Leitstrahlen haben die Polwinkel:

$$\frac{\pi}{2k},\ \frac{5\pi}{2k},\ \frac{9\pi}{2k},\ldots\ \frac{(4k-3)\pi}{2k}.$$

Für die gleichseitige Hyperbel z. B. ist $k=2$, also $e=a\sqrt{2}$ und:

(70) . . . . $r_1 r_2 = r^2$.

X.

Elementare Auflösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades.

Von

Herrn Professor *H. Grassmann*
am Gymnasium in Stettin.

Die folgende Auflösung der Gleichung vierten Grades ist einfacher als die mir bekannten, und eignet sich vorzüglich zur Darstellung in der Schule. Die Gleichung sei (nach Wegschaffung des zweiten Grades)

(1) . . . . $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$.

Wenn es gelingt diese Gleichung auf die Form

(2) . . . . $(x^2+d)^2 - e(x+f)^2 = 0$

zu bringen, so ist mit der Lösung der letzteren auch die der ersteren gegeben. Nun giebt die Gleichung (2) nach Potenzen von x entwickelt

$$x^4 + (2d - e)x^2 - 2efx + d^2 - ef^2 = 0.$$

Diese wird der ersteren (1) identisch, wenn die Koefficienten gleich werden. Das gibt die Gleichungen

(3) . . . . $2d = e + a$

(4) . . . . $2ef = -b$

und indem man die dritte $d^2 - ef^2 = c$ mit $4e$ multiplicirt und dann für $2d$ und $2ef$ ihre Werthe (aus (3) und (4)) einsetzt, erhält man $e(e+a)^2 - b^2 = 4ec$, d. h.

(5) . . . . . . $e^3 + 2ae^2 + (a^2 - 4c)e = b^2.$

Da nun auch umgekehrt, wenn die drei letzten Gleichungen erfüllt sind, die beiden ersten identisch werden, so folgt:

„Man suche eine beliebige der drei Wurzeln (e) der Gleichung (5), führe diesen Werth e in (3) und (4) ein, so sind dadurch d und f eindeutig bestimmt. Die gefundenen drei Werthe in (2) eingesetzt, machen diese Gleichung mit (1) identisch (was eine gute Probe liefert). Jetzt bringe man die Gleichung (2) auf die Form $x^2 + d = \mp\sqrt{e}\,(x+f)$, so erhält man durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung."

Uebrigens ergiebt die letgenannnte quadratische Gleichung, nachdem man sie mit 4 multiplicirt, und für d und f ihre Werthe aus (3) und (4) eingeführt hat,

(6) . . . . . $\left\{\begin{array}{l} 2x = \varepsilon \mp \sqrt{-\varepsilon^2 - 2a - \frac{2b}{\varepsilon}}, \\ \text{wo } \varepsilon = \mp\sqrt{e} \text{ ist.} \end{array}\right.$

Wählt man aus der Gleichung (5) statt e eine der andern Wurzeln e_1, e_2 dieser Gleichung, so müssen nach dem erwiesenen Satze diese dieselben vier Wurzeln der Gleichung (1) liefern. Um dies anschaulicher zu übersehen, führen wir die drei Wurzeln e, e_1, e_2 ein; nach der Gleichung (5) muss $e + e_1 + e_2 = -2a$ und $ee_1e_2 = b^2$ sein, oder wenn $e = \varepsilon^2$, $e_1 = \varepsilon_1^2$, $e_2 = \varepsilon_2^2$ ist, so muss $\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = -2a$, $\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2 = \mp b$ sein; wir wählen die Vorzeichen für ε, ε_1, ε_2 im Uebrigen willkürlich, aber so dass $\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2 = -b$ ist. Dann verwandelt sich die Gleichung (6) in

$$2x = \varepsilon \mp \sqrt{-\varepsilon^2 + (\varepsilon^2 + \varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2) + 2\varepsilon_1\varepsilon_2} = \varepsilon \mp (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Hier können wir das Minus-Zeichen weglassen, wenn wir die obige Zeichenbestimmung für ε, ε_1, ε_2 festhalten. Also:

„Wenn ε, ε_1, ε_2 drei Grössen sind, deren Quadrate die drei Wurzeln der Gleichung (5) sind, und welche alle möglichen Vorzeichen ($\mp$) aber mit der Einschränkung, dass $\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2$ mit b entgegengesetzt bezeichnet sei, annehmen können, so liefert die Gleichung

(7) . . . . $2x = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

die vier Wurzeln der Gleichung (1).“

Aus dieser Gleichung tritt die Beziehung zwischen den aus den drei verschiedenen Wurzeln von Gleichung (5) hervorgehenden vier Wurzeln von (1) vollkommen in Evidenz; z. B. wählen wir die Wurzel e_1 aus Gleichung (5), so tritt $2x$ in den Formen $2x = \varepsilon_1 \mp (\varepsilon + \varepsilon_2)$ und $2x = -\varepsilon_1 \mp (\varepsilon - \varepsilon_2)$ hervor u. s. w.

Es sei z. B.

(1) . . . . . . $x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{15}{16} = 0,$

so erhält man

(5) . . . . $e^3 - 3e^2 + 6e = 4.$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $e = 1$ (welche sich nach der allgemeinen algebraischen Methode sogleich ergiebt). Dann wird also

(3) . . . . $d = -\frac{1}{4}$

(4) . . . . $f = -1.$

Also

(2) . . . . $(x^2 - \frac{1}{4})^2 - (x-1)^2 = 0,$

deren Identität mit (1) sofort hervortritt, also $x^2 - \frac{1}{4} = \mp (x-1)$, und somit

(6).... $2x = -1 \mp \sqrt{6}$ oder $= 1 \mp i\sqrt{2}$, wo $i = \sqrt{-1}$.

Ich füge noch zwei Bemerkungen hinzu.

Bem. 1. Es ist oft wünschenswerth, Gleichungen vierten Grades zu erhalten, bei welchen die Hülfsgleichung dritten Grades (5) sich durch die bekannte algebraische Methode rational lösen lässt. Dies erreicht man, wenn man drei beliebige rationale

Grössen, α, u, v annimmt, und die Gleichung vierten Grades aufstellt:

$$x^4 + \frac{3}{2}\alpha x^2 + \sqrt{u^3 + v^3 - \alpha^3 + 3uv\alpha} \cdot x + \frac{3}{16}(4uv - \alpha^2) = 0,$$

woraus dann $e = u + v - \alpha$ folgt u. s. w.; so z. B. war in obigem Beispiele $\alpha = -1$, $u = 1$, $v = -1$.

Bem. 2. Es ist die Frage, in wie weit sich die obige Methode auch auf beliebige Gleichungen des $2n$ten Grades anwenden lässt. Eine solche hat nach Wegschaffung des 2ten Gliedes (mit x^{2n-1}) noch $2n-1$ Koefficienten. Ebenso viel bietet die Gleichung

$$(x^n + D)^2 - e(x^{n-1} + F)^2 = 0,$$

in welcher D und F ganze Funktionen des $(n-2)$ten Grades sind. Denn D und F enthalten je $(n-1)$ Koefficienten, wozu dann noch der Koefficient e kommt. Man hat zur Bestimmung dieser $2n-1$ Koefficienten also ebenso viel Gleichungen. Wenn diese Bestimmung in irgend einer Weise gelingt, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in die oben angegebene Form. Aus ihr folgt

$$x^n + D = \mp e(x^{n-1} + F),$$

was dann durch Lösung einer Gleichung $n$ten Grades die $2n$ Wurzeln der gegebenen Gleichung liefert. Bis dahin ist also alles, wie bei der Gleichung vierten Grades. Allein die Hülfsgleichungen, durch welche die Umwandlung in die verlangte Form gelingt, steigen im Allgemeinen zu höheren Graden an, und lassen sich nur unter besonderen Bedingungen auf Gleichungen des $(2n-1)$ten Grades zurückführen.

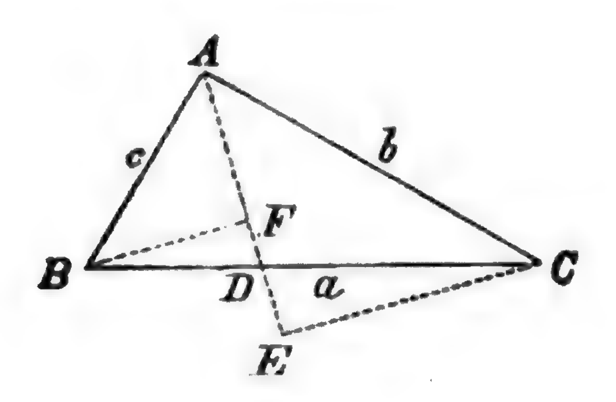
XI.

Propriéte de la bissectrice d'un angle dans le triangle.

Par

Monsieur *Georges Dostor*,
Docteur ès sciences,
Professeur de mathématiques à Paris.

Théorème. Dans tout triangle ABC, lorsqu'on mène la bissectrice $AD=d$ d'un angle A, la tangente de l'inclinaison de cette bissectrice sur le côté opposé $BC=a$ est à la tangente de la moitié de l'angle A comme la somme $b+c$ des deux côtés $AC=b$, $AB=c$, qui le comprennent, est à leur différence $b-c$.



Nous supposerons $b>c$, de sorte que D exprimera l'angle aigu que fait la bissectrice d avec le côté opposé a.

Des sommets C et B abaissons sur la bissectrice les perpendiculaires CE, BF. Dans les deux triangles rectangles CDE, BDF nous avons

$$CE = DE \operatorname{tang} D,\ BF = DF \operatorname{tang} D,$$

d'où nous tirons, en ajoutant,

$$(DE+DF)\operatorname{tang} D = CE+BF,$$

et, par suite,

$$(1) \ldots\ldots \operatorname{tang} D = \frac{CE+BF}{DE+DF} = \frac{CE+BF}{AE-AF}.$$

Or les deux triangles rectangles ACE, ABF donnent

$$CE = b\sin\frac{A}{2},\quad AE = b\cos\frac{A}{2},$$

$$BF = c\sin\frac{A}{2},\quad AF = c\cos\frac{A}{2};$$

ajoutant d'une part et retranchant de l'autre, on obtient

$$CE+BF = (b+c)\sin\frac{A}{2},\quad AE-AF = (b-c)\cos\frac{A}{2}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (1) et nous trouvons

$$(I) \ldots\ldots \operatorname{tang} D = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{(b-c)\cos\frac{A}{2}} = \frac{b+c}{b-c}\operatorname{tang}\frac{A}{2}.$$

2. **Corollaire.** On en déduit

$$(II) \ldots \sin D = \frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2},\quad \cos D = \frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}.$$

La valeur de la bissectrice est d'ailleurs

$$(III) \ldots d = \frac{bc\sin A}{a\sin D} = \frac{2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

3. **Remarque.** Dans l'ellipse appellons 2φ l'angle de deux rayons vecteurs r, r' et N l'angle que fait la normale N avec le grand axe, nous aurons

$$(IV) \ldots \begin{cases} \operatorname{tang} N = \dfrac{r'+r}{r'-r}\operatorname{tang}\varphi = \dfrac{2a}{r'-r}\operatorname{tang}\varphi, \\ \sin N = \dfrac{r'+r}{2c}\sin\varphi = \dfrac{2a}{2c}\sin\varphi = \dfrac{a}{c}\sin\varphi, \\ \cos N = \dfrac{r'-r}{2c}\cos\varphi. \end{cases}$$

La normale sera

$$\text{(V)} \ldots\ldots \quad N = \frac{2rr'}{r'+r}\cos\varphi = \frac{rr'}{a}\cos\varphi.$$

Dans l'hyperbole, si T est l'angle que fait la tangente T avec l'axe transverse, on aura

$$\text{(VI)} \ldots \quad \begin{cases} \operatorname{tang} T = \dfrac{r'+r}{r'-r}\operatorname{tang}\varphi = \dfrac{r'+r}{2a}\operatorname{tang}\varphi, \\ \sin T = \dfrac{r'+r}{2c}\sin\varphi, \\ \cos T = \dfrac{r'-r}{2c}\cos\varphi = \dfrac{2a}{2c}\cos\varphi = \dfrac{a}{c}\cos\varphi. \end{cases}$$

$$\text{(VII)} \ldots\ldots \quad T = \frac{2rr'}{r+r'}\cos\varphi.$$

XII.

Ellipse et Hyperbole.

Relation entre les deux angles que font les deux rayons vecteurs d'un point avec l'axe focal.

Par

Monsieur *Georges Dostor*,

Docteur ès sciences,

Professeur de mathématiques à Paris.

---

1. Dans une ellipse ou dans une hyperbole, lorsqu'on donne l'inclinaison d'un rayon vecteur sur l'axe focal, le point correspondant de la courbe se trouve déterminé; par conséquent on

connaîtra la direction du deuxième rayon vecteur, c'est-à-dire son inclinaison sur l'axe focal. Donc

Etant donnée l'équation d'une ellipse ou celle d'une hyperbole, il existe nécessairement une relation entre les deux angles que font avec l'axe focal les deux rayons vecteurs d'un même point de la courbe, et cette relation doit avoir lieu entre les deux angles et les paramètres de l'équation même de notre section conique.

Cette relation s'obtient rapidement de la manière suivante.

2. Soient F, F' les deux foyers d'une conique à centre, et M un point de la courbe, que, pour plus de simplicité, nous supposerons situé dans l'angle des x, y positifs. Nous poserons les rayons vecteurs

$$FM = r, \quad F'M = r',$$

la distance focale

$$FF' = 2c,$$

et l'axe focal

$$AA' = 2a.$$

L'inclinaison F du rayon vecteur FM sur l'axe focal est le supplément de l'angle en F du triangle MFF'; par conséquent, si nous faisons

$$r + r' + 2c = 2p,$$

nous aurons

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} F = \sqrt{\frac{p(p-r')}{(p-2c)(p-r)}}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} F' = \sqrt{\frac{(p-2c)(p-r')}{p(p-r)}},$$

d'où nous tirons

$$(1) \ldots \ldots \quad \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} F}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} F'} = \frac{p}{p-2c},$$

$$(2) \ldots \ldots \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} F \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} F' = \frac{p-r'}{p-r}.$$

3. **Ellipse.** Supposons que la conique à centre soit une ellipse. Dans ce cas on a

$$r + r' = 2a,$$

et, par suite,

$$\frac{p}{p-2c} = \frac{2p}{2p-4c} = \frac{r+r'+2c}{r+r'-2c} = \frac{2a+2c}{2a-2c} = \frac{a+c}{a-c};$$

donc il vient, en substituant dans (1)

$$\text{(I)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}F}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}F'} = \frac{a+c}{a-c}.$$

Théorème I. Les tangentes des demi-angles que font avec le grand axe de l'ellipse les rayons vecteurs d'un même point de la courbe, sont entre elles comme la somme du grand axe et de la distance focale est à leur différence.

4. **Hyperbole.** Si la conique à centre est une hyperbole, on aura

$$r' - r = 2a,$$

et, par suite,

$$\frac{p-r'}{p-r} = \frac{2p-2r'}{2p-2r} = \frac{2c+r+r'-2r'}{2c+r+r'-2r} = \frac{2c-(r'-r)}{2c+(r'-r)} = \frac{2c-2a}{2c+2a} = \frac{c-a}{c+a};$$

donc il vient, en substituant dans (2),

$$\text{(II)} \ldots\ldots \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}F \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}F' = \frac{c-a}{c+a}.$$

Théorème II. Le produit des tangentes des demi-angles que font, avec l'axe transverse d'une hyperbole, les deux rayons vecteurs d'un même point de la courbe, est égal au rapport de la différence entre la distance focale et l'axe transverse à leur somme.

5. **Remarque.** Il est facile de voir que l'équation

$$\text{(III)} \ldots\ldots \quad (1+q)^2 y^2 + 4qx^2 = 4a^2 q$$

représente toutes les ellipses dans lesquelles q exprime le quotient des tangentes des demi-inclinaisons des rayons vecteurs sur l'axe focal, ou toutes les hyperboles où q exprime le produit de ces tangentes, suivant que q est positif et plus grand que l'unité, ou négatif et plus petit que l'unité, a étant toujours le demi-axe focal de ces coniques.

XIII.

Inclinaison du rayon vecteur sur l'axe de la parabole.

Par

Monsieur *Georges Dostor*,
Docteur ès sciences,
Professeur de mathématiques à Paris.

Représentons cet angle par F. On sait que

$$(1) \quad . \ . \ . \ . \ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}F = \sqrt{\frac{1-\cos F}{1+\cos F}} = \sqrt{\frac{r - r\cos F}{r + r\cos F}}.$$

Si r désigne le rayon vecteur d'un point M de la parabole

$$y^2 = 2px,$$

dont les coordonnées sont x, y, on aura

$$r = x + \frac{p}{2}, \quad r\cos F = x - \frac{p}{2};$$

il vient donc, en substituant dans (1),

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}F = \sqrt{\frac{p}{2x}} = \sqrt{\frac{p^2}{2px}} = \sqrt{\frac{p^2}{y^2}} = \frac{p}{y}.$$

Théorème. Dans la parabole, la tangente du demi-angle que fait le rayon vecteur avec l'axe, est égal au paramètre divisé par l'ordonnée.

XIV

Propriétés du triangle rectangle.

Par

Monsieur *Georges Dostor*,
Docteur ès sciences,
Professeur de mathématiques à Paris.

---

1. **Théorème I.** Dans tout triangle rectangle, le carré de l'inverse de la perpendiculaire d, abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse a, est égal à la somme des carrés des inverses des deux côtés b, c de l'angle droit.

La double surface du triangle est $bc = ad$; on en tire

$$b^2c^2 = a^2d^2 = (b^2 + c^2)\,d^2 = c^2d^2 + b^2d^2;$$

divisant par $b^2c^2d^2$, on obtient

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{d^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

2. **Théorème II.** Dans deux triangles rectangles semblables, le produit aa' des hypoténuses est égal à la somme $bb' + cc'$ des produits des côtés homologues b et b', c et c' des angles droits.

On a

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{aa'}{a^2} = \frac{bb'}{b^2} = \frac{cc'}{c^2} = \frac{bb' + cc'}{b^2 + c^2};$$

or

$$a^2 = b^2 + c^2;$$

donc

$$\text{(II)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad aa' = bb' + cc'.$$

3. **Théorème III.** Dans deux triangles rectangles semblables, le produit des inverses des perpendiculaires d, d' abaissées des sommets des angles droits sur les hypoténuses, est égal à la somme des produits des inverses des côtés homologues b et b', c et c' des côtés des angles droits.

Puisque

$$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d}$$

il vient

$$\frac{b'c'}{bc} = \frac{c'd'}{cd} = \frac{b'd'}{bd},$$

et, par suite,

$$\frac{bb'.cc'}{b^2c^2} = \frac{cc'.dd'}{c^2d^2} = \frac{bb'.dd'}{b^2d^2} = \frac{cc'.dd' + bb'.dd'}{c^2d^2 + b^2d^2};$$

or

$$b^2c^2 = c^2d^2 + b^2d^2;$$

donc

$$bb'.cc' = cc'.dd' + bb'.dd';$$

divisant par $bb'.cc'.dd'$, on obtient

$$\frac{1}{dd'} = \frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'}.$$

4. **Théorème IV.** Lorsque deux polygones semblables sont terminés par les côtés homologues a et a', b et b', c et c',..., comprenant les angles A, B,...; dans toute relation entre a, b, c,... et les angles A, B,..., on peut remplacer les côtés a, b, c,... respectivement par les moyennes géométriques $\sqrt{aa'}$, $\sqrt{bb'}$, $\sqrt{cc'}$,... entre a et a', b et b', c et c',...

Ainsi, puisque dans le triangle

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

dans deux triangles semblables on a

(IV) . . . $aa' = bb' + cc' - 2\sqrt{bb'} \cdot \sqrt{cc'} \cdot \cos A$.

En effet, de ce que

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

il vient

$$\frac{aa'}{a^2} = \frac{bb'}{b^2} = \frac{cc'}{c^2} = \frac{2\sqrt{bb'} \cdot \sqrt{cc'} \cdot \cos A}{2bc \cos A};$$

d'où on tire

$$\frac{aa'}{a^2} = \frac{bb' + cc' - 2\sqrt{bb'} \cdot \sqrt{cc'} \cdot \cos A}{b^2 + c^2 - 2bc \cos A};$$

les dénominateurs étant égaux, il en sera de même des numérateurs.

5. **Remarque.** Le premier théorème établit une relation entre la tangente, la normale et la coordonnée correspondante d'une courbe, dans le cas d'axes quelconques. Ainsi on a

$$\frac{1}{T_x^2} + \frac{1}{N_x^2} = \frac{1}{y^2 \sin^2 \theta}, \quad \frac{1}{T_y^2} + \frac{1}{N_y^2} = \frac{1}{x^2 \sin^2 \theta},$$

θ représentant l'angle des axes.

Le troisième théorème exprime une relation entre les deux tangentes, les deux normales et les deux coordonnées du point de contact, dans le cas de coordonnées rectangulaires, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{T_x N_y} + \frac{1}{T_y N_x} = \frac{1}{xy}.$$

XV.

Généralisation d'un théorème d'Euler sur le cercle et son extension à l'ellipse.

Par

Monsieur *Georges Dostor*,
Docteur ès sciences,
Professeur de mathématiques à Paris.

Théorème. Sur l'un des axes de l'ellipse

(1) . . . . $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$,

sur l'axe $AA' = 2a$, par exemple, comme base, on construit un rectangle $AA'C'C$, dont la hauteur AC soit égale au produit de l'autre demi-axe $OB = b$ par $\sqrt{2}$; on joint un point quelconque $M(x', y')$ de la courbe aux deux sommets extérieurs C, C' du rectangle par les droites MC, MC', qui coupent l'axe AA' en D et D'. Quel que soit le point M de l'ellipse, on a toujours

$$AD'^2 + A'D^2 = 4a^2 = AA'^2.$$

Pour suivre la méthode qui nous a conduit à ce résultat, soit h la hauteur indéterminée de notre rectangle. Les sommets C, C' ont même ordonnée h et pour abscisses respectives $+a$ et $-a$; par conséquent les équations des deux droites MC, MC' sont

$$y - y' = \frac{y' - h}{x' - a}(x - x'),\quad y - y' = \frac{y' - h}{x' + a}(x - x');$$

si nous y posons $y = 0$, nous trouverons que ces droites coupent l'axe des x, c'est-à-dire la droite AA', en deux points D, D' dont les abscisses sont

$$OD = \frac{ay' - hx'}{y' - h}, \quad OD' = -\frac{ay' + hx'}{y' - h};$$

de sorte que les distances AD', $A'D$ seront

$$AD' = AO - OD' = a + \frac{ay' + hx'}{y' - h} = \frac{2ay' - h(a - x')}{y' - h},$$

$$A'D = A'O - OD = -a - \frac{ay' - hx'}{y' - h} = -\frac{2ay' - h(a + x')}{y' - h}.$$

Nous trouvons ainsi pour les carrés de ces longueurs

$$AD'^2 = \frac{(4a^2y'^2 + h^2x'^2 + a^2h^2 - 4a^2hy') + 4ahx'(y' - h)}{(y' - h)^2},$$

$$A'D^2 = \frac{(4a^2y'^2 + h^2x'^2 + a^2h^2 - 4a^2hy') - 4ahx'(y' - h)}{(y' - h)^2}.$$

Les numérateurs de ces deux fractions ont une partie commune; les deux autres parties sont égales et de signes contraires. Pour que la somme des deux carrés soit égale à $4a^2$, il faut et il suffit que

$$\frac{4a^2y'^2 + h^2x'^2 + a^2h^2 - 4a^2hy'}{(y' - h)^2} = 2a^2$$

ou

$$4a^2y'^2 + h^2x'^2 + a^2h^2 - 4a^2hy' = 2a^2y'^2 - 4a^2hy' + 2a^2h^2.$$

Cette équation de condition revient à

$$2a^2y'^2 + h^2x'^2 - a^2h^2 = 0.$$

Or le point (x', y') étant situé sur l'ellipse (1), on a

$$2a^2y'^2 + 2b^2x'^2 - 2a^2b^2 = 0;$$

par conséquent, il vient

$$h^2(x'^2 - a^2) = 2b^2(x'^2 - a^2),$$

d'où

$$h^2 = 2b^2, \; h = b\sqrt{2},$$

ce qu'il fallait prouver.

En posant $a = b$, on a le théorème d'Euler généralisé.

Corollaire. Puisque

$$AD'^2 = AD'(AA' - A'D'), \quad A'D^2 = A'D(AA' - AD),$$

il vient, en ajoutant,

$$AA'^2 = AD'(AA' - A'D') + A'D(AA' - AD)$$

ou

$$AD.A'D + AD'.A'D' = AA'(AD' + A'D - AA');$$

mais

$$AD' + A'D - AA' = DD';$$

donc

$$AD.A'D + AD'.A'D' = AA'.DD',$$

c'est-à-dire que

Les deux points D, D' divisent, chacun, l'axe AA' en deux segments tels, que la somme de leurs produits est égale au produit de l'axe par la distance de ces deux points.

Voyez cet Archiv der Mathematik und Physik, T. XXVII, p. 116; T. XXX, p. 120; T. XXXI, p. 61.

Bemerkung des Herausgebers.

Den vorstehenden Satz für den Kreis bezeichnet Euler in der Abhandlung: Variae Demonstrationes geometricae. Novi Commentarii Acad. Scientiar. Imp. Petrop. T. I., p. 49. ausdrücklich als

Fermat's Lehrsatz

und sagt von demselben: „Reperitur in commercio epistolico Fermatii propositio geometrica, quam Geometris demonstrandam proposuit. Quae etsi ad naturam circuli spectat, nihilque difficultatis primo intuitu involvere videtur, tamen a pluribus Geometris frustra est suscepta, neque usque adhuc eius demonstratio est tradita.“ Hiernach wird also der genannte Satz richtig als Fermat's Lehrsatz zu bezeichnen sein.

Ich bemerke noch, dass der hier behandelte Gegenstand schon früher (1858) im Archiv (Thl. XXXI., Nr. X., S. 61.) eine Behandlung von Herrn Director A. Krüger in Fraustadt gefunden hat. Dessenungeachtet habe ich den vorstehenden Aufsatz des Herrn Dostor, der unzweifelhaft ganz selbstständig, von jeder früheren Arbeit völlig unabhängig, zu den darin enthaltenen Sätzen gekommen ist, hier im Archiv abdrucken lassen, theils um diese

bemerkenswerthen Sätze wieder in Erinnerung zu bringen, dann aber auch, weil die Verschiedenheit der Behandlung immerhin von Interesse und lehrreich sein kann. Herrn Dostor bitte ich recht sehr, um recht häufige Fortsetzung seiner Mittheilungen für diese Zeitschrift. Bloss absolut Neues mitzutheilen ist nicht Zweck des Archivs, auch weniger Bekanntes soll dasselbe geben, wenn nur die Methode der Behandlung sich empfiehlt, in welcher Beziehung freilich die Meinungen öfters getheilt sein können. G.

XVI.

Propriétés du triangle sphérique rectangle.

Par

Monsieur *Georges Dostor*,
Docteur ès sciences,
Professeur de mathématiques à Paris.

---

1. **Théorème I.** Dans tout triangle sphérique rectangle ABC, le carré de la tangente de l'hypoténuse, $BC=a$, égale la somme des carrés des tangentes des deux autres côtés $AC=b$, $AB=c$, augmentée du produit des carrés des deux mêmes tangentes.

En effet la relation $\cos a = \cos b \cos c$ peut s'écrire

$$\frac{1}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 b} \times \frac{1}{\cos^2 c},$$

ou

$$\frac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{\cos^2 b + \sin^2 b}{\cos^2 b} \times \frac{\cos^2 c + \sin^2 c}{\cos^2 c};$$

et, comme celle-ci revient à

$$1 + \tang^2 a = (1 + \tang^2 b)(1 + \tang^2 c)$$

on trouve de suite, en effectuant,

$$\text{(I)} \quad \operatorname{tang}^2 a = \operatorname{tang}^2 b + \operatorname{tang}^2 c + \operatorname{tang}^2 b \operatorname{tang}^2 c.$$

2. **Théorème II.** Dans tout triangle sphérique rectangle si du sommet A de l'angle droit on abaisse, sur l'hypoténuse $BC = a$, l'arc perpendiculaire $AD = d$, qui y détermine les deux segments $CD = b'$, $DB = c'$;

1°. la tangente de chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionelle entre la tangente de l'hypoténuse et celle du segment adjacent;

2°. le sinus de l'arc perpendiculaire est moyen proportionnel entre les tangentes des deux segments de l'hypoténuse.

1°. Les deux triangles rectangles ABC, ACD donnent

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C, \\ \operatorname{tang} b' = \operatorname{tang} b \cos C; \end{cases}$$

d'où on tire, en multipliant en croix,

$$\text{(II)} \quad \operatorname{tang}^2 b = \operatorname{tang} a \times \operatorname{tang} b',$$

et de même

$$\operatorname{tang}^2 c = \operatorname{tang} a \times \operatorname{tang} c'. \text{ *)}$$

2°. Nous avons ensuite par les deux triangles rectangles ACD, ABD,

$$\operatorname{tang} d = \sin b' \operatorname{tang} C,$$

$$\operatorname{tang} d = \sin c' \operatorname{tang} B,$$

par suite

$$\operatorname{tang}^2 d = \frac{\sin b' \sin c'}{\cot B \cot C} = \frac{\sin b' \sin c'}{\cos a};$$

mais comme

$$\cos a = \cos b \cos c = \cos b' \cos d . \cos c' \cos d,$$

il vient, en substituant,

$$\frac{\sin^2 d}{\cos^2 d} = \frac{\sin b' \sin c'}{\cos b' \cos c' . \cos^2 d};$$

---

*) Le premier théorème se trouve demontré, avec un peu trop de longueur, par M. Jos. Eilles dans le T. 44, page 140 de ce Journal, et la première partie du second théorème est donné dans la Sphérique de Schulz, T. II, p. 114. G. D.

d'où

$$\text{(III)} \quad \sin^2 d = \operatorname{tang} b' \operatorname{tang} c'.$$

3. **Corollaire.** Les deux égalités (I) donnent

$$\operatorname{tang} b' = \operatorname{tang} a \cos^2 C,$$

par suite

$$\operatorname{tang} c' = \operatorname{tang} a \cos^2 B;$$

d'où on tire, en multipliant et en divisant,

$$\text{(IV)} \quad \sin d = \operatorname{tang} a \cos B \cos C,$$

$$\text{(V)} \quad \frac{\operatorname{tang} b'}{\operatorname{tang} c'} = \frac{\cos^2 C}{\cos^2 B}.$$

Ainsi 1° le sinus de l'arc perpendiculaire abaissé du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est égal a la tangente de l'hypoténuse, multipliée par le produit des cosinus des angles adjacents;

2° les tangentes des deux segments de l'hypoténuse sont proportionnelles aux carrés des cosinus des angles adjacents.

XVII.

Ueber das Zurückbleiben der Alten in den Naturwissenschaften.

Rectorsrede

gehalten von

Carl von Littrow.

(Zweiter Abdruck.)

Es macht dem Unterzeichneten ganz besondere Freude und derselbe erkennt es mit besonderem Danke, dass ihm gütigst erlaubt worden ist, diese treffliche, überaus lehrreiche, namentlich in historisch-naturwissenschaftlicher vorzüglich astronomischer Rücksicht sehr interessante Rede in dem Archiv abdrucken und dessen Lesern mittheilen — auf diese Weise überhaupt in dem Archive aufbehalten — zu dürfen. Möchten doch alle Jünger der Wissenschaft, besonders auch alle die, welche zu Lehrern der mathematischen und naturwissenschaftlichen Disciplinen sich ausbilden wollen, die dem Unterzeichneten — nach sehr bald funfzigjähriger Erfahrung im Lehrfache — wie aus dem Herzen geschriebenen Schlussworte dieser schönen Rede sich recht zu Herzen nehmen! G.

Ich bin der hoffentlich nicht irrigen Meinung, dass die Feierlichkeit, mit welcher bei uns der Rector in sein Amt eingesetzt wird, hauptsächlich den Studirenden gilt. Nur so kann ich mir den Gebrauch erklären, dass dem neu Installirten einerseits die unerquickliche Aufgabe wird, seine eigene Biographie anzuhören; dass ihm andererseits ein Vortrag obliegt, der keinen andern Zweck haben kann, als den Standpunkt zu kennzeichnen, welchen er in Wissenschaft und Lehre einnimmt. Die Collegen, welche ihn gewählt, müssen selbst am Besten wissen, woran sie mit ihm sind, während die Studirenden, namentlich bei gewissen, durch

den Rector zu vertretenden Doctrinen, wie z. B. bei der meinen, zu solcher Kenntniss des Neugewählten oft nur spärliche Gelegenheit haben. Demnach richte ich meine heutigen Worte vor Allen an Sie, meine jungen Freunde.

Derjenige Theil des Alterthums, dem der Beiname des „classischen“ von jeher willig und unbestritten zugestanden wurde, verdankt dieses ehrenvolle Epithet bekanntlich seiner Meisterschaft in der Behandlung der Form. Wenn wir unsere Vorfahren auf dem Felde der Cultur in dieser Beziehung als unerreichte Muster betrachten müssen, so können wir hingegen behaupten, in der Erforschung und Dienstbarmachung des Stoffes einen eben so grossen, wenn nicht grösseren Vorsprung über das Alterthum gewonnen zu haben. Es ist eben der zum Vortheile der Menschheit nie ganz erlöschende Streit zwischen Realismus und Idealismus, dem wir auch hier begegnen. Dass und warum wir beinahe auf allen Gebieten der Kunst, das Wort in seiner weitesten Bedeutung genommen, im Ganzen als klägliche Epigonen gelten, ist, glaube ich, weit allgemeiner anerkannt, als wir uns des Grundes unserer Ueberlegenheit in exacten Disciplinen bewusst sind. Schiller, der ohne philosophische Tiefe der Dichterfürst nicht gewesen wäre, der er war, findet den Realisten durch „nüchternen Beobachtungs-“, den Idealisten durch „unruhigen Speculationsgeist“ charakterisirt. „Massen wir uns an“, sagt er, „mit unserer blossen Vernunft Etwas über das äussere Dasein der Dinge ausmachen zu wollen, so treiben wir ein leeres Spiel.“ So sehr uns diese Ansichten sofort einleuchten, so müssen wir doch bei näherer Ueberlegung bedenken, dass damit dem idealistischen Alterthume nicht bloss Speculationsgeist in einseitigem Uebermasse zugeschrieben, sondern offenbar auch die Gabe correcter Beobachtung abgesprochen wird. Die volle Richtigkeit jenes unmittelbaren wie dieses abgeleiteten Sinnes von Schillers Worten lässt sich auf astronomischem Boden vielleicht klarer darlegen als in irgend einem anderen Fache.

Alle Welt weiss von dem schönen Himmel der Stätten früherer Civilisation: Italiens, Griechenlands, Spaniens und vollends Egyptens und Arabiens. Die Reinheit der Luft, deren sich diese Länder von jeher erfreuten, geht schon aus der Wichtigkeit hervor, welche die Alten der Kenntniss von den Auf- und Untergängen gewisser Gestirne beilegten. In unseren Gegenden hätte die Sternkunde solche Richtung schon deshalb nicht nehmen können, weil wir die Gestirne äusserst selten auch nur nahe am, geschweige denn im Horizonte sehen, der Dünste wegen, die bei uns fast beständig den Gesichtskreis umlagern. Aus demselben

Grunde hätten wir uns ohne das Fernrohr von den Bewegungen des in unseren Breiten so schwer sichtbaren Planeten Mercur nie die verhältnissmässig genaue Kunde verschafft, die zu sammeln den Alten gelang. Wir Mitteleuropäer dürften überhaupt, was die häufige Trübung unseres Himmels betrifft, den Kimmeriern der Alten, am Asow'schen Meere, leicht den Rang streitig machen. Man sollte also denken, was jene Vorfahren uns vom gestirnten Himmel überlieferten, müsse grösstentheils für uns Unsichtbares enthalten, weit reichhaltiger sein als was etwa der Art durch uns später zu Stande kam. Wir müssen da um so mehr uns kaum Erreichbarem entgegensehen, als die heutige Eintheilung des nördlichen Himmels in Sternbilder der Hauptsache nach schon vor wenigstens zweitausend Jahren vorhanden war, also schon damals, wie wohl von vornherein anzunehmen, das Firmament einen Gegenstand aufmerksamer Betrachtung bildete, als ferner bereits Hipparch, etwa 130 Jahre vor Christus, an die Entwerfung eines vollständigen Verzeichnisses sämmtlicher Fixsterne ging und Claudius Ptolemäus dritthalb Jahrhunderte später die Arbeit von Neuem vornahm. Nun führt der Almagest, wie das astronomische Lehrgebäude des Ptolemäus von den Arabern, die es uns erhielten, genannt wird, im Ganzen 1028 Sterne auf und wenn wir auch nach einer Bemerkung von Plinius d. Aelt., der von 1600 beobachteten Sternen spricht, mit geringer Wahrscheinlichkeit annehmen wollten, dass uns im Almagest nicht die vollständigen Arbeiten von Hipparch und Ptolemäus bewahrt seien, so bleibt doch auch die zweite Zahl weit unter unserer Erwartung; denn Argelander hat in Bonn 3256 mit freiem Auge sichtbare Gestirne auf seine Karten gebracht, und Heis, ein freilich abnormes Auge, das die Sterne ohne Strahlen als Punkte sieht, in Münster diese Zahl noch um etwa 2000 vermehrt. Die Alten verzeichneten also im besten Falle und ganz abgesehen von den nicht weniger als zwanzig Graden, um die etwa Alexandrien mehr von der Himmelssphäre wahrnimmt als Deutschland, kaum die Hälfte der Sterne, die sie sehen konnten! Noch deutlicher wird die Mangelhaftigkeit ihrer Beobachtung daraus ersichtlich, dass sie z. B. 474 Sterne vierter, hingegen nur 271 fünfter, endlich gar blos 49 sechster Grösse aufführen, während bekanntlich die Anzahl der Sterne nach Grössenclassen so rasch steigt, dass jede Classe immer weit mehr Sterne enthält als alle vorhergehenden Classen zusammen genommen. Mit freiem Auge in unsern Breiten sichtbare Nebelflecke und Sternhaufen führt Argelander neunzehn auf, während Hipparch deren nur zwei, Ptolemäus fünf erwähnt, und beide selbst so auffallende Gegenstände wie die Nebel im Orion und in der Andromeda übergehen. Und

solche lückenhafte Kenntniss des vor Jedermann offen daliegenden Himmels erhielt sich bis lang nach Erfindung des Fernrohrs, über anderthalb Jahrtausende! Von allen Astrognosten des Alterthums macht nur der Perser Abdalrahman-Al-Sûfi im zehnten Jahrhunderte eine rühmliche Ausnahme, ohne aber bei Zeitgenossen und Nachfolgern mit seinem Streben nach Ergänzungen irgend Nacheiferung zu wecken.

Aehnliches wäre vom südlichen Himmel zu sagen. Es fehlte den Alten, namentlich aber den Arabern gewiss nicht an Gelegenheit, auch dessen Sternbilder wenigstens grossentheils kennen zu lernen, und doch verzeichnet der Almagest nur eben einige der allergrössten Sterne der antarktischen Hemisphäre. Seit Bartholomäus Diaz trat für die Europäer das Bedürfniss ein, auf Seefahrten ihre Ortsbestimmungen an südliche Constellationen zu knüpfen, und doch wird erst durch Theodor von Emden zu Anfang des siebzehnten Jahrhunderts eine regelmässige Eintheilung in Sternbilder auch jener Gegenden des Himmels eingeführt, während es Sir John Herschel vorbehalten blieb, erst in der neuesten Zeit eine Menge bis dahin schwankender Begriffe über die südlichen Gestirne festzustellen.

Solches Zurückbleiben im Erforschen eines Gegenstandes, für den die Alten gewiss wenigstens ebenso lebhaftes Interesse wie wir besassen, einfach aus eitel Oberflächlichkeit zu erklären, geht einer Vorzeit gegenüber nicht an, die durch Beharrlichkeit und sorgfältige Ausführung in andern Beziehungen unsere volle Bewunderung in Anspruch nimmt. Dass es vielmehr nur ihren Sinnen an der Schule für solche Thätigkeit gebrach, dass sie als Naturforscher zu sehen noch nicht gelernt hatten, so feinfühlig sie auch als Künstler waren, wird uns die Geschichte der Erkenntniss einzelner himmlischer Objecte besser lehren als die eben gegebene Uebersicht des ganzen Firmamentes.

Die auch dem Nichtastronomen wohlbekannte, im Herbste unseren östlichen Abendhimmel schmückende Sterngruppe der Gluckhenne oder der Plejaden ist ein gutes Beispiel, um zu zeigen, dass es beim Wahrnehmen von Sternen nicht blos auf reinen Himmel und gute Augen ankomme. In dem um das Jahr 270 vor Christus geschriebenen Lehrgedichte des Aratus, das uns die ersten sichern Nachrichten von der Himmelskunde der Griechen bringt, heisst es, dass man die Plejaden ἑπτάποροι „die in sieben Bahnen wandelnden“ nenne, ob man gleich nur sechs Sterne sehe. Nahe dreihundert Jahre später sagt Ovid:

„Quae septem dici, sex tamen esse solent“

während Hipparch in seiner Kritik des Aratus, etwa 150 Jahre vor Ovid, ausdrücklich bemerkt, dass man in heitern Nächten ohne Mondschein wirklich sieben Sterne ausnehme. Nun lebte Aratus in Macedonien, Ovid schrieb seinen Festkalender wahrscheinlich in Rom und feilte denselben in seiner Verbannung an den südlichen Küsten des Schwarzen Meeres aus; beide hatten also sehr schönen Himmel über sich. Darin, dass Hipparch noch einige Breitengrade südlicher, zu Rhodus arbeitete, kann der Grund seiner vollständigeren Wahrnehmung nicht gesucht werden, immerhin aber ist diese Verschiedenheit der Auffassung um so überraschender, als sie eines derjenigen Gestirne betrifft, welche nach der Nautik der Alten für die Schiffer damals von grosser Wichtigkeit waren und von ihnen stets beobachtet wurden. In der That entging den damaligen Sternkundigen jener Umstand nicht, aber sie suchten Jahrhunderte lang den siebenten Stern umsonst und kamen endlich auf allerhand sonderbare Erklärungen seines vermeintlichen Verschwindens, wovon eine besonders merkwürdig ist. Sie meinten nämlich u. A., jener siebente Stern habe sich zum mittleren Sterne im Schweife des Grossen Bären, den die Araber Mizar nennen, geschlichen und sei das jetzt unter dem Namen des Reiterleins allgemein bekannte dem Mizar nahestehende Sternchen. Die Scholien zu Homer hängen noch dieser Idee vom Verschwinden des siebenten Sternes an. Im 13. Jahrhunderte erst stossen wir bei dem Perser Kazwini, der die Nachricht wahrscheinlich von Sûfi hat, auf eine richtige Beschreibung der Plejaden: „es sind sechs Sterne, zwischen denen eine Menge dunkler (d. h. lichtschwacher) stehen“, sagt er, ohne aber damit bei spätern Sternkundigen irgend Beachtung zu finden. Ebenso verhallt selbst die Beobachtung eines Mannes wie Maestlin, Keplers Lehrer, der vierzehn Sterne der Gluckhenne unterschied. Das Fernrohr musste erfunden werden, bis Sir Christopher Heyden als Probe des neuen Instrumentes im Jahre 1610 schreiben konnte: „ich sehe in meinem Perspicille elf Sterne in den Plejaden, während kein Zeitalter deren mehr als sieben kennt.“ — Und heute? Nun Personen, die mit freiem Auge an unserem nordischen Himmel dieselben elf Sterne wahrnehmen, gehören nichts weniger als zu den Seltenheiten, ja mir sind, nicht etwa Astronomen von Profession, sondern Laien bekannt, die vierzehn bis sechzehn Sterne in und bei der Gluckhenne erkennen. Aber — wir sind Abkömmlinge von Generationen, die von Jugend auf gelehrt wurden, ihre Organe zu äusserster Aufmerksamkeit zu spannen, sich auch des leisesten Sinneneindruckes

bewusst zu werden; unsere Augen sind geschult und werden in jenem besondern Falle der Plejaden von den hellern Sternen weniger geblendet als auf die Nachtbargestirne geleitet, wie denn in der That mehr als die Hälfte jener sechzehn Sterne weit unter der Grösse steht, die man gewöhnlich als Grenze der Sehkraft des unbewaffneten Auges annimmt; — wir haben beobachten, wir haben die günstigsten Umstände wählen, eigentlich heitern Himmel unterscheiden gelernt, wir wissen, dass wir kleine Sterne neben hellen im Zwielichte weit eher ausnehmen als in tiefer Nacht, da der Glanz der grössern Sterne jene verdunkelt. Hipparch hat Unrecht, wenn er den Mondschein als in dieser Hinsicht geradezu hindernd ansieht: scharfe Augen haben in meiner Gegenwart bei hell strahlendem Vollmonde bis fünfzehn Sterne in den Plejaden gezählt.

Es knüpft sich übrigens an dieses lehrreiche Beispiel noch eine andere nicht uninteressante Bemerkung. Dass man in dem Reiterlein, dem Alcor der Araber, den angeblich verschwundenen siebenten Stern der Plejaden vermuthete, zeigt nämlich weiter, dass Alcor, obschon ein Stern fünfter Grösse und mit Leichtigkeit auszunehmen, von den früheren Astrognosten nicht aufgeführt war, da er sonst um den Anfang unserer Zeitrechnung nicht als neues Gestirn hätte gelten können, das man gleichsam erst zu registriren hatte. Und wirklich nennen die arabischen Astronomen diesen Stern tausend Jahre später „den Vergessenen“ offenbar, weil früher dessen nicht erwähnt wurde.

Ein ähnliches Beispiel bietet der Stern α im Steinbocke, den die Menschheit auch einige Jahrtausende beschauen musste, bis sie bemerkte, was jedes Kind, darauf aufmerksam gemacht, sieht, nämlich dass hier zwei Sterne (der eine dritter, der andere vierter Grösse) so nahe bei einander stehen, dass sie einem allerdings flüchtigen Blicke in einen Stern verschwimmen. Wieder erst bei den Arabern finden wir dieses Umstandes gedacht. Aber auch das genügte wieder nicht, um jene Beschaffenheit von α Capricorni allgemein bekannt zu machen: Ulugh Beigh im 15. Jahrhunderte, so wie Tycho Brahe zu Anfang des 17. Jahrhunderts nehmen bei ihren berühmten Sternkatalogen keine Notiz davon und erst ein Säculum später führt Hevel in seinem Verzeichnisse den Nebenstern förmlich auf, wie denn allerdings diesem Astronomen, der bereits über das Fernrohr verfügte, jene Duplicität nicht mehr entgehen konnte.

Wie auch in anderen Fällen die idealistische Gedankenrichtung der Alten, die zuletzt in peripatetischen Anschauungen

gipfelte, bis beinahe in unsere Tage von einfacher aber richtiger Auffassung der Sinnenwelt ablenkte, mögen noch ein paar von den unzähligen Beispielen, die sich hier anführen liessen, zeigen.

Die erstaunlichen Fortschritte in beobachtender Astronomie während der beiden letzten Jahrhunderte beruhen grossentheils auf dem glücklichen Zufalle, der unserer Hemisphäre einen hellen Polarstern zur Verfügung stellte. Eine Menge von Untersuchungen lässt sich nur an solchen dem Pole nahen Sternen und selbstverständlich um so leichter auch mit kleinern Instrumenten ausführen, je grösser der betreffende Stern ist. Die Wichtigkeit dieses Gestirnes drängte sich auch den Alten auf, namentlich für die Prüfung des Kompasses. Dessenungeachtet war selbst Columbus mit sich noch nicht im Reinen darüber, ob der Stern genau im, oder nur nahe am Nordpole stehe, wobei wohl zu beachten, dass zu seiner Zeit der Abstand des Polaris vom Pole über drei Grade, d. h. beiläufig sechs Vollmondbreiten betrug, also auch seinen Beobachtungsmitteln durchaus nicht entgehen konnte. „Es scheint", sagt er sehr vorsichtig, „dass der Polarstern sich wie die andern Sterne (um den Pol) bewege."

Muss es ferner nicht unser Erstaunen erregen, dass die Menschen Jahrtausende lang an dem so häufigen und namentlich in südlicheren Breiten so auffälligen Zodiakallichte vorübergegangen sind, ohne es der Erwähnung werth zu finden, oder besser für jenes Zeitalter der Chroniken: ohne es zu sehen, bis Childrey um die Mitte des 17. Jahrhunderts es — entdeckte, wenn man da noch von Entdeckungen sprechen kann? Auch darüber dürfen wir uns billig wundern, dass die älteste genauere Erwähnung der merkwürdigen, mit freiem Auge sehr wohl sichtbaren Erscheinungen an total verfinsterter Sonne erst vom Jahre 1706, somit aus einer Zeit datirt, da das Fernrohr bereits seit 100 Jahren erfunden war.

Es fehlte den Alten also in der That selbst an der primitivsten Beobachtungsgabe. Das klare Bewusstwerden und treue Wiedergeben dessen, was uns die Sinne zeigen, ist ein Vorrecht unserer Tage. — Und der unruhige Speculationsgeist, dessen Schiller die Alten zeiht?

Lassen sie mich auch da Gedanken, zu denen wir Alle vielleicht schon oft veranlasst waren, durch ein astronomisches Beispiel frisch in's Gedächtniss rufen. Plutarch's Dialog „über das in der Mondscheibe erscheinende Gesicht" galt stets für den Inbegriff alles dessen, was man bis zu jener Zeit über unsern

Satelliten gedacht und erdacht hatte. Stimmt uns Kinder der Neuzeit nicht schon das Thema zur Heiterkeit? Das Gesicht des Mondes! Heute weckt es nur die satyrische Ader bei Dichtern und Künstlern: damals bildete es den Ausgangspunkt tiefsinniger Betrachtungen, die man ausgezeichneten Philosophen und Mathematikern jener Zeit in den Mund legen durfte. Da wird zuerst allen Ernstes die Ungereimtheit der Behauptung nachgewiesen, dass die im Monde sich zeigende Gestalt weiter nichts als eine zufällige Eigenschaft des Gesichtssinnes sei, der seiner Schwäche wegen dem Glanze weichen müsse. Folgt die weitläufige Widerlegung einer andern Ansicht, das Gesicht des Mondes sei eine Spiegelung unseres Weltmeeres, was unter Anderm deshalb nicht sein könne, weil es nur ein einziges Weltmeer gebe, während, wenn das Gesicht des Mondes ein Bild unseres Oceans wäre, dieser aus mehreren, durch Erdengen und Festlande von einander getrennten Theilen bestehen müsste! Kommt eine dritte ebenfalls bekämpfte Meinung an die Reihe, der Mond sei eine Mischung aus der gesammten Luft und einem sanften Feuer und wie zuweilen bei völliger Windstille die Oberfläche der Gewässer sich kräuselt (was eben noch zu beweisen wäre), so nehme auch die Luft manchmal eine schwärzliche Farbe an und daraus erkläre sich die einem Gesichte ähnliche Erscheinung. Weiter wird die Hypothese der Stoiker, der Mond sei eine Feuerkugel, auf deren Oberfläche die Luft liege, aus dem Grunde zurückgewiesen, weil der Mond dann einer Materie bedürfte, auf der er ruhte und aus der er Nahrung für das Feuer nähme. Die Erde werde, hören wir bei dieser Gelegenheit, nach Pindar ringsherum von diamantfüssigen Pfeilern gehalten, während sie, nach den Stoikern, keine Stütze nöthig habe, da sie sich in dem Mittelpunkte des Weltalls, nach welchem alle Dinge neigen, ohnedies befinde. Die letztere Meinung wird nicht zugegeben, weil die Erde, die doch so grosse Tiefen und Höhen auf ihrer Oberfläche hat, dann kugelförmig gedacht werden müsste und es folglich Antipoden gäbe, die sich wie Eidechsen an die Erde klammern. Zum Hauptthema zurückkehrend, hebt der eine Theilnehmer an diesen Gesprächen hervor, dass wenn man auch annehmen wollte, schwere erdartige Körper vermöchten sich nicht am Himmel zu bewegen, daraus noch nicht folge, dass der Mond keine Erde sei, sondern nur, dass er sich an einem Orte befinde, wo er seiner Natur nach nicht hingehört. Der Mensch z. B. habe auch die schweren erdartigen Theile oben am Kopfe, die warmen und feuerartigen tiefer; von den Zähnen seien einige auf-, andere unterwärts eingesetzt, aber weder diese noch jene verhielten sich der Natur zuwider. Der Mond, der zwischen der Sonne und der Erde, wie die Leber oder

ein anderes zartes Eingeweide zwischen dem Herzen und dem Magen stehe, schicke die Wärme aus den oberen Regionen zu uns herab und vertheile dagegen die von hier aufsteigenden Dünste, nachdem er sie durch Kochen gereinigt und verdünnt hat, um sich herum. Der Mond als Erde sei ein prachtvoller Körper, als Stern mache er diesem Namen Schande; denn unter allen den unzähligen Himmelskörpern sei er — ich citire wörtlich — der einzige, der fremden Lichtes bedarf! — Beim Untergange der Sonne werde diese unserem Blicke durch die Erde, bei einer Sonnenfinsterniss hingegen durch den Mond entzogen. Daher komme es, dass die Erde ihrer Grösse wegen, die Sonne ganz und so lang als eben die Nacht dauert, bedecke, während der Mond die Sonne zuweilen wohl ganz aber nur auf kurze Zeit verberge. Der Mond sei also ein Körper wie unsere Erde, und da er nichts Schlammiges in sich fasse, im Gegentheile des reinsten Himmelslichtes geniesse, nicht mit wüthendem, sondern mit lieblichem Feuer erfüllt sei, so müsse er die reizendsten Gefilde, Flammen gleich leuchtende Berge, purpurne Gürtel und viel Gold und Silber enthalten und daher rühre — das Gesicht auf seiner Scheibe. Dem Einwurfe, dass die Flecken auf dem Monde zu gross seien, um so erklärt zu werden, begegnet man mit dem merkwürdigen Satze, dass nur die Entfernung des Lichtes vom schattenwerfenden Körper, nicht aber die Grösse des letztern die Schatten gross mache, und wenn der Berg Athos einen siebenhundert Stadien langen Schatten werfe, dies nicht von dessen Höhe, sondern von der grossen Entfernung der Sonne rühre. Damit nimmt die Discussion eine Wendung zur Frage der Bewohnbarkeit des Mondes und der Schicksale unserer Seele nach dem Tode, aus der ich schliesslich nur noch die erfreuliche Kunde beibringen will, dass die Frommen und Tugendhaften auf den Mond kommen und aus dem Aether, in dem sie schweben, eine Spannung und Stärke bekommen, für die schon der geringste Duft als Nahrung hinreicht. —

So karg diese Auszüge aus dem ziemlich dickleibigen Tractate auch sind, so mögen sie doch als Pröbchen griechischer Astronomie und Physik hinreichen. Wo ist da ein irgend ruhiges Auffassen der Thatsachen, ein richtiges Erkennen auch nur der elementarsten Begriffe? Aprioristisch voreingenommen hat man über die Ursachen der Erscheinungen längst entschieden, bevor man auch nur ernstlich an sie herangetreten.

Also nicht allein darauf was, sondern auch, und beinahe noch mehr darauf wie wir sehen, kommt es an, darauf, dass wir das Gesehene zu beurtheilen, dass wir vor Allem das Bedeutende

als solches zu erkennen wissen. War schon, wie wir an obigen Beispielen sahen, das naive Sehen auf wissenschaftlichem Gebiete nicht die starke Seite der Alten, so konnten sie sich auf diesem Felde noch viel weniger des reflectirenden Sehens rühmen. Im Gegensatze zu einem weitverbreiteten geflügelten Worte lässt sich weniger poetisch aber um so richtiger sagen, die Einfalt kindlichen Gemüthes bleibe an Unbedeutendem hängen und gehe an wirklich Wichtigem in der Regel vorüber. Die Sinne liefern zwar ursprünglich das Material, den bewussten oder mittelbaren Grundbau auch zu den hehrsten Gedankensystemen, können aber in ihrer weitern Entwicklung dem Einflusse der Bildung, die sie erzeugten, sich nicht entziehen. Waren sie ursprünglich unsere Lehrer, so werden sie nun vielfach zu Schülern. Sichten und Sehen sind unzertrennliche Begriffe: Sehen ohne Sichten ist beinahe ebensowenig denkbar, wie Sichten ohne Sehen. Wir bedürfen des Verstandes zum Sehen fast mehr als scharfer Augen, wie wir zum Gehen rüstige Beine eher missen können als eine gesunde Lunge. Das geschulte, wenn auch geschwächte Auge nimmt mehr schwierig Wahrnehmbares aus, als das wohlerhaltene aber ungeübte Organ. Vom Mikroskope und vom Fernrohre gilt in dieser Beziehung Aehnliches wie vom unbewaffneten Auge: der heutige Naturforscher sähe auch mit den unvollkommenen Werkzeugen seiner Vorgänger weit mehr als diese. Wer hat nicht die Abhängigkeit der Sinne vom Verstande hundertfältig dadurch erfahren, dass wenn er darauf aus ist etwas Bestimmtes wahrzunehmen, sein Auge für alles Uebrige beinahe fühllos wird: wer rothe Beeren im Garten sucht, wird sich der blauen, die daneben stehen, gar nicht bewusst.

Es ist ein sinniges Spiel unserer Sprache, wenn sie den Scharfsinn, mit dem epochemachende Männer der Wissenschaft alltäglichen Erscheinungen bedeutungsvolle Seiten abzugewinnen verstehen, „Blick“ nennt. Ist es nicht gleichsam ein höheres, nicht blos durch Genialität, sondern auch durch umfassendes Wissen gesteigertes Sehvermögen, wenn ein Gauss durch das Glitzern der Fenster eines Kirchthurms, den er eben im Fernrohre hat, auf seinen Heliotrop geführt wird, ohne den heut zu Tage keine genaue Triangulation mehr zu denken ist, oder ein Rittenhouse in den niedlichen Bildern eines verkehrt vor das Auge gehaltenen Fernrohres das seither überall angewandte Mittel erkennt, künstliche Signale zu erzeugen, die sich ganz so verhalten, als ständen sie in unendlicher Entfernung, oder ein Newton das tausend und aber tausend Mal vor ihm als Ergötzlichkeit begaffte Spectrum zur Quelle der heutigen Optik macht?

Das allseitige plötzliche Anstürmen zu irgend einer Wahrheit, dem wir so oft in der Geschichte der Wissenschaften begegnen und das es zuweilen schwer macht zu entscheiden, wem eigentlich die Ehre der neuen Entdeckung gebührt, zeigt eben, dass die allgemeine Bildung die Dinge gehörig erfasst hat. Das Menschengeschlecht ist einem Reisenden in unbekannten Ländern zu vergleichen. Wie dieser um so reichere Ausbeute heimbringt, je umfangreichere Kenntnisse ihm zu Gebote stehen, die ihn das Neue vom Gewöhnlichen unterscheiden lehren, so bedarf auch die Menschheit einer langen Schule, um zu verstehen, was um sie her Wichtiges vorgeht. Man muss eben anregbar sein, um angeregt zu werden.

Seit dem vierten Jahrhunderte unserer Zeitrechnung wendet China die Magnetnadel als nautisches Hülfsmittel an und konnte so schon damals seine Schifffahrt nach Indien und Ostafrika ausdehnen. Die Araber brachten uns im achten Jahrhunderte mit Indien, die Kreuzfahrer im zehnten mit dem Orient in Verbindung, aber der Kompass fand erst im zwölften Jahrhunderte Eingang in Europa.

Klingt es nicht beinahe unglaublich, dass man das freihängende Loth als Beobachtungsmittel nicht über die Periode, da die Araber unsere Lehrer in der Sternkunde waren, zurückverfolgen kann, ja dass es erst im fünfzehnten Jahrhunderte durch unsern berühmten Landsmann Georg von Peurbach allgemeine Aufnahme fand?

Wenn Amontons zu Anfang des vorigen Jahrhundertes einen optischen Telegraphen mit vollem Erfolge spielen lässt, wenn Franklin fünfzig Jahre später den Donner entwaffnet und beide dafür sogar in einer Körperschaft wie die Pariser Akademie mit schalen Witzen abgefertigt werden, wenn ganze Jahrtausende zahllose Aërolithen zur Erde fallen sehen, ohne sich irgend zu ernstem Nachdenken über die Natur der Meteore aufgefordert zu fühlen, so ist das dieselbe Harthörigkeit für Neues, die das Menschengeschlecht an den goldenen Lehren eines Roger Baco oder eines Leonardo da Vinci unaufmerksam vorbeigehen liess. Beide standen als inductive Philosophen weit höher als des erstern Namensvetter Francis, aber diesem waren Zeitgenossen beschieden, die durch Kopernicus, Galilei, Kepler u. s. w. grossartige Erfolge jenes Prinzipes kennen gelernt hatten, das Francis Bacon nun nur eben zu formuliren hatte, um es zu allgemeinem Bewusstsein zu bringen. Einzelne hervorragende Männer hatten selbst lang vor Roger Baco den richtigen Weg der Naturfor-

schung eingeschlagen. Auch dafür sei ein vielleicht weniger bekannter Beleg beigebracht. Die Sichtbarkeit der Sichel nach dem Neumonde hat für die Juden eine rituelle Bedeutung, da der kirchliche Anfang ihrer Monate davon abhängt. Ihr grosser Weltweiser M a i m o n i d e s überliefert uns im zwölften Jahrhunderte das Verfahren, nach welchem sie geraume Zeit hindurch die Momente notirten, da die Lunula sich dem Auge zeigte und daraus eine Formel ableiteten, mittelst deren man je nach der Stellung von Sonne und Mond die Zeit des Sichtbarwerdens der Sichel berechnen kann. Das ist Induction wie sie leibt und lebt, aber die Zeit war noch lange nicht gekommen, da der Boden für solchen Samen empfänglich wurde, da man die hohe Bedeutung jenes Verfahrens überhaupt erkannte.

Seit wenig mehr als einem Jahrhunderte sind wir in allen den Beziehungen, die wir eben besprochen, auf gutem Wege. Wir haben die Leistungsfähigkeit unserer Organe durch immerwährende Schulung derselben ungemein erhöht, wir haben unsere Sinne vor den Schleiern bewahren gelernt, mit denen vorgefasste Philosopheme sie umhüllten, wir wissen das Glück festzuhalten, das uns irgend eine wichtige Beziehung zur Natur in die Hände spielt, vornehmthuende Zweifelsucht, von der A l e x a n d e r v o n H u m b o l d t so richtig sagt, dass sie in einzelnen Fällen fast noch verderblicher sei als unkritische Leichtgläubigkeit, weicht wie diese mehr und mehr von uns. Aber hüten wir uns vor dem Wahne, dass darin unser ganzes Heil liege. „Der gebildete Mensch in seiner vollen Wahrheit ist eben mehr als jegliche Virtuosität, dauerhafter als jede noch so gesteigerte Specialität, segensreicher, wirksamer als jede besondere Kraft . . . . . . Wer unter uns die zahlreichsten Eigenschaften harmonisch in sich verbindet, der ist ein Führer der Menschen, mag er in der Stärke der einzelnen Eigenschaften noch so sehr von Andern übertroffen werden. Das ist der Sieg echter Menschlichkeit, echter Bildung, welche in der Person wie im Staate immer nach innerm Gleichgewichte trachtet.“ Mit diesem schönen Ausspruche eines gefeierten Dichters der Gegenwart komme ich zu dem Worte, das ich Ihnen auf Ihren Lebensweg mitgeben möchte. Wenn einerseits das Princip der Arbeitstheilung, ohne das kein eigentlicher Fortschritt der Menschheit denkbar ist, die Leistungen der Einzelnen auf verhältnissmässig enge Gebiete beschränkt, so kann andererseits nur d e r solche Gebiete richtig wählen und tüchtig ausbeuten, dem es nicht an Ueberblick gebricht. Es gibt keine Wissenschaft, die nicht auch eine ästhetische Seite hätte, kein noch so formales Studium, das durch reale Grundlage nicht gefördert würde.

Philologen und Historiker wollen neuerlich ihre Disciplinen unter die inductiven Fächer gereiht sehen; der Naturforscher fühlt täglich mehr, dass er den deductiven Weg vielleicht länger als er gesollt vernachlässigt hat, und die Wissenschaft aller Wissenschaften, die Philosophie, kann sie selbst bestehen ohne gründliche Kenntniss des Wesens aller übrigen Doctrinen, und ist wieder ohne sie eine hohe Stufe geistiger Entwicklung, sei es in welcher Richtung immer, denkbar? Drängt sie sich nicht auch denen, die sich schnöde von ihr wenden, unwillkürlich auf? Bringt nicht sie allein Klarheit in Reflexionen über die Natur des erwählten Faches, denen zuletzt kein denkender Kopf entgeht?

Halten Sie also fest daran, Hörer der Hochschule *κατ' ἐξοχήν*, nicht Hörige einer Facultät oder gar eines Facultätszweiges zu sein. Bleiben Sie treu den Grundsätzen der *Universitas literarum*, vernachlässigen Sie über den Beruf nicht möglichst allseitige Bildung, lassen Sie das strenge Specialisiren Ihrer Thätigkeit auf den Zeitpunkt, da Sie nicht blos zu empfangen, sondern auch zu geben, zu produciren haben werden. Halten Sie die Alten hoch in Allem, wo diese unsere Lehrer waren und sind, verschmähen Sie nicht die jüngeren Vorfahren und die Zeitgenossen überall da, wo man nur von diesen lernen kann.

XVIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Franz Unferdinger in Wien.

1. Es ist zu zeigen, dass der Ausdruck

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

unverändert bleibt in seinem Werth, wenn statt a, b, c beziehungsweise gesetzt wird:

$$\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},\quad \sqrt{2a^2+2c^2-b^2},\quad \sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

2. Es ist die Richtigkeit der folgenden Gleichungen nachzuweisen für ein ganzes positives n:

$$\binom{n}{1}+\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\binom{n}{n}=1+\frac{3}{2}+\frac{7}{3}+\frac{15}{4}+\ldots+\frac{2^n-1}{n},$$

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\ldots\pm\frac{1}{n}\binom{n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

$$\frac{1}{2}\binom{n}{0}+\frac{1}{3}\binom{n}{1}+\frac{1}{4}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{1}{n+2}\binom{n}{n}=\frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\frac{1}{2}\binom{n}{0}-\frac{1}{3}\binom{n}{1}+\frac{1}{4}\binom{n}{2}-\ldots\pm\frac{1}{n+2}\binom{n}{n}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Geometrisches Sinnen-Confect von Paul Halcken.

(Man vergl. Thl. XLIX. S. 237., wovon die folgenden Aufgaben, bei denen ich eine strengere Auswahl absichtlich nicht getroffen habe, die Fortsetzung bilden. Die folgende Aufgabe Nr. 1. ist Nr. 416 bei P. H. Figuren habe ich hier nicht beigefügt, weil Jeder dieselben leicht für sich zu ergänzen im Stande sein wird. Sollte ich dieselben bei weiteren Mittheilungen für nöthig halten, so werde ich sie beifügen.). G.

1. Wie die recht winckelten Triangul, von rational Seiten in gantzen Zahlen zu finden.

2. Triangula obliquangula, schraatwinckelte Triangul zu finden, deren Seiten und Perpendicular-Linien rational-Zahlen seyn.

3. Man begehret einen Scalenischen Triangul in rationalen zu suchen, das die Summa der drey Seiten 3 mahl so viel sey, als die Perpendicular-Linie. Fac. 125. 136. Bas. 99. Perp. 120. Oder 183. 212. Basis 145. Perpend. 180. Und unzählige mehr.

4. Es is ein scalenischer Triangul, davon thut die Basis 156. und der gröste Schenckel 145. Die Summa der drey Seiten ist just 4 mahl so viel, als die Perpendicular-Linie. Ist die Frage

nach dem kleinern Schenckel, und der Perpend. Linie? Facit 119. Perpend. 105.

5. Findet einen solchen Triangul, dass die Summa der drey Seiten sey eine Trigonal-Zahl, und die Perpendicular-Linie derselben Radix. Fac. 15. $28\frac{1}{2}$. Bas. $34\frac{2}{3}$. Perpend. 12.

6. Einen andern Triangul zu finden, dass die Summa der drey Seiten sey eine Quadrat-Zahl, und die Perpendicular-Linie derselben Radix. Fac. $12\frac{1}{6}$. $22\frac{1}{12}$. Bas. $29\frac{3}{4}$. Perp. 8.

7. Noch findet einen Triangul, dass die Summa der drey Seiten sey eine Cubic-Zahl, und die Perpend. Linie derselben Radix. Fac. $36\frac{1}{4}$. $72\frac{1}{2}$. Basis $107\frac{5}{8}$. Perpend. 6.

8. Von einem schratwinckelten Triangul, ist die Summa der drey Seiten ein Cubus, und die Perpendicular-Linie ein Quadrat. Facit $19\frac{2}{3}$. 24.*) Basis 23. Perpend. 16.

9. Von dem Triangul 13. 15. Basis 14. thut die Summa der drey Seiten 42. und die Perpendicular-Linie 12. Einen andern Triangul zu finden, davon die Summa der drey Seiten auch sey 42. und die Perpend. Linie 12. Facit $16\frac{1}{6}$. $12\frac{3}{10}$. Basis $13\frac{8}{15}$. Und viel andere mehr.

10. Es ist ein rechtwinckelter Triangul davon thut die Summa der drey Seiten 176. und wann man die Summa der beiden Seiten *B* und *C*. mit ihrer Differentz multipl. und zum Product die Seite *H* addiret, so kommen 794. Wieviel hält jede Seite? Facit *B* 55. *C* 48. *H* 73.

11. Es ist ein rechtwinckelter Triangul *ABC*, aus dem rechtwinckel *A* ist gezogen die Perpendicular-Linie *AD*, thut demnach die Seite *AB* und das Stück der zertheilten Baseos *BD* zusammen 200. und die Seite *AC* und *CD* thut 480. Ist die Frage nach den dreyen Seiten dieses Trianguls. Fac. *AB* 136. *AC* 255. und *BC* 289.

---

*) Diese Zahl ist nicht genau zu erkennen, vielleicht ist sie nicht ganz richtig. G.

(Fortsetzung folgt später.)

XIX.

Miscellen.

Schreiben des Herrn Franz Unferdinger in Wien an den Herausgeber über das grösste in eine Ellipse zu beschreibende Dreieck und das grösste in ein dreiaxiges Ellipsoid zu beschreibende Tetraeder.

Im XXX. Theil (Nr. II. S. 11.) Ihres geschätzten Archivs haben Sie eine interessante Construction des grössten einer Ellipse eingeschriebenen Dreieckes mitgetheilt *), aus welcher hervorgeht, dass es unendlich viele solche gleich grosse Dreiecke gibt, deren Seiten zu den Tangenten der gegenüberliegenden Ecken parallel sind und deren gemeinschaftlicher Schwerpunkt der Mittelpunkt der Ellipse ist. Ich erlaube mir die weitere Folgerung anzuschliessen, dass die Seiten dieser Dreiecke die umhüllenden Tangenten einer zweiten concentrischen und gleichliegenden Ellipse sind, mit den Halbaxen $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, und dass auch die von den Seiten auf der ersten Ellipse erzeugten Segmente gleiche Fläche haben.

Ihre Untersuchung hat später Professor Spitzer veranlasst zur Lösung des analogen Problems über das grösste Tetraeder im dreiaxigen Ellipsoid, und aus seiner im XXXII. Theil (Nr. XVIII. S. 194.) des Archivs mitgetheilten Darstellung geht hervor, dass es auch unendlich viele solche gleichgrosse Tetraeder gibt.

In neuerer Zeit hat in Schlömilch's Zeitschrift (14. Jahrgang, S. 372) ohne der vorhergehenden Arbeiten Erwähnung zu thun Professor Grelle das letztere Problem wieder vorgenommen und gezeigt, dass der Inhalt des Tetraeders $\frac{8}{27}\sqrt{3}.abc$, dass die Seitenflächen jedes grössten Tetraeders zu

---

*) Erweiterung auf Vielecke überhaupt s. Thl. XXX. Nr. X. S. 81.
G.

den Berührungsebenen der Gegenecken parallel sind, dass der Mittelpunkt des Ellipsoides der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller Tetraeder ist, und dass die elliptischen Kegel, deren Scheitel im Schwerpunkt liegt und deren Basen die Ellipsen sind, in welchen die Seitenflächen des Tetraeders das Ellipsoid schneiden, das gleiche Volumen $\frac{8}{81}abc\pi$ haben.

Aus den a. a. O. aufgestellten Gleichungen, kann man leicht die weitere Folgerung ziehen, dass die Seitenflächen sämmtlicher Tetraeder die umhüllenden Berührungsebenen eines zweiten concentrischen und gleichliegenden Ellipsoides sind, mit den Halbaxen $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{3}c$, und die Berührungspunkte sind die Schwerpunkte der Seitenflächen.

Mit Anwendung der Resultate meiner Abhandlung im XXVIII. Theil (Nr. II. S. 52.) Ihres Archivs überzeugt man sich leicht, dass auch die Segmente, welche die Seitenflächen vom ersten Ellipsoid abschneiden, den constanten Inhalt $\frac{28}{81}$ $abc\pi$ haben.

Druckfehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmen-Tafeln.

Nr. 23. Tafel II. S. 399. Diff. zwischen log. tang. 32° 33′ 10″ und 20″ statt 463 lies 464.

Nr. 24. Tafel II. S. 412. log. cotg. 34° 47′ 10″ statt 0,1582 285 lies 0, 1582 285.

Berichtigung.

Thl. XLIX., S. 481, Z. 5, 7, 9, statt arc.tg lies $\frac{1}{2}$arc.tg.

XX.

Relations nouvelles entre les tangentes, normales, sous-tangentes et sous-normales des courbes en général, avec application aux lignes du second degré.

Par

Monsieur *Georges Dostor,*
Docteur ès sciences
Professeur de mathématiques à Paris.

---

1. Dans l'étude des courbes, on a l'habitude de ne considérer que les tangentes et les normales vers l'axe des x, c'est-à-dire les parties de ces tangentes qui sont comprises entre le point de contact et l'axe des x.

De même on ne considère ordinairement que les sous-tangentes et les sous-normales sur l'axe des x.

Souvent même certaines courbes sont caractérisées par des conditions particulières auxquelles se trouvent assujetties ces longueurs.

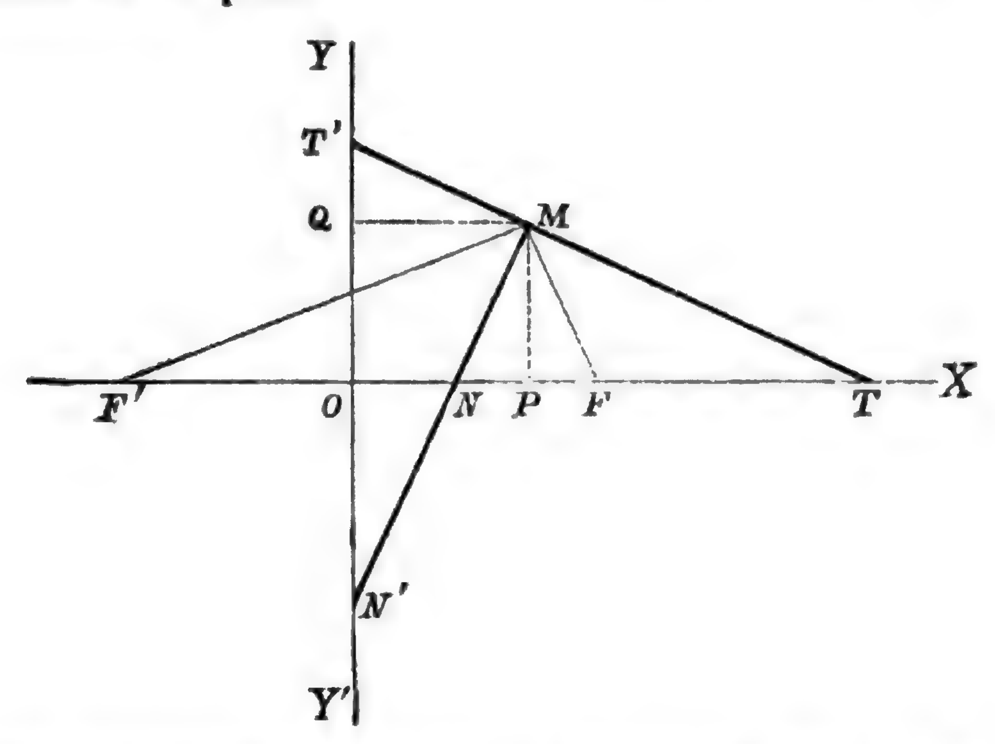
Or il n'est pas moins important de faire entrer dans le calcul les droites analogues par rapport à l'axe des y.

Il existe même entre ces dernières droites et les premières des relations assez remarquables, qui peuvent servir à simplifier les calculs, et qui, en outre, conduisent presque immédiatement à de nouvelles propriétés des courbes. Souvent on n'aperçoit pas de suite ces propriétés, et on ne les démontre que par des calculs plus ou moins longs.

Dans cet écrit, nous nous proposons d'établir ces relations et d'en faire l'application aux courbes du second degré.

§. I. Définitions et Notations.

2. Soient OX, OY les deux axes de coordonnées; θ l'angle XOY qu'ils comprennent. Considérons un point quelconque M d'une courbe, et supposons que TMT' soit la tangente, et MNN' la normale en ce point.



Nous nommerons tangente vers x la partie MT de la tangente, qui est comprise entre le point de contact et l'axe des x; tangente vers y celle MT', qui est comprise entre le point de contact et l'axe des y.

De même, nous appellerons normale vers x la partie MN de la normale, qui est comprise entre le point de contact et l'axe des x; normale vers y celle MN', qui est comprise entre le point de contact et l'axe des y.

Puis nous poserons

$$MT = T, \quad MT' = T', \quad MN = N, \quad MN' = N'.$$

Menons les coordonnées MP, MQ du point M; nous donnerons les noms de sous-tangentes sur x et y aux distances PT, QT', et les noms de sous-normales sur x et y aux distances PN, QN'; nous ferons d'ailleurs

$$PT = t, \quad QT' = t', \quad PN = n, \quad QN' = n'.$$

Quant aux distances à l'origine des points T, N, T', N', où les axes sont coupés par la tangente et la normale, nous les représenterons par les lettres grecques et nous ferons

$$OT = \tau, \quad OT' = \tau', \quad ON = \nu, \quad ON' = \nu'.$$

§. II. Relations indépendantes de l'angle des axes de coordonnées.

3. Les deux systèmes de triangles semblables MPT et MQT', MNP et $MN'Q$ nous fournissent les proportions

$$\frac{T}{T'}=\frac{t}{x}=\frac{y}{t'}, \quad \frac{N}{N'}=\frac{n}{x}=\frac{y}{n'}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

qui équivalent à quatre équations, pendant que la rectangularité des deux triangles MNT, $MN'T'$ nous donne les deux équations

$$N^2+T^2=(n+t)^2, \quad N'^2+T'^2=(n'+t')^2. \quad \ldots \quad (2)$$

Au moyen des six équations (1) et (2), nous pouvons exprimer les valeurs des six quantités t, t', n, n', y, x en fonction des deux tangentes T, T' et des deux normales N, N'.

4. Les équations (1) donnent d'abord les valeurs

$$t=\frac{Tx}{T'}, \quad t'=\frac{T'y}{T}, \quad n=\frac{Nx}{N'}, \quad n'=\frac{N'y}{N}, \quad \ldots (3)$$

qui, étant substituées dans les égalités (2), nous fournissent pour y et x les valeurs

$$y=\frac{NT\sqrt{N'^2+T'^2}}{NT'+TN'}, \quad x=\frac{N'T'\sqrt{N^2+T^2}}{NT'+TN'}. \quad \ldots (I)$$

Mettons ces valeurs dans les équations (3), nous trouvons

$$t=\frac{TN'\sqrt{N^2+T^2}}{NT'+TN'}, \quad t'=\frac{NT'\sqrt{N'^2+T'^2}}{NT'+TN'}; \quad \ldots (II)$$

$$n=\frac{NT'\sqrt{N^2+T^2}}{NT'+TN'}, \quad n'=\frac{TN'\sqrt{N'^2+T'^2}}{NT'+TN'}. \quad \ldots (III)$$

5. Ces expressions font voir que

$$xy=tt'=nn'=\frac{NN'.TT'.\sqrt{(N^2+T^2)(N'^2+T'^2)}}{(NT'+TN')^2} \quad \ldots (IV)$$

Ainsi

Théorème I. Le produit des deux sous-tangentes et le produit des deux sous-normales sont égaux entre eux, et égaux au produit des coordonnées du point de contact.

6. Au moyen des valeurs précédentes, nous trouvons que

$$\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{N^2+T^2}{N'^2+T'^2}}\times\frac{N'}{N}\times\frac{T'}{T}, \quad \ldots\ldots (V)$$

$$\frac{t}{t'}=\sqrt{\frac{N^2+T^2}{N'^2+T'^2}}\times\frac{T}{T'}:\frac{N}{N'}, \quad \ldots\ldots (VI)$$

$$\frac{n}{n'}=\sqrt{\frac{N^2+T^2}{N'^2+T'^2}}\times\frac{N}{N'}:\frac{T}{T'} \quad \ldots\ldots (VII)$$

puis

$$\frac{t}{n}=\frac{T}{T'}:\frac{N}{N'}, \quad \frac{t'}{n'}=\frac{T'}{T}:\frac{N'}{N}. \quad \ldots\ldots (VIII)$$

Donc

Théorème II. Chaque sous-tangente est à la sous-normale correspondante, comme le rapport des tangentes est au rapport des normales.

7. Si nous divisons membre a membre les égalités (VI) et (VII), nous voyons que

$$\frac{t}{t'}:\frac{n}{n'}=\frac{T^2}{T'^2}:\frac{N^2}{N'^2} \quad \ldots\ldots (IX)$$

c'est-à-dire

Théorème III. Le rapport des sous-tangentes est à celui des sous-normales, comme le carré du rapport des tangentes est au carré du rapport des normales.

8. Nous trouvons encore, au moyen des égalités du n° 4,

$$nt=\frac{NN'.TT'.(N^2+T^2)}{(NT'+TN')^2}, \quad n't'=\frac{NN'.TT'.(N'^2+T'^2)}{(NT'+TN')^2}; \ldots (X)$$

par suite

$$x^2=nt:\frac{NT}{N'T'}, \quad y^2=n't':\frac{N'T'}{NT} \quad \ldots\ldots (XI)$$

puis

$$nt'=\frac{N^2T'^2\sqrt{(N^2+T^2)(N'^2+T'^2)}}{(NT'+TN')^2},$$

$$n't=\frac{N'^2T^2\sqrt{(N^2+T^2)(N'^2+T'^2)}}{(NT'+TN')^2}; \quad \ldots (XII)$$

enfin, en ayant égard à (2),

$$\left.\begin{aligned}\frac{t}{n+t}=\frac{TN'}{TN'+NT''},\quad \frac{t'}{n'+t'}=\frac{NT''}{TN'+NT''};\\ \frac{n}{n+t}=\frac{NT''}{NT''+TN'},\quad \frac{n'}{n'+t'}=\frac{TN'}{NT''+TN'};\end{aligned}\right\}\ldots\text{(XIII)}$$

d'où

$$\frac{t}{n+t}+\frac{t'}{n'+t'}=1,\quad \frac{n}{n+t}+\frac{n'}{n'+t'}=1;\quad\ldots\text{(XIV)}$$

$$\frac{t}{n+t}=\frac{n'}{n'+t'},\qquad \frac{n}{n+t}=\frac{t'}{n'+t'}\ldots\ldots\text{(XV)}$$

9. **Distances de l'origine des coordonnées aux intersections de la tangente et de la normale avec les axes de coordonnées.** Les droites TT', NN' coupant les axes en T et T', N et N', les coordonnées du point M, qui est commun à ces deux droites, satisfont aux équations

$$\frac{x}{\tau}+\frac{y}{\tau'}=1,\quad \frac{x}{\nu}+\frac{y}{\nu'}=1,\quad\ldots\ldots\text{(XVI)}$$

où $\tau=OT$, $\tau'=OT'$, $\nu=ON$, $\nu'=-ON'$; nous en tirons

$$x=\frac{\nu\tau(\tau'-\nu')}{\nu\tau'-\tau\nu'},\quad y=\frac{\nu'\tau'(\nu-\tau)}{\nu\tau'-\tau\nu'}.\quad\ldots\text{(XVII)}$$

10. Puisque

$$x=\tau-t=n+\nu,\quad y=\tau'-t'=n'+\nu',$$

il vient, en substituant dans les équations (XII),

$$\frac{t}{\tau}+\frac{t'}{\tau'}=1,\ \frac{n}{\nu}+\frac{n'}{\nu'}=-1.\ \ldots\ldots\text{(XVIII)}$$

Ces égalités expriment que les points

$$(x=t,\ y=t'),\quad (x=-n,\ y=-n')$$

sont situés, le premier sur la tangente, et le second sur la normale. Donc

Théorème IV. **Si l'on mène, en un point d'une courbe, la tangente et la normale, 1° le point, qui a pour coordonnées les deux sous-tangentes, est situé sur la tangente; 2° le point, qui a pour coordonnées les deux sous-normales, changées de signe, est aussi situé sur la normale.**

11. Dans les égalités

$$t = \tau - x,\ t' = \tau' - y,\ n = x - \nu,\ n' = y - \nu'$$

mettons à la place de x, y leurs valeurs (XVII) et effectuons, nous trouvons

$$t = \frac{\tau\nu'(\nu - \tau)}{\nu\tau' - \tau\nu'}, \quad t' = \frac{\nu\tau'(\tau' - \nu')}{\nu\tau' - \tau\nu'}; \quad \ldots (\text{XIX})$$

$$n = \frac{\nu\tau'(\tau - \nu)}{\nu\tau' - \tau\nu'}, \quad n' = \frac{\tau\nu'(\nu' - \tau')}{\nu\tau' - \tau\nu'}; \quad \ldots (\text{XX})$$

d'où nous tirons

$$n + t = \tau - \nu, \quad n' + t' = \tau' - \nu'$$

ce qui est évident.

12. Comme

$$T^2 = t(n+t),\ T'^2 = t'(n'+t'),\ N^2 = n(n+t),\ N'^2 = n'(n'+t),$$

nous obtenons en substituant,

$$T^2 = \frac{\tau\nu'(\tau - \nu)^2}{\tau\nu' - \nu\tau'}, \quad T'^2 = \frac{\nu\tau'(\tau' - \nu')^2}{\nu\tau' - \tau\nu'}; \ldots (\text{XXI})$$

$$N^2 = \frac{\nu\tau'(\tau - \nu)^2}{\nu\tau' - \tau\nu'}, \quad N'^2 = \frac{\tau\nu'(\tau' - \nu')^2}{\tau\nu' - \nu\tau'} \ldots (\text{XXII})$$

§. III. Relations variant avec l'angle des axes de coordonnées.

13. **Inclinaisons de la tangente et de la normale sur les axes de coordonnées.** Désignons par T et T', N et N' les angles aigus que font la tangente et la normale avec les deux axes des coordonnées OX et OY. Les triangles rectangles MNT, $MN'T'$ nous donnent de suite

$$\left.\begin{aligned} \sin T = \cos N = \frac{N}{\sqrt{N^2 + T^2}},\ \sin T' = \cos N' = \frac{N}{\sqrt{N'^2 + T'^2}}, \\ \cos T = \sin N = \frac{T}{\sqrt{N^2 + T^2}},\ \cos T' = \sin N' = \frac{T}{\sqrt{N'^2 + T'^2}}; \end{aligned}\right\} (\text{XXIII})$$

$$\operatorname{tang} T = \operatorname{cotang} N = \frac{N}{T}, \quad \operatorname{tang} T' = \operatorname{cotang} N' = \frac{N'}{T'}. \ (\text{XXIV})$$

14. **Angle des axes de coordonnées.** Puisque

$$\theta = 180^0 - (T + T')$$

il vient

$$\tang \theta = \frac{\tang T + \tang T'}{\tang T \tang T' - 1};$$

et, en substituant,

$$\tang \theta = \frac{NT' + TN'}{NN' - TT'}; \quad \ldots\ldots \text{(XXV)}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{NT' + TN'}{\sqrt{(N^2 + T^2)(N'^2 + T'^2)}}, \\ \cos\theta &= \frac{NN' - TT'}{\sqrt{(N^2 + T^2)(N'^2 + T'^2)}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(XXVI)}$$

On en tire

$$\tang T = \frac{N' + T' \tang\theta}{N' \tang\theta - T'}, \quad \tang T' = \frac{N + T \tang\theta}{N \tang\theta - T}. \quad \text{(XXVII)}$$

15. La rectangularité des deux triangles MNT, $MN'T'$ donne de suite

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{N^2} + \frac{1}{T^2} &= \frac{1}{y^2 \sin^2\theta}, \\ \frac{1}{N'^2} + \frac{1}{T'^2} &= \frac{1}{x^2 \sin^2\theta}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(XXVIII)}$$

16. Si l'on rapproche les valeurs (IV) et (XXVI), on obtient

$$xy = tt' = nn' = \frac{NN' + TT'}{(NT' + TN')\sin\theta}. \quad \ldots \text{(XXIX)}$$

Il vient, par conséquent,

$$\frac{TT'}{tt'} = \left(\frac{T}{N} + \frac{T'}{N'}\right)\sin\theta, \quad \frac{NN'}{nn'} = \left(\frac{N}{T} + \frac{N'}{T'}\right)\sin\theta; \ldots \text{(XXX)}$$

$$\frac{1}{tt'} = \frac{1}{nn'} = \frac{1}{ny} = \left(\frac{1}{NT'} + \frac{1}{TN'}\right)\sin\theta. \ldots \text{(XXXI)}$$

§. IV. Relations dans le cas d'axes rectangulaires.

17. Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, on a $\theta = 90^o$, $\cos\theta = 0$, ce qui exige que

$$TT' = NN' \quad \ldots\ldots\ldots \text{(XXXII)}$$

Donc

Théorème V. L o r s q u e l e s a x e s d e c o o r d o n n é e s

sont rectangulaires, le produit des deux tangentes est égal au produit des deux normales.

18. Cette relation nous permet de simplifier les resultats obtenus plus haut.

Nous avons d'abord

$$NT' + TN' = \frac{T'}{N}(N^2 + T^2) = \frac{N'}{T}(N^2 + T^2) = \frac{T}{N'}(N'^2 + T'^2)$$
$$= \frac{N}{T'}(N'^2 + T'^2); \quad . \; . \; . \; . \; (\text{XXXIII})$$

$$NT' + TN' = \sqrt{(N^2 + T^2)(N'^2 + T'^2)} = (n + t)(n' + t'); \quad (\text{XXXIV})$$

$$\frac{N}{\sqrt{N^2 + T^2}} = \frac{T'}{\sqrt{N'^2 + T'^2}}, \quad \frac{N'}{\sqrt{N'^2 + T'^2}} = \frac{T}{\sqrt{N^2 + T^2}}. \quad (\text{XXXV})$$

Il vient ainsi

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{N'T'}{\sqrt{N'^2 + T'^2}} = \frac{NN'}{\sqrt{N^2 + T^2}} = \frac{TT'}{\sqrt{N^2 + T^2}}, \\ y &= \frac{NT}{\sqrt{N^2 + T^2}} = \frac{NN'}{\sqrt{N'^2 + T'^2}} = \frac{TT'}{\sqrt{N'^2 + T'^2}}; \end{aligned}\right\} (\text{XXXVI})$$

$$t = \frac{T^2}{\sqrt{N^2 + T^2}}, \quad t' = \frac{T'^2}{\sqrt{N'^2 + T'^2}}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{XXXVII})$$

$$n = \frac{N^2}{\sqrt{N^2 + T^2}}, \quad n' = \frac{N'^2}{\sqrt{N'^2 + T'^2}}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{XXXVIII})$$

19. Nous obtenons ensuite

$$xy = tt' = nn' = \frac{NN'.TT'}{NT' + TN'} = TN' \times \frac{N^2}{N^2 + T^2} = NT' \times \frac{T^2}{N^2 + T^2}$$
$$= NT' \times \frac{N'^2}{N'^2 + T'^2} = TN' \times \frac{T'^2}{N'^2 + T'^2}; \quad (\text{XXXIX})$$

$$\frac{x}{y} = \frac{N'}{T} = \frac{T'}{N}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{XL})$$

$$\frac{t}{t'} = \frac{T^2}{NT'} = \frac{TN'}{T'^2}, \quad \frac{n}{n'} = \frac{N^2}{TN'} = \frac{NT'}{N'^2}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{XLI})$$

$$\frac{t}{n} = \frac{T^2}{N^2}, \quad \frac{t'}{n'} = \frac{T'^2}{N'^2}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{XLII})$$

Ces dernières égalités prouvent que:

Théorème VI. **Chaque sous-tangente est à la sous-normale correspondante, comme le carré de la tangente est au carré de la normale.**

20. On trouve encore

$$\frac{t}{t'} : \frac{n}{n'} = \frac{T^4}{N^4} = \frac{N'^4}{T'^4}; \quad \ldots\ldots \quad \text{(XLIII)}$$

$$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{T^3}{T'^3} : \frac{N}{N'}, \quad \frac{n^2}{n'^2} = \frac{N^3}{N'^3} : \frac{T}{T'}; \quad \ldots \quad \text{(XLIV)}$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{N}{N'} \times \frac{T}{T'} \quad \ldots\ldots \quad \text{(XLV)}$$

§. V. Expressions générales des tangentes, normales, sous-tangentes et sous-normales en valeur des coordonnées du point de contact et des fonctions dérivées du premier membre de l'équation de la courbe.

21. Supposons que les axes de coordonnées comprennent entre eux un angle θ. Si $f(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe,

$$f'_y(Y-y) + f'_x(X-x) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$(f'_y - \cos\theta f'_y)(Y-y) = (f'_y - \cos\theta f'_x)(X-x) \quad . . \quad (3)$$

seront la première l'équation de la tangente, la seconde l'équation de la normale au point (x, y); X, Y désignent les coordonnées courantes de ces droites.

Au moyen de ces équations, il est facile de trouver que

$$\tau = \frac{xf'_x + yf'_y}{f'_x}, \quad \tau' = \frac{xf'_x + yf'_y}{f'_y}; \quad \ldots \quad \text{(XLVI)}$$

$$t = \frac{yf'_y}{f'_x}, \quad t' = \frac{xf'_x}{f'_y}; \quad \ldots\ldots \quad \text{(XLVII)}$$

$$tt' = xy;$$

$$\frac{t}{t'} = \frac{y}{x} \cdot \frac{f'^2_y}{f'^2_x} = \frac{y}{x} \cdot \frac{\tau^2}{\tau'^2};$$

$$\left.\begin{aligned} \nu &= \frac{(x + y\cos\theta) f'_y - (y + x\cos\theta) f'_x}{f'_y - \cos\theta f'_x}, \\ \nu' &= \frac{(y + x\cos\theta) f'_x - (x + y\cos\theta) f'_y}{f'_x - \cos\theta f'_y}; \end{aligned}\right\} \ldots \text{(XLVIII)}$$

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{y(f'_x - \cos\theta f'_y)}{f'_y - \cos\theta f'_x}, \\ n' &= \frac{x(f'_y - \cos\theta f'_x)}{f'_x - \cos\theta f'_y}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XLIX)}$$

$$nn' = xy;$$

$$\frac{n}{n'} = \frac{y}{x} \cdot \frac{(f'_x - \cos\theta f'_y)^2}{(f'_y - \cos\theta f'_x)^2} = \frac{y}{x} \cdot \frac{\nu^2}{\nu'^2}; \ldots\ldots\ldots \text{(L)}$$

$$\left.\begin{aligned} n + t &= \frac{y(f'^2_x + f'^2_y - 2\cos\theta f'_x f'_y)}{f'_x(f'_y - \cos\theta f'_x)}, \\ n' + t' &= \frac{x(f'^2_x + f'^2_y - 2\cos\theta f'_x f'_y)}{f'_y(f'_x - \cos\theta f'_y)}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(LI)}$$

$$\left.\begin{aligned} T^2 &= (t - y\cos\theta)(n + t) = \frac{y^2(f'^2_x + f'^2_y - 2\cos\theta f'_x f'_y)}{f'^2_x}, \\ T'^2 &= (t' - x\cos\theta)(n' + t') = \frac{x^2(f'^2_x + f'^2_y - 2\cos\theta f'_x f'_y)}{f'^2_y}; \end{aligned}\right\} \text{(LII)}$$

$$TT' = \frac{xy(f'^2_x + f'^2_y - 2\cos\theta f'_x f'_y)}{f'_x f'_y}; \ldots\ldots\ldots \text{(LIII)}$$

$$\left.\begin{aligned} N^2 &= (n + y\cos\theta)(n + t) = \frac{y^2\sin^2\theta(f'^2_x + f'^2_y - 2\cos\theta f'_x f'_y)}{(f'_y - \cos\theta f'_x)^2}, \\ N'^2 &= (n' + x\cos\theta)(n' + t') = \frac{x^2\sin^2\theta(f'^2_x + f'^2_y - 2\cos\theta f'_x f'_y)}{(f_x' - \cos\theta f_y')^2}; \end{aligned}\right\} \text{(LIV)}$$

$$NN' = \frac{xy\sin^2\theta(f'^2_x + f'^2_y - 2\cos\theta f'_x f'_y)}{(f'_x - \cos\theta f'_y)(f'_y - \cos\theta f'_x)} \ldots\ldots\ldots \text{(LV)}$$

22. Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, il vient $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$; dans ce cas les formules (LXVI) et (XLVII) restent les mêmes, tandisque les suivantes se simplifient et deviennent

$$\nu = \frac{xf'_y - yf'_x}{f'_y}, \quad \nu' = \frac{yf'_x - xf'_y}{f'_x}; \ldots\ldots\ldots \text{(LVI)}$$

$$n = \frac{yf'_x}{f'_y}, \quad n' = \frac{xf'_y}{f'_x}; \quad \frac{n}{n'} = \frac{yf'^2_x}{xf'^2_y}; \ldots\ldots\ldots \text{(LVII)}$$

$$n + t = \frac{y(f'^2_x + f'^2_y)}{f'_x f'_y}, \quad n' + t' = \frac{x(f'^2_x + f'^2_y)}{f'_x f'_y}; \ldots \text{(LVIII)}$$

$$T^2 = \frac{y^2(f'^2_x + f'^2_y)}{f'^2_x}, \quad T'^2 = \frac{x^2(f'^2_x + f'^2_y)}{f'^2_y}; \quad \ldots \text{(LIX)}$$

$$TT' = \frac{xy(f'^2_x + f'^2_y)}{f'_x f'_y}; \quad \ldots\ldots\ldots \text{(LX)}$$

$$N^2 = \frac{y^2(f'^2_x + f'^2_y)}{f'^2_y}, \quad N'^2 = \frac{x^2(f'^2_x + f'^2_y)}{f'^2_x}; \quad \ldots \text{(LXI)}$$

$$NN' = \frac{xy(f'^2_x + f'^2_y)}{f'_x f'_y}; \quad \ldots\ldots\ldots \text{(LXII)}$$

ce qui donne $TT' = NN'$.

On en tire visiblement

$$\frac{T^2 f'^2_x}{y^2} = \frac{T'^2 f'^2_y}{x^2} = \frac{N^2 f'^2_y}{y^2} = \frac{N'^2 f'^2_x}{x^2} = f'^2_x + f'^2_y; \quad \text{(LXIII)}$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} Tf'_x = Nf'_y = y\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}, \\ T'f'_y = N'f'_x = x\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(LXIV)}$$

et, par suite,

$$\frac{T}{T'} = \frac{yf'_y}{xf'_x}, \quad \frac{N}{N'} = \frac{yf'_x}{xf'_y}; \quad \ldots\ldots\ldots \text{(LXV)}$$

$$\frac{TN}{T'N'} = \frac{T^2}{N'^2} = \frac{N^2}{T'^2} = \frac{y^2}{x^2}. \quad \ldots\ldots\ldots \text{(LXVI)}$$

§. VI. Détermination des élements de l'ellipse en valeur des rayons vecteurs et du rayon central.

22. **Coordonnées d'un point de la courbe en valeur du rayon central.** Supposons l'ellipse rapportée à ses axes et représentée par l'équation

(1) . . . . $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$

Soient O le centre, F, F' les foyers. Représentons par ϱ le rayon central OM qui aboutit au point M de l'ellipse, dont les coordonnées sont x, y. Nous avons

(2) . . . . $x^2 + y^2 = \varrho^2.$

Si nous résolvons ces deux équations par rapport à x, y, nous trouverons

$$(\mathrm{I})\ \ldots\ \ldots\ x = \pm\frac{a}{c}\sqrt{\varrho^2 - b^2},\quad y = \pm\frac{b}{c}\sqrt{a^2 - \varrho^2},$$

$$xy = \pm\frac{ab}{c^2}\sqrt{(a^2 - \varrho^2)(\varrho^2 - b^2)}.$$

On choisira les signes de x, y selon l'angle des axes dans lequel se trouve dirigé le rayon central ϱ.

23. **Rayon central et distance focale en fonction des rayons vecteurs et de l'angle compris.** Soient r, r' les rayons vecteurs menés au point M et 2φ l'angle compris. Dans le triangle MFF', le rayon central OM où ϱ est la médiane sur FF'; nous avons donc

$$(3)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} 4\varrho^2 = r^2 + r'^2 + 2rr'\cos 2\varphi, \\ 4c^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos 2\varphi; \end{cases}$$

ou, en multipliant $r^2 + r'^2$ par $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ et en mettant $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ à la place de $\cos 2\varphi$,

$$(4)\ \ldots\ \begin{cases} 4\varrho^2 = (r' + r)^2\cos^2\varphi + (r' - r)^2\sin^2\varphi, \\ 4c^2 = (r' - r)^2\cos^2\varphi + (r' + r)^2\sin^2\varphi. \end{cases}$$

Si dans (3) nous remplaçons $\cos 2\varphi$ d'une part par $1 - 2\sin^2\varphi$ et de l'autre part par $2\cos^2\varphi - 1$, nous trouverons, en effectuant et en observant que $r + r' = 2a$,

$$(\mathrm{II})\ \ldots\ldots\ \begin{cases} \varrho^2 = a^2 - rr'\sin^2\varphi, \\ c^2 = a^2 - rr'\cos^2\varphi. \end{cases}$$

24. **Rayon central en fonction des axes et des rayons vecteurs.** Ajoutons ces deux dernières équations, nous obtenons

$$\varrho^2 + c^2 - b^2 = 2a^2 - rr',$$

d'où

$$(\mathrm{III})\ \ldots\ldots\ldots\ \varrho^2 = a^2 + b^2 - rr'.$$

Théorème I. **Le carré du rayon central mené en un point de l'ellipse, est égal à la somme des carrés des demi-axes, diminuée du produit des rayons vecteurs.**

25. **Coordonnées d'un point de l'ellipse en fonction des axes et des rayons vecteurs.** L'équation (III) nous donne

$$\varrho^2 - b^2 = a^2 - rr',\quad a^2 - \varrho^2 = rr' - b^2;$$

par suite les valeurs (I) deviennent

$$(\text{IV}) \ldots \begin{cases} x = \pm \frac{a}{c}\sqrt{a^2 - rr'}, \quad y = \pm \frac{b}{c}\sqrt{rr' - b^2}, \\ xy = \pm \frac{ab}{c^2}\sqrt{(a^2 - rr')(rr' - b^2)}. \end{cases}$$

26. **Angle des rayons vecteurs en fonction de ces rayons et des axes.** Par la dernière des équations (II) nous trouvons

$$rr' \cos^2 \varphi = a^2 - c^2 = b^2,$$

d'où, puisque φ est toujours moindre que $\frac{\pi}{2}$,

$$(\text{V}) \ldots \begin{cases} \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{rr'}}, \quad \sin\varphi = \sqrt{\frac{rr' - b^2}{rr'}} = \sqrt{\frac{a^2 - \rho^2}{rr'}}, \\ \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{rr' - b^2}}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{b}, \end{cases}$$

et, par suite, en vertu de (II),

$$(\text{VI}) \ldots \begin{cases} \cos 2\varphi = \frac{2b^2 - rr'}{rr'} = \frac{\rho^2 - c^2}{rr'}, \\ \sin 2\varphi = \frac{2b\sqrt{rr' - b^2}}{rr'} = \frac{2b\sqrt{a^2 - \rho^2}}{rr'}, \\ \operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2b\sqrt{rr' - b^2}}{2b^2 - rr'} = \frac{2b\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho^2 - c^2}, \end{cases}$$

27. **Coordonnées d'un point de l'ellipse en fonction des rayons vecteurs et de l'angle compris.** Nous avons

$$(5) \ldots \begin{cases} \sqrt{\rho^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - rr'} = \frac{r' - r}{2} = \sqrt{c^2 - rr' \sin^2\varphi}, \\ \sqrt{a^2 - \rho^2} = \sqrt{rr' - b^2} = \sqrt{rr'}\sin\varphi = b \operatorname{tang}\varphi; \end{cases}$$

par conséquent les valeurs (IV) peuvent s'écrire

$$(\text{VII}) \ldots \begin{cases} x = \pm \frac{a(r' - r)}{2c} = \pm \frac{r'^2 - r^2}{4c}, \\ y = \pm \frac{b^2}{c} \operatorname{tang}\varphi, \\ xy = \pm \frac{r'^2 - r^2}{4} \times \frac{b^2}{c^2} \times \operatorname{tang}\varphi. \end{cases}$$

Théorème II. L'abscisse d'un point est égale à la différence des carrés des rayons vecteurs, divisée par la double distance focale; et l'ordonnée est égale au carré du petit axe, multiplié par la tangente du demi-angle des rayons vecteurs et divisé par la demi-distance focale.

28. **Inclinaisons de la tangente et de la normale sur les axes.** Appelons T, T' et N, N' les angles aigus que font la tangente et la normale avec le grand axe. On sait que

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{tang} T = \frac{b^2x}{a^2y};$$

par suite il vient, en remplaçant x, y par leurs valeurs (I), (IV) et (VII),

$$(\text{VIII}) \quad \operatorname{tang} T = \operatorname{cotang} N = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\varrho^2-b^2}{a^2-\varrho^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-rr'}{rr'-b^2}} = \frac{r'-r}{r'+r}\operatorname{cotang}\varphi,$$

d'où on tire

$$(\text{IX}) \ldots \begin{cases} \sin T = \cos N = \dfrac{b}{c}\sqrt{\dfrac{\varrho^2-b^2}{rr'}} = \dfrac{b}{c}\sqrt{\dfrac{a^2-rr'}{rr'}} = \dfrac{r'-r}{2c}\cos\varphi, \\[2ex] \cos T = \sin N = \dfrac{a}{c}\sqrt{\dfrac{a^2-\varrho^2}{rr'}} = \dfrac{a}{c}\sqrt{\dfrac{rr'-b^2}{rr'}} = \dfrac{r'+r}{2c}\sin\varphi, \end{cases}$$

Théorème III. 1°. Les cosinus des angles que fait la normale avec le grand axe et le rayon vecteur, sont entre eux comme la différence des rayons vecteurs est à la distance focale; 2° les sinus de ces angles sont entre eux comme la somme des rayons vecteurs est à la distance focale; 3° les tangentes des mêmes angles sont entre eux comme la somme des rayons vecteurs est à leur différence.

29. **Tangentes.** Les deux triangles MPT, MQT' nous donnent

$$(\text{X}) \quad \ldots \begin{cases} T = \dfrac{y}{\sin T} = \sqrt{rr'}\sqrt{\dfrac{a^2-\varrho^2}{\varrho^2-b^2}} = \sqrt{rr'}\sqrt{\dfrac{rr'-b^2}{a^2-rr'}} \\[2ex] \quad = \dfrac{b}{a}\sqrt{rr'}\cot T = \dfrac{b^2}{a\cos\varphi \operatorname{tang} T}, \\[2ex] T' = \dfrac{x}{\cos T} = \sqrt{rr'}\sqrt{\dfrac{\varrho^2-b^2}{a^2-\varrho^2}} = \sqrt{rr'}\sqrt{\dfrac{a^2-rr'}{rr'-b^2}} \\[2ex] \quad = \dfrac{a}{b}\sqrt{rr'}\cot T' = \dfrac{a \operatorname{tang} T}{\cos\varphi}; \end{cases}$$

ou encore

$$\text{(XI)} \ldots\ldots \quad T=\frac{2rr'\sin\varphi}{r'-r}, \quad T''=\frac{r'-r}{2\sin\varphi}.$$

30. **Produit des deux tangentes.** On trouve de suite

$$\text{(XII)} \ldots\ldots\ldots \quad T.T'=\frac{2xy}{\sin 2T}=rr'.$$

Théorème IV. 1° **Le produit des deux tangentes, l'une à l'axe des x et l'autre à l'axe des y, est égal au produit des deux rayons vecteurs.**

2° **Le produit des coordonnées du point de contact est égal au produit des rayons vecteurs, multiplié par le demi-sinus de la double inclinaison de la tangente sur le grand axe.**

31. On déduit encore de ces valeurs

$$\text{(XIII)} \ldots \left\{ \begin{aligned} \frac{T}{T'} &= \frac{a^2-\rho^2}{\rho^2-b^2}=\frac{rr'-b^2}{a^2-rr'}=\frac{b^2}{a^2}\operatorname{cotang}^2 T \\ &= \frac{4b^2}{(r'-r)^2}\operatorname{tang}^2\varphi, \\ T+T' &= \frac{c^2\sqrt{rr'}}{\sqrt{(a^2-\rho^2)(\rho^2-b^2)}}=\sqrt{\frac{rr'}{(a^2-rr')(rr'-b^2)}} \\ &= \frac{2c^2}{(r'-r)\sin\varphi}. \\ \frac{1}{T}+\frac{1}{T'} &= \frac{c^2}{\sqrt{rr'(a^2-\rho^2)(\rho^2-b^2)}} \\ &= \frac{c^2}{\sqrt{rr'(a^2-rr')(rr'-b^2)}}=\frac{2c^2}{(r'-r)rr'\sin\varphi}. \end{aligned} \right.$$

32. **Normales.** Nous avons par les triangles MNP, $MN'Q$

$$\text{(XIV)} \ldots \left\{ \begin{aligned} N &= \frac{y}{\sin N}=\frac{b}{a}\sqrt{rr'}=\frac{b}{a\cos\varphi}, \\ N' &= \frac{x}{\cos N}=\frac{a}{b}\sqrt{rr'}=\frac{a}{\cos\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Ces résultats expriment que

Théorème V. **Chaque normale est égale à la racine carrée du produit des rayons vecteurs, multipliée par le rapport de l'axe non adjacent à l'autre axe.**

33. **Produit des normales.** Par la multiplication on a

$$\text{(XV)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad N.N' = rr'$$

Théorème VI. Le produit des deux normales est égal au produit des rayons vecteurs.

34. Nous trouvons ensuite

$$\text{(XVI)} \ldots \left\{ \begin{aligned} &\frac{N}{N'} = \frac{b^2}{a^2}, \quad N' - N = \frac{c^2}{ab}\sqrt{rr'} = \frac{c^2}{a\cos^2\varphi}, \\ &\frac{1}{N} - \frac{1}{N'} = \frac{c^2}{ab} \times \frac{1}{\sqrt{rr'}} = \frac{c^2}{b^2} \times \frac{\cos\varphi}{a}. \end{aligned} \right.$$

Théorème VII. 1[o] Les deux normales sont entre elles comme les carrés des axes non adjacents de l'ellipse;

2[o] la différence des normales est égale à la racine carré du produit des rayons vecteurs, multipliée par le rapport du carré de la distance focale au produit des axes;

3[o] la différence des inverses des normales est égale à l'inverse de la racine carrée du produit des rayons vecteurs, multipliée par le rapport du carré de la distance focale au produit des axes.

35. **Sous-tangentes.** Par les deux triangles rectangles *MPT, MQT'* nous avons

$$\text{(XII)} \ldots \left\{ \begin{aligned} t &= y\cot T = \frac{a(a^2-\varrho^2)}{c\sqrt{a^2-\varrho^2}} = \frac{a(rr'-b^2)}{c\sqrt{a^2-rr'}} \\ &= \frac{r'+r}{r'-r} \times \frac{b^2}{c}\operatorname{tang}\varphi, \\ t' &= x\operatorname{tang} T = \frac{b(\varrho^2-b^2)}{c\sqrt{a^2-\varrho^2}} = \frac{b(a^2-rr')}{c\sqrt{rr'-b^2}} = \frac{(r'-r)^2}{4c\operatorname{tang}\varphi}. \end{aligned} \right.$$

36. **Produit des sous-tangentes.** En multipliant membre à membre on trouve

$$\text{(XVIII)} \ldots tt' = \frac{ab}{c^2}\sqrt{(a^2-\varrho^2)(\varrho^2-b^2)} = \frac{ab}{c^2}\sqrt{(a^2-rr')(rr'-b^2)}$$
$$= \frac{b^2}{c^2} \times \frac{r'^2-r^2}{4} \times \operatorname{tang}\varphi,$$

ou encore

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad tt' = \tfrac{1}{2} rr' \sin 2T.$$

Théorème VIII. Le produit des deux sous-tangentes est égal au produit des rayons vecteurs, multiplié par le demi-sinus de la double inclinaison de la tangente sur le grand axe.

37. **Sous-normales.** Les deux triangles rectangles *MNE*, *MNQ* nous donnent

$$(\text{XIX}) \ldots \begin{cases} n = y\cot N = \dfrac{b^2}{ac}\sqrt{\varrho^2-b^2} = \dfrac{b^2}{ac}\sqrt{a^2-rr'} \\ \qquad = \dfrac{b^2}{c}\times\dfrac{r'-r}{r'+r}, \\ n' = x\operatorname{tang} N = \dfrac{a^2}{bc}\sqrt{a^2-\varrho^2} = \dfrac{a^2}{bc}\sqrt{rr'-b^2} \\ \qquad = \dfrac{a^2}{c}\operatorname{tang}\varphi. \end{cases}$$

38. **Produit des sous-normales.** En multipliant on trouve

$$(\text{XX}) \ldots nn' = \frac{ab}{c^2}\sqrt{(a^2-\varrho^2)(\varrho^2-b^2)} = \frac{ab}{c^2}\sqrt{(a^2-rr')(rr'-b^2)}$$

$$= \frac{r'^2-r^2}{4}\times\frac{b^2}{c^2}\times\operatorname{tang}\varphi$$

ou

$$(8) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots nn' = \tfrac{1}{2}rr'\sin 2N.$$

Théorème IX. Le produit des sous-normales est égal au produit des rayons vecteurs multiplié par le demi-sinus de la double inclinaison de la normale sur le grand axe.

39. Nous avons ensuite

$$(\text{XXI}) \ldots\ldots \frac{n}{n'} = \frac{b^3}{a^3}\sqrt{\frac{\varrho^2-b^2}{a^2-\varrho^2}} = \frac{b^3}{a^3}\sqrt{\frac{a^2-rr'}{rr'-b^2}}$$

$$= \frac{b^2}{a^2}\times\frac{r'-r}{r'+r}\times\operatorname{cotang}\varphi = \frac{N}{N'}\times\frac{r'-r}{r'+r}\times\operatorname{cotang}\varphi.$$

40. **Projections des tangentes et des normales sur les rayons vecteurs.** Ces projections sont

$$(XXII)\ldots\left\{\begin{aligned} T\sin\varphi &= \frac{a^2-\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2-b^2}} = \frac{rr'-b^2}{\sqrt{a^2-rr'}} = \frac{2(rr'-b^2)}{r'-r} \\ &= \frac{2b^2}{r'-r}\operatorname{tang}\varphi \\ T'\sin\varphi &= \sqrt{\varrho^2-b^2} = \sqrt{a^2-rr'} = \frac{r'-r}{2} \end{aligned}\right.$$

$$(XXIII)\ \ldots\left\{\begin{aligned} N\cos\varphi &= \frac{b}{a}\sqrt{rr'}\times\frac{b}{\sqrt{rr'}} = \frac{b^2}{a}, \\ N'\cos\varphi &= \frac{a}{b}\sqrt{rr'}\times\frac{b}{\sqrt{rr'}} = a; \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(XXIV)\ldots\left\{\begin{aligned} &T\sin\varphi\times T'\sin\varphi = a^2-\varrho^2 = b^2\operatorname{tang}\varphi, \\ &N\cos\varphi\times N'\cos\varphi = b^2. \end{aligned}\right.$$

Théorème X. Si l'on projette les deux tangentes sur les rayons vecteurs, 1° la projection de la tangente à l'axe des y est égale à la demi-différence des rayons vecteurs;

2° le produit des deux projections est égal à la différence des carrés du demi grand axe et du rayon central, ou égal au carré du demi petit axe multiplié par la tangente du demi-angle des rayons vecteurs.

Théorème XI. Si l'on projette les deux normales sur les rayons vecteurs,

1° la projection de la normale à l'axe des x est la troisième proportionnelle au demi grand axe et au demi petit axe;

2° la projection de la normale à l'axe des y est égale au demi grand axe;

3° le produit des deux projections est égal au carré du demi petit axe.

41. **Projections des rayons vecteurs sur la tangente et la normale.** On a, pour ces projections,

$$(XXV)\ldots\left\{\begin{aligned} r\sin\varphi &= \sqrt{\frac{r}{r'}(rr'-b^2)} = \sqrt{\frac{r}{r'}(a^2-\varrho^2)} = b\sqrt{\frac{r}{r'}\operatorname{tang}\varphi}, \\ r'\sin\varphi &= \sqrt{\frac{r'}{r}(rr'-b^2)} = \sqrt{\frac{r'}{r}(a^2-\varrho^2)} = b\sqrt{\frac{r'}{r}\operatorname{tang}\varphi}. \end{aligned}\right.$$

$$\text{(XXVI)} \ldots r\cos\varphi = b\sqrt{\frac{r}{r'}}, \quad r'\cos\varphi = b\sqrt{\frac{r'}{r}};$$

d'où

$$\text{(XXVII)} \ldots \begin{cases} r\sin\varphi \times r'\sin\varphi = a^2 - \varrho^2 = b^2\operatorname{tang}^2\varphi \\ r\cos\varphi \times r'\cos\varphi = b^2. \end{cases}$$

Ces valeurs prouvent que:

Théorème XII. 1° Le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur la normale, est égal à la différence des carrés du demi grand axe et du rayon central;

2° Le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur la tangente est constant et égal au carré du demi petit axe.

42. **Distances du centre aux intersections des axes avec la tangente et la normale.** Nous avons

$$\text{(XXVIII)} \begin{cases} OT = \tau = t + x = y\cot T + x = \dfrac{a(rr'-b^2)}{c\sqrt{a^2-rr'}} + \dfrac{a}{c}\sqrt{a^2-rr'} \\ \quad = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2-rr'}} = \dfrac{ac}{\sqrt{\varrho^2-b^2}} = \dfrac{r'+r}{r'-r}\times c, \\ OT' = \tau' = t' + y = x\operatorname{tang}T' + y = \dfrac{b(a^2-rr')}{c\sqrt{rr'-b^2}} + \dfrac{b}{c}\sqrt{rr'-b^2} \\ \quad = \dfrac{bc}{\sqrt{rr'-b^2}} = c\operatorname{cotang}\varphi; \end{cases}$$

$$\text{(XXIX)} \ldots \begin{cases} ON = \nu = x - n = x - \dfrac{b^2}{a^2}x = \dfrac{c^2}{a^2}x = \dfrac{c}{a}\sqrt{a^2-rr'} \\ \qquad = \dfrac{c}{b}\sqrt{\varrho^2-b^2}, \\ ON' = \nu' = n' - y = \dfrac{a^2}{b^2}y - y = \dfrac{c^2}{b^2}y = \dfrac{c}{b}\sqrt{rr'-b^2} \\ \qquad = \dfrac{c}{b}\sqrt{a^2-\varrho^2}, \end{cases}$$

ou

$$\nu = \frac{r'-r}{r'+r}\times c, \quad \nu' = c\operatorname{tang}\varphi.$$

Théorème XIII. 1° La distance du centre à l'intersection de la tangente avec le grand axe, est à la

demi-distance focale, comme la somme des rayons vecteurs est à leur différence;

2° La distance du centre à l'intersection de la normale avec le grand axe, est à la demi-distance focale, comme la différence des rayons vecteurs est à leur somme.

Théorème XIV. 1° La distance du centre à l'intersection de la tangente avec le petit axe, est égale à la demi-distance focale multipliée par la cotangente du demi-angle des rayons vecteurs;

2° La distance du centre à l'intersection de la normale avec le petit axe, est égale à la demi-distance focale multipliée par la tangente du demi-angle des rayons vecteurs.

43. Des valeurs précédentes on tire

$$OT \times ON = OT' \times ON' = c^2$$

ou

$$\text{(XXX)} \; \ldots \ldots \quad \tau\nu = \tau'\nu' = c^2.$$

puis

$$\text{(XXX bis)} \ldots \quad \frac{a^2}{\tau^2} + \frac{b^2}{\tau'^2} = 1, \quad a^2\nu^2 + b^2\nu'^2 = c^4.$$

Théorème XV. La demi-distance focale est moyenne proportionnelle entre les distances du centre aux intersections de la tangente et de la normale, soit avec l'axe des x, soit avec l'axe des y.

Théorème XV bis. Le lieu des points qui ont pour coordonnées les sous-normales des differents points d'une ellipse, est une deuxième ellipse dont les foyers sont situés sur le petit-axe de la première, et dont les axes sont $\frac{2(a^2-b^2)}{a}$ et $\frac{2(a^2-b^2)}{b}$, $2a$ et $2b$ étant les axes de la première.

44. Nous avons ensuite

$$(9)\ldots\quad\left\{\begin{aligned}\tau\tau' &= \frac{a^2b^2}{xy} = \frac{a^2b^2}{tt'} = \frac{abc^2}{\sqrt{(a^2-rr')(rr'-b^2)}}\\ &= \frac{abc^2}{\sqrt{(a^2-\rho^2)(\rho^2-b^2)}},\\ \nu\nu' &= \frac{c^4}{a^2b^2}xy = \frac{c^4nn'}{a^2b^2} = \frac{c^2}{ab}\sqrt{(a^2-rr')(rr'-b^2)}\\ &= \frac{c^2}{ab}\sqrt{(a^2-\rho^2)(\rho^2-b^2)};\end{aligned}\right.$$

ou

$$(\text{XXXI})\ldots\quad\left\{\begin{aligned}\tau\tau' &= \frac{r'+r}{r'-r}\times c^2\operatorname{cotang}\varphi,\\ \nu\nu' &= \frac{r'-r}{r'+r}\times c^2\operatorname{tang}\varphi;\end{aligned}\right.$$

puis

$$(\text{XXXII})\ldots\quad \frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau'^2} = \frac{a^2-rr'}{a^2c^2}+\frac{rr'-b^2}{b^2c^2} = \frac{rr'}{a^2b^2};$$

$$(\text{XXXIII})\ldots\quad \nu^2+\nu'^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2-rr')+\frac{c^2}{b^2}(rr'-b^2) = \frac{c^4rr'}{a^2b^2}.$$

Théorème XVI. 1° **La somme des carrés des inverses des distances du centre aux intersections de la tangente avec les deux axes, est égale au produit des rayons vecteurs, divisé par le carré du produit des demi-axes,**

2° **La somme des carrés des distances du centre aux intersections de la normale avec les deux axes, est égale à la quatrième puissance de la demi-distance focale, multipliée par la somme précédente;**

de sorte que

$$(\text{XXXIV})\ldots\ldots\quad \frac{\nu^2+\nu'^2}{c^4} = \frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau'^2}.$$

45. **Distances du centre à la tangente et à la normale.** Par la considération des trapèzes, on voit que ces distances sont, l'une égale à la demi-somme des distances des foyers à la tangente, et l'autre égale à la demi-différence des distances des foyers à la normale, c'est-à-dire que

la première d **est égale à la demi-somme des projections des rayons vecteurs sur la normale,**

et l'autre d' est égale à la demi-différence des projections des rayons vecteurs sur la tangente.

On a donc

$$\text{(XXXV)} \ldots \left\{ \begin{aligned} d &= \tfrac{1}{2}(r'+r)\cos\varphi = \frac{ab}{\sqrt{rr'}}, \\ d' &= \tfrac{1}{2}(r'-r)\sin\varphi = \sqrt{\frac{(a^2-rr')(rr'-b^2)}{rr'}} \\ &= \frac{c^2}{ab}\times\frac{xy}{\sqrt{rr'}}. \end{aligned} \right.$$

46. **Distances du centre aux projections des foyers sur la tangente et la normale.** En appelant ces distances α, β, on voit qu'elles sont les hypoténuses de deux triangles droits, dont les deux autres côtés sont, pour le premier, les demi-sommes des projections des rayons vecteurs sur la tangente et la normale, et pour le second les demi-différences de ces mêmes projections. On a donc

$$\alpha^2 = \tfrac{1}{4}(r'+r)^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi),$$
$$\beta^2 = \tfrac{1}{4}(r'-r)^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi);$$

d'où

$$\text{(XXXVI)} \ldots \quad \alpha = \tfrac{1}{2}(r'+r), \quad \beta = \tfrac{1}{2}(r'-r).$$

Théorème XVII. **Les distances du centre aux projections des foyers sur la tangente, sont égales à la demi-somme des rayons vecteurs; et les distances du centre aux projections des foyers sur la normale, sont égales à la demi-difference des rayons vecteurs.**

47. **Segments déterminés par les directrices sur la tangente et la normale.** Prolongeons la tangente et la normale, de part et d'autre du point M, jusqu'à la rencontre des directrices en S, S' et L, L'. Les angles aigus en S, S' seront les compléments de l'angle T, et les angles aigus en L, L' seront égaux à l'angle T.

Si nous menons par le point M la droite DD' parallèle au grand axe, nous aurons

$$MD = \frac{a^2}{c} - x = \frac{a}{c}\left(a - \frac{cx}{a}\right) = \frac{ar}{c},$$
$$MD' = \frac{a^2}{c} + x = \frac{a}{c}\left(a + \frac{cx}{a}\right) = \frac{ar'}{c};$$

par suite

$$(\text{XXXVII})\begin{cases} MS = \dfrac{MD}{\cos T} = \dfrac{ar}{c} : \dfrac{a}{c}\sqrt{\dfrac{rr'-b^2}{rr'}} = r\sqrt{\dfrac{rr'}{rr'-b^2}} \\ \qquad = \dfrac{r}{\sin\varphi}, \\ MS' = \dfrac{MD'}{\cos T} = \dfrac{ar'}{c} : \dfrac{a}{c}\sqrt{\dfrac{rr'-b^2}{rr'}} = r'\sqrt{\dfrac{rr'}{rr'-b^2}} \\ \qquad = \dfrac{r'}{\sin\varphi}; \end{cases}$$

$$(\text{XXXVIII})\begin{cases} ML = \dfrac{MD}{\sin T} = \dfrac{ar}{c} : \dfrac{b}{c}\sqrt{\dfrac{a^2-rr'}{rr'}} = \dfrac{ar}{b}\sqrt{\dfrac{rr'}{a^2-rr'}} \\ \qquad = \dfrac{r'+r}{r'-r}\times\dfrac{r}{\sin\varphi}. \\ ML' = \dfrac{MD'}{\sin T} = \dfrac{ar'}{c} : \dfrac{b}{c}\sqrt{\dfrac{a^2-rr'}{rr'}} = \dfrac{ar'}{b}\sqrt{\dfrac{rr'}{a^2-rr'}} \\ \qquad = \dfrac{r'+r}{r'-r}\times\dfrac{r}{\sin\varphi}. \end{cases}$$

Les deux premières valeurs prouvent que

Théorème XVIII. Les perpendiculaires élevées par les foyers sur les rayons vecteurs, rencontrent la tangente aux mêmes points que les directrices.

48. Des formules précédentes on déduit

$$(\text{XXXIX}) \ldots \quad \frac{ML}{MS} = \frac{ML'}{MS'} = \frac{r'+r}{r'-r}.$$

Théorème XIX. Les segments déterminés par chaque directrice sur la tangente et la normale sont entre eux comme la différence des rayons vecteurs est à leur somme.

49. On trouve encore que

$$MS^2 + ML^2 = \frac{c^2}{b^2}\times r^2 \times \frac{r^2r'^2}{(a^2-rr')(rr'-b^2)} = r^2 \times \frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{r^2r'^2}{x^2y^2},$$

$$MS'^2 + ML'^2 = \frac{c^2}{b^2}\times r'^2 \times \frac{r^2r'^2}{(a^2-rr')(rr'-b^2)} = r'^2 \times \frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{r^2r'^2}{x^2y^2};$$

de sorte que les segments, compris entre la tangente et la normale sur les directrices, sont

$$\text{(XL)} \ldots \quad SL = r \times \frac{arr'}{cxy}, \quad S'L' = r' \times \frac{arr'}{cxy}.$$

50. Conditions pour que deux diamètres 2ϱ, $2\varrho_1$ soient conjugués. Considérons deux diamètres conjugués 2ϱ, $2\varrho_1$, dirigés, l'un 2ϱ dans l'angle des x, y positifs, et, par suite l'autre dans l'angle des y positifs et des x négatifs. Appelons x, y les coordonnées de l'extrémité supérieure de 2ϱ, et x_1, y_1 celles de l'extrémité supérieure de $2\varrho_1$. Si nous désignons par r_1, r_1' les rayons vecteurs qui correspondent à $2\varrho_1$, nous aurons, en vertu des formules (I) et (IV)

$$\text{(10)} \ldots \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a}{c}\sqrt{\varrho^2 - b^2} = \frac{a}{c}\sqrt{a^2 - rr'}, \\ y &= \frac{b}{c}\sqrt{a^2 - \varrho^2} = \frac{b}{c}\sqrt{rr' - b^2}; \\ x_1 &= -\frac{a}{c}\sqrt{\varrho_1^2 - b^2} = -\frac{a}{c}\sqrt{a^2 - r_1 r_1'}, \\ y_1 &= \frac{b}{c}\sqrt{a^2 - \varrho_1^2} = \frac{b}{c}\sqrt{r_1 r_1' - b^2}. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients angulaires de ces deux diamètres seront donc

$$\text{(11)} \ldots m = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2 - \varrho^2}{\varrho^2 - b^2}}, \quad m' = \frac{y_1}{x_1} = -\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2 - \varrho_1^2}{\varrho_1^2 - b^2}}.$$

On trouve ainsi pour condition la relation

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{b^2}{a^2}\sqrt{\frac{(a^2 - \varrho^2)(a^2 - \varrho_1^2)}{(\varrho^2 - b^2)(\varrho_1^2 - b^2)}},$$

ce qui exige que

$$(a^2 - \varrho^2)(a^2 - \varrho_1^2) = (\varrho^2 - b^2)(\varrho_1^2 - b^2);$$

effectuant, réduisant et divisant par $a^2 - b^2$, on arrive à la relation connue

$$\text{(12)} \ldots \ldots \quad \varrho^2 + \varrho_1^2 = a^2 + b^2.$$

Mais en vertu de (III) nous avons

$$\text{(13)} \ldots \ldots \left\{ \begin{aligned} \varrho^2 &= a^2 + b^2 - rr', \\ \varrho_1^2 &= a^2 + b^2 - r_1 r_1'; \end{aligned} \right.$$

retranchant chacune de ces égalités de la précédente, on trouve

$$\text{(XLI)} \ldots \ldots \quad \varrho_1^2 = rr', \quad \varrho^2 = r_1 r_1'.$$

Théorème XX. Tout rayon central est moyen proportionnel entre les deux rayons vecteurs menés à l'extrémité de son conjugué.

51. Si nous ajoutons ces deux égalités et que nous comparions le résultat à (12), nous trouverons

(XLII) . . . . . . $rr' + r_1 r_1' = a^2 + b^2$

Théorème XXI. La somme des produits des rayons vecteurs menés aux extrémités de deux diamètres conjugués est constante, et égale à la somme des carrés des demi-axes.

52. Puisque $r + r' = r_1 + r_1' = 2a$, il vient

$$(r' - r)^2 \ = 4a^2 - 4rr',$$

$$(r_1 - r_1')^2 = 4a^2 - 4r_1 r_1';$$

d'où

$$(r'-r)^2 + (r_1 - r_1')^2 = 8a^2 - 4(rr' + r_1 r_1') = 8a^2 - 4(a^2 + b^2) = 4(a^2 - b^2)$$

ou

(XLIII) . . . . $(r' - r)^2 + (r_1 - r_1')^2 = 4c^2.$

Cette relation prouve que

Théorème XXII. La somme des carrés des différences des rayons vecteurs menés aux extrémités de deux diamètres conjugués, est constante et égale au carré de la distance focale.

52. Les deux égalités

$$r_1 + r_1' = 2a, \quad r_1 - r_1' = 2\sqrt{a^2 - \varrho^2}$$

donnent

(XLIV) . . $r_1 = a + \sqrt{a^2 - \varrho^2}, \quad r_1' = a - \sqrt{a^2 - \varrho^2}$

pour les valeurs des deux rayons vecteurs qui aboutissent à l'extrémité du rayon conjugué de ϱ.

53. Soit $2\varphi_1$ l'angle compris entre les rayons vecteurs r_1, r_1'. Dans l'égalité

(14) . . . . . $b = \sqrt{rr'} . \cos\varphi = \sqrt{r_1 r_1'} . \cos\varphi_1$

remplaçons $\sqrt{rr'}$, $\sqrt{r_1 r_1'}$ respectivement par leurs équivalents ϱ_1, ϱ; nous obtenons

$$\varrho_1 \cos\varphi = \varrho \cos\varphi_1,$$

d'où

$$\text{(XLV)} \ldots\ldots\ldots \quad \frac{2\varrho}{2\varrho_1} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}.$$

Théorème XXIII. **Deux diamètres conjugués sont entre eux comme les cosinus des demi-angles compris entre les rayons vecteurs qui aboutissent à leurs extrémités.**

54. On trouve ensuite

$$\text{(XLVI)} \ldots \left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi_1 = \dfrac{b}{\varrho}, \qquad \sin\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}}{\varrho}, \\ \qquad\qquad \tan\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}}{b}, \\ \cos 2\varphi_1 = \dfrac{rr' - c^2}{\varrho^2}, \ \sin 2\varphi_1 = \dfrac{2b}{\varrho^2}\sqrt{a^2 - rr'}, \\ \qquad\qquad \tan 2\varphi_1 = \dfrac{2b\sqrt{a^2 - rr'}}{rr' - c^2}. \end{array} \right.$$

55. Puisque

$$\cos\varphi = \frac{b}{\varrho_1}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\varrho_1}, \quad \tan\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - \varrho^2}}{b},$$

on voit que

$$\text{(XLVII)} \ldots \cos\varphi\cos\varphi_1 = \frac{b^2}{\varrho\varrho_1}, \ \sin\varphi\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{(a^2 - \varrho^2)(\varrho^2 - b^2)}}{\varrho\varrho_1};$$

$$\text{(XLIX)} \ldots \quad \tan\varphi\tan\varphi_1 = \frac{\sqrt{(a^2 - \varrho^2)(\varrho^2 - b^2)}}{b^2},$$

$$\text{(XLIX)} \quad \frac{\tan\varphi}{\tan\varphi_1} = \sqrt{\frac{a^2 - \varrho^2}{\varrho^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{rr' - b^2}{a^2 - rr'}}, \ \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1} = \frac{\varrho\sqrt{a^2 - \varrho^2}}{\varrho_1\sqrt{\varrho^2 - b^2}}.$$

56. **Angle des diamètres conjugués.** Représentons par V l'angle compris entre les rayons conjugués ϱ, ϱ_1; et designons par α, α_1 les inclinaisons de ces rayons sur le grand axe de l'ellipse. Nous avons

$$\sin V = \sin(\alpha_1 - \alpha) = \sin\alpha_1 \cos\alpha - \cos\alpha_1 \sin\alpha,$$

$$\cos V = \cos(\alpha_1 - \alpha) = \cos\alpha_1 \cos\alpha + \sin\alpha_1 \sin\alpha;$$

mais, eu égard à (10) et à (12),

$$(15)\ldots\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{y}{\rho}=\dfrac{b\sqrt{a^2-\rho^2}}{c\rho}, & \cos\alpha=\dfrac{x}{\rho}=\dfrac{a\sqrt{\rho^2-b^2}}{c\rho};\\ \sin\alpha_1=\dfrac{y_1}{\rho_1}=\dfrac{b\sqrt{\rho^2-b^2}}{c\rho_1}, & \cos\alpha_1=\dfrac{x_1}{\rho_1}=-\dfrac{a\sqrt{a^2-\rho^2}}{c\rho_1};\end{cases}$$

il vient, par conséquent,

$$(\mathrm{L})\begin{cases}\sin V=\dfrac{ab(\rho^2-b^2)}{c^2\rho\rho_1}+\dfrac{ab(a^2-\rho^2)}{c^2\rho\rho_1}=\dfrac{ab}{\rho\rho_1}=\dfrac{ab}{\rho\sqrt{rr'}}\\ \qquad=\dfrac{a}{\rho}\cos\varphi=\dfrac{a}{\rho_1}\cos\varphi_1,\\ \cos V=\dfrac{(b^2-a^2)\sqrt{(a^2-\rho^2)(\rho^2-b^2)}}{c^2\rho\rho_1}=-\dfrac{\sqrt{(a^2-\rho^2)(\rho^2-b^2)}}{\rho\rho_1}.\end{cases}$$

Si nous comparons les seconds membres aux valeurs (XLVI), nous trouverons que

$$(\mathrm{LI})\ldots\ldots\begin{cases}\sin V=\dfrac{a}{b}\cos\varphi\cos\varphi_1,\\ \cos V=-\sin\varphi\sin\varphi_1,\\ \operatorname{tang}V=-\dfrac{a}{b}\cot\varphi\cot\varphi_1.\end{cases}$$

Théorème XXIV. 1° Le sinus de l'angle compris entre deux diamètres conjugués est au produit des cosinus des demi-angles compris entre les rayons vecteurs correspondants, comme le grand axe de l'ellipse est au petit axe;

2° le cosinus de cet angle est égal au produit des sinus des demi-angles compris entre les rayons vecteurs;

3° le produit des tangentes des trois angles V, φ, φ_1 est constant et égal au rapport des axes.

57. Nous avons trouvé au n° 32 que

$$a\cos\varphi=\frac{b^2}{N};$$

il vient donc

$$(\mathrm{LII})\ldots\ldots\ldots\quad \rho\sin V=\frac{b^2}{N}.$$

Théorème XXV. La perpendiculaire abaissée de l'ex-

trémité d'un diamètre sur son conjugué est une troisième proportionnelle à la normale vers le grand axe et au demi petit axe.

58. Appelons T_1, T_1' et N_1, N_1' les tangentes et les normales menées à l'extrémité de ϱ_1. Nous aurons

$$\text{(LIII)} \ldots \begin{cases} T_1 = \sqrt{r_1 r_1'}\sqrt{\dfrac{a^2-\varrho_1^{\,2}}{\varrho_1^{\,2}-b^2}} = \varrho\sqrt{\dfrac{\varrho^2-b^2}{a^2-\varrho^2}} = \dfrac{\varrho^2 \sin\varphi_1}{\varrho_1 \sin\varphi}, \\ T_1' = \sqrt{r_1 r_1'}\sqrt{\dfrac{\varrho_1^{\,2}-b^2}{a^2-\varrho_1^{\,2}}} = \varrho\sqrt{\dfrac{a^2-\varrho^2}{\varrho^2-b^2}} = \varrho_1 \times \dfrac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1}. \end{cases}$$

$$\text{(LIV)} \ldots\ldots \begin{cases} N_1 = \dfrac{b}{a}\sqrt{r_1 r_1'} = \dfrac{b}{a}\varrho, \\ N_1' = \dfrac{a}{b}\sqrt{r_1 r_1'} = \dfrac{a}{b}\varrho; \end{cases}$$

d'où

$$\text{(LV)} \ldots\ldots \quad T_1 . T_1' = N_1 . N_1' = \varrho^2.$$

Théorème XXVI. **Tout rayon central est moyen proportionnel entre les deux tangentes et aussi entre les deux normales, menées à l'extrémité de son conjugué.**

59. Il en résulte donc

$$\text{(LVI)} \ldots\ldots \begin{cases} TT' + T_1 T_1' = a^2 + b^2, \\ NN' + N_1 N_1' = a^2 + b^2. \end{cases}$$

Théorème XXVII. **La somme des produits des tangentes menées aux extrémités de deux diamètres conjugués et la somme des produits des normales menées aux mêmes extrémités, sont égales entre elles et à la somme des carrés des demi-axes.**

60. Les angles que font les lignes précédentes avec le grand axe sont

$$\text{(LVII)} \ldots \begin{cases} \operatorname{tang} T_1 = \cot N_1 = \dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a^2-\varrho^2}{\varrho^2-b^2}} = \dfrac{b}{a} \times \dfrac{\varrho_1 \sin\varphi}{\varrho \sin\varphi_1}, \\ \sin T_1 = \cos N_1 = \dfrac{b}{c}\sqrt{\dfrac{a^2-\varrho^2}{\varrho^2}} = \dfrac{b}{c} \times \dfrac{\varrho_1 \sin\varphi}{\varrho}, \\ \cos T_1 = \sin N_1 = \dfrac{a}{c}\sqrt{\dfrac{\varrho^2-b^2}{\varrho^2}} = \dfrac{a}{c} \times \sin\varphi_1. \end{cases}$$

61. Si nous désignons de même par t_1, t_1' et n_1, n_1' les sous-tangentes et les sous-normales, nous aurons

$$\text{(LVIII)} \quad \left\{ \begin{aligned} t_1 &= \frac{a(\rho^2-b^2)}{c\sqrt{a^2-\rho^2}}, \quad t_1' = \frac{b(a^2-\rho^2)}{c\sqrt{\rho^2-b^2}}; \\ n_1 &= \frac{b^2}{ac}\sqrt{a^2-\rho^2}, \quad n_1' = \frac{a^2}{ac}\sqrt{\rho^2-b^2}. \end{aligned} \right.$$

On en déduit

$$t_1 t_1' = n_1 n_1' = \frac{ab}{c^2}\sqrt{(a^2-\rho^2)(\rho^2-b^2)} = \frac{b^2}{c^2} \times \frac{r_1{}^2-r_1{}^2}{4} \times \operatorname{tang}\varphi_1.$$

Si nous rapprochons ce dernier resultat des valeurs (XVIII) et (XX), nous voyons que

$$\text{(LIX)} \quad xy = x_1 y_1 = tt' = t_1 t_1' = nn' = n_1 n_1'.$$

Théorème XXVIII. Lorsqu'on mène des tangentes et des normales aux extrémités de deux rayons conjugués, les produits des sous-tangentes par rapport à chaque rayon, sont égaux entre eux, ainsi que les produits des sous-normales, et tous ces produits sont égaux au produit des coordonnées de chaque extrémité.

62. Si nous comparons les formules (X) et (LIII), ainsi que les formules (XIV) et (LIV), nous en tirons

$$\text{(LX)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{T_1}{T''} = \frac{T_1'}{T} = \frac{N_1}{N} = \frac{N_1'}{N'} = \frac{\rho}{\rho_1}, \\ &TT_1 = T''T_1' = NN_1' = N_1 N' = \rho\rho_1. \end{aligned} \right.$$

Théorème XXIX. Si on mène des tangentes aux extrémités de deux rayons conjugués, le produit des tangentes vers l'axe des x, et celui des tangentes vers l'axe des y, sont égaux entre eux et égaux au produit des deux rayons conjugués.

63. Si l'on rapproche les valeurs données par les formules des tangentes, sous-tangentes et sous-normales, on trouvera que

$$\text{(LXI)} \ldots \sqrt{a^2-\varrho^2} = c\sqrt{\frac{T}{T+T'}} = c\sqrt{\frac{T_1'}{T_1+T_1'}}$$

$$= c\sqrt[3]{\frac{t^2t'}{a^2b}} \qquad = c\sqrt[3]{\frac{t_1t_1'^2}{ab^2}}$$

$$= \frac{bcn'}{a^2} \qquad = \frac{acn_1}{b^2},$$

$$\text{(LXII)} \ldots \sqrt{\varrho^2-b^2} = c\sqrt{\frac{T'}{T+T'}} = c\sqrt{\frac{T_1}{T_1+T_1'}}$$

$$= c\sqrt[3]{\frac{tt'^2}{ab^2}} \qquad = c\sqrt[3]{\frac{t_1^2t_1'}{a^2b}}$$

$$= \frac{acn}{b^2} \qquad = \frac{bcn_1'}{a^2}.$$

On en conclut

$$\text{(LXIII)} \ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{t}{t_1'} = \dfrac{t_1}{t'} = \dfrac{t+t_1}{t'+t_1'} = \dfrac{a}{b}, \\[2ex] \dfrac{n}{n_1'} = \dfrac{n_1}{n'} = \dfrac{n+n_1}{n'+n_1'} = \dfrac{b^3}{a^3}. \end{array} \right.$$

64. **Problème I. Déterminer le lieu des intersections des tangentes menées par les extrémités des diamètres conjugués.**

Dans l'équation générale des tangentes à l'ellipse

$$\text{(16)} \ldots \ldots \ldots \ldots a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2,$$

mettons à la place de x', y' leurs valeurs du nº 22, prises positivement; nous obtiendrons ainsi

$$\text{(LXIV)} \ldots ay\sqrt{a^2-\varrho^2} + bx\sqrt{\varrho^2-b^2} = \pm\, abc$$

pour les équations des deux tangentes menées aux extrémités du diamètre 2ϱ dirigé dans l'angle des x, y positifs; par analogie

$$\text{(LXV)} \ldots ay\sqrt{\varrho^2-b^2} - bx\sqrt{a^2-\varrho^2} = \pm\, abc$$

seront les équations des deux tangentes menées aux extrémités du diamètre conjugué 2ϱ.

Elevons au carré les membres de ces denx équations et ajoutons les résultats; nous aurons

(LXVI) . . . . $a^2y^2 + b^2x^2 = 2a^2b^2$

pour l'équation du lieu cherché. Ce lieu est donc une ellipse semblable à l'ellipse donnée, et dont les axes sont $2a\sqrt{2}$, $2b\sqrt{2}$.

65. **Problème II.** Determiner le lieu des intersections des tangentes menées par les extrèmités des diamètres et par les extrémités des symétriques de leurs conjugués.

Il suffira, pour le trouver, d'éliminer ρ entre les deux équations

$$ay\sqrt{a^2-\rho^2} + bx\sqrt{\rho^2-b^2} = \pm abc,$$

$$ay\sqrt{\rho^2-b^2} + bx\sqrt{a^2-\rho^2} = \pm abc,$$

dont la seconde représente les deux tangentes menées aux extrémités du diamètre $2\rho_1$ dirigé dans l'angle des x, y positifs.

Elevant au carré et retranchant, on trouve

$$a^2y^2(a^2+b^2-2\rho^2) + b^2x^2(2\rho^2-b^2-a^2) = 0$$

ou

$$a^2y^2 - b^2x^2 = 0,$$

c'est-à-dire

(LXVII) . . . . $y = \pm \frac{b}{a}x,$

pour les équations du lieu cherché. Ainsi

Théorème XXX. Les tangentes menées aux extrémités des diamètres et des symétriques de leurs conjugués, se coupent sur les diagonales du rectangle construit sur les axes de l'ellipse.

66. **Problème III.** Calculer le lieu des intersections des normales menées par les extrémités des diamètres conjugués.

Dans l'équation générale de la normale à l'ellipse

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x')$$

ou mieux de son équivalente

(17) . . . . $a^2\frac{x}{x'} - b^2\frac{y}{y'} = c^2,$

remplaçons x', y' par leurs valeurs du n° 22, prises positivement; nous aurons

$$\text{(LXVIII)} \ldots \quad \frac{ax}{\sqrt{\varrho^2-b^2}} - \frac{by}{\sqrt{a^2-\varrho^2}} = \pm c$$

pour les équations des deux normales menées aux extrémités d'un diamètre 2ϱ dirigé dans l'angle des x, y positifs; par suite

$$\text{(LXIX)} \ldots \quad \frac{ax}{\sqrt{a^2-\varrho^2}} + \frac{by}{\sqrt{\varrho^2-b^2}} = \pm c$$

seront les équations des deux normales aux extrémités du diamètre $2\varrho_1$ conjugué de 2ϱ.

Il suffira d'éliminer ϱ entre les deux équations précédentes, pour avoir l'équation du lieu demandé.

Pour faire cette élimination, nous poserons

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-\varrho^2}} = X, \quad \frac{1}{\sqrt{\varrho^2-b^2}} = Y,$$

ce qui donne

$$(18) \ldots \quad \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} = c^2,$$

et change nos équations en

$$axY - byX = \pm c,$$

$$byY + axX = \pm c.$$

De celles-ci nous tirons

$$Y = \frac{\pm c(ax+by)}{a^2x^2+b^2y^2},$$

$$X = \frac{\pm c(ax-by)}{a^2x^2+b^2y^2}.$$

Si nous mettons ces valeurs dans l'équation (18), nous trouverons

$$\frac{(a^2x^2+b^2y^2)^2}{(ax+by)^2} + \frac{(a^2x^2+b^2y^2)^2}{(ax-by)^2} = c^4,$$

ou

$$\text{(LXX)} \ldots \quad (a^2x^2+b^2y^2)^3 = c^4(a^2x^2-b^2y^2)^2$$

pour l'équation du lieu demandé.

Elle représente une courbe du sixième degré, symétrique par rapport aux deux axes de l'ellipse, et passant par son centre.

67. **Problème IV. Déterminer le lieu des intersections des normales, menées par les extrémités des diamètres et par les extrémités des symétriques de leurs conjugués.**

Les équations des premières normales seront toujours

$$\frac{ax}{\sqrt{\varrho^2-b^2}}-\frac{by}{\sqrt{a^2-\varrho^2}}=\pm c,$$

tandisque celles des secondes seront

$$\frac{ax}{\sqrt{a^2-\varrho^2}}-\frac{by}{\sqrt{\varrho^2-b^2}}=\pm c.$$

Elevant les deux membres de ces équations au carré et retranchant les résultats, on trouve

$$(a^2x^2-b^2y^2)\left(\frac{1}{\varrho^2-b^2}-\frac{1}{a^2-\varrho^2}\right)=0,$$

ce qui donne les deux droites

(LXXI) . . . . $y=\pm\frac{a}{b}x$

pour le lieu cherchè.

Sur chacun des axes on prendra, de part et d'autre du centre une longueur égale à l'autre demi-axe; par les extrémités de ces longueurs on mènera des parallèles aux axes; on formera ainsi un rectangle, dont les deux diagonales seront le lieu demandé.

§. VIII. Détermination des éléments de l'hyperbole en valeur des rayons vecteurs et du rayon central.

68. Supposons l'hyperbole rapportée à ses axes et représentée par l'équation

(1) . . . . $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2.$

Les éléments de cette courbe peuvent se déduire de ceux de l'ellipse, en changeant dans ces derniers les signes de b^2 et r et en y remplaçant l'angle φ par $90^0-\varphi$.

69. Nous obtenons ainsi les valeurs suivantes.

Coordonnées d'un point de l'hyperbole en valeur du rayon central.

$$(\mathrm{I}) \ldots \left\{ \begin{array}{l} x = \pm \frac{a}{c}\sqrt{\varrho^2 + b^2}, \quad y = \pm \frac{b}{c}\sqrt{\varrho^2 - a^2}, \\ xy = \pm \frac{ab}{c^2}\sqrt{(\varrho^2 - a^2)(\varrho^2 + b^2)}. \end{array} \right.$$

Rayon central et distance focale en valeur des rayons vecteurs et de l'angle compris.

$$(\mathrm{II}) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \varrho^2 = a^2 + rr'\cos^2\varphi, \\ c^2 = a^2 + rr'\sin^2\varphi. \end{array} \right.$$

Rayon central en fonction des axes et des rayons vecteurs.

$$(\mathrm{III}) \ldots\ldots\ldots \quad \varrho^2 = a^2 - b^2 + rr'.$$

Théorème I. **Le carré du rayon central, mené en un point de l'hyperbole, est égal à la différence des carrés des demi-axes, augmentée du produit des rayons vecteurs.**

Coordonnées d'un point de l'hyperbole en fonction des axes et des rayons vecteurs.

$$(\mathrm{IV}) \ldots \left\{ \begin{array}{l} x = \pm \frac{a}{c}\sqrt{a^2 + rr'}, \quad y = \pm \frac{b}{c}\sqrt{rr' - b^2}, \\ xy = \pm \frac{ab}{c^2}\sqrt{(a^2 + rr')(rr' - b^2)}. \end{array} \right.$$

Angle des rayons vecteurs en valeur de ces rayons et des axes.

$$(\mathrm{V}) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{rr'}}, \quad \cos\varphi = \sqrt{\frac{rr' - b^2}{rr'}} = \sqrt{\frac{\varrho^2 - a^2}{rr'}}, \\ \mathrm{tang}\,\varphi = \frac{b}{\sqrt{rr' - b^2}} = \frac{b}{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}; \end{array} \right.$$

$$\text{(VI)} \ldots \begin{cases} \cos 2\varphi = \dfrac{2b^2 - rr'}{rr'} = \dfrac{\rho^2 - c^2}{rr'}, \\[2ex] \sin 2\varphi = \dfrac{2b\sqrt{rr'-b^2}}{rr'} = \dfrac{2b\sqrt{\rho^2-a^2}}{rr'}, \\[2ex] \operatorname{tang} 2\varphi = \dfrac{2b\sqrt{rr'-b^2}}{2b^2-rr'} = \dfrac{2b\sqrt{\rho^2-a^2}}{\rho^2-c^2}, \end{cases}$$

Coordonnées d'un point de l'hyperbole en valeur des rayons vecteurs et de l'angle compris. Puisque

$$(2) \ldots \begin{cases} \sqrt{\rho^2+b^2} = \sqrt{a^2+rr'} = \dfrac{r'+r}{2} = \sqrt{c^2+rr'\cos^2\varphi}, \\[2ex] \sqrt{\rho^2-a^2} = \sqrt{rr'-b^2} = \sqrt{rr'}\cos\varphi = b\cot\varphi; \end{cases}$$

on a aussi

$$\text{(VII)} \ldots \begin{cases} x = \pm \dfrac{a(r'+r)}{2c} = \mp \dfrac{r'^2-r^2}{4c}, \\[2ex] y = \pm \dfrac{b^2}{c} \operatorname{cotang}\varphi, \\[2ex] xy = \pm \dfrac{b^2}{c^2} \times \dfrac{r'^2-r^2}{4} \times \operatorname{cotang}\varphi. \end{cases}$$

Théorème II. L'abscisse d'un point de l'hyperbole est égale à la différence des carrés des rayons vecteurs, divisée par la double distance focale; et l'ordonnée est égale au carré de l'axe non transverse, multiplié par la cotangente du demi-angle des rayons vecteurs et divisé par la demi-distance focale.

70. Nous obtenons ensuite pour les tangentes et les normales et tout ce qui en dépend, les expressions suivantes.

Inclinaisons de la tangente et de la normale sur les axes. Puisque

$$\operatorname{tang} T = \frac{b^2 x}{a^2 y},$$

il vient

$$(\text{VIII})\begin{cases}\tan T=\cot N=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\varrho^2+b^2}{\varrho^2-a^2}}=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2+rr'}{rr'-b^2}}=\frac{r'+r}{r'-r}\tan\varphi,\\ \sin T=\cos N=\frac{b}{c}\sqrt{\frac{\varrho^2+b^2}{rr'}}=\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2+rr'}{rr'}}=\frac{r'+r}{2c}\sin\varphi,\\ \cos T=\sin N=\frac{a}{c}\sqrt{\frac{\varrho^2-a^2}{rr'}}=\frac{a}{c}\sqrt{\frac{rr'-b^2}{rr'}}=\frac{r'-r}{2c}\cos\varphi.\end{cases}$$

Théorème III. 1°. Les cosinus des angles que fait la tangente avec l'axe transverse et le rayon vecteur, sont entre eux comme l'axe transverse est à la distance focale; 2°. les sinus de ces angles sont entre eux comme la somme des rayons vecteurs est à la distance focale; 3°. les tangentes des mêmes angles sont entre eux comme la somme des rayons vecteurs est à leur différence.

Tangentes.

$$(\text{IX})\ \ldots\begin{cases}T=\frac{y}{\sin T}=\sqrt{rr'}\sqrt{\frac{\varrho^2-a^2}{\varrho^2+b^2}}=\sqrt{rr'}\sqrt{\frac{rr'-b^2}{rr'+a^2}}\\ \qquad=\frac{b}{a}\sqrt{rr'}\cot T,\\ T'=\frac{x}{\cos T}=\sqrt{rr'}\sqrt{\frac{\varrho^2+b^2}{\varrho^2-a^2}}=\sqrt{rr'}\sqrt{\frac{rr'+a^2}{rr'-b^2}}\\ \qquad=\frac{a}{b}\sqrt{rr'}\cot T';\end{cases}$$

$$(\text{X})\ \ldots\ldots\begin{cases}T=\frac{b^2}{a\sin\varphi\tan T}=\frac{2rr'\cos\varphi}{r'+r},\\ T'=\frac{a\tan T}{\sin\varphi}=\frac{r'+r}{2\cos\varphi}.\end{cases}$$

$$(\text{XI})\ \ldots\ldots\ldots\ T\,.\,T'=\frac{2xy}{\sin 2T}=rr'.$$

Théorème IV. 1°. Le produit des deux tangentes, l'une vers l'axe des x et l'autre vers l'axe des y, est égal au produit des deux rayons vecteurs.

2°. Le produit des coordonnées du point de contact est égal au produit des rayons vecteurs, multiplié par le demi-sinus de la double inclinaison de la tangente sur l'axe transverse.

(XII) . .
$$\left\{\begin{aligned}
\frac{T}{T'} &= \frac{\rho^2-a^2}{\rho^2+b^2} = \frac{rr'-b^2}{rr'+a^2} = \frac{b^2}{a^2}\cot^2 T \\
&= \frac{4b^2}{(r'+r)^2}\cot^2\varphi, \\
T+T' &= \frac{c^2\sqrt{rr'}}{\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2+b^2)}} = c^2\sqrt{\frac{rr'}{(rr'+a^2)(rr'-b^2)}} \\
&= \frac{2c^2}{(r'+r)\cos\varphi}, \\
\frac{1}{T}+\frac{1}{T'} &= \frac{c^2}{\sqrt{rr'(\rho^2-a^2)(\rho^2+b^2)}} \\
&= \frac{c^2}{\sqrt{rr'(rr'+a^2)(rr'-b^2)}} = \frac{2c^2}{(r'+r)rr'\cos\varphi}:
\end{aligned}\right.$$

Sous-tangentes.

(XIII) . .
$$\left\{\begin{aligned}
t &= y\cot T = \frac{a(\rho^2-a^2)}{c\sqrt{\rho^2+b^2}} = \frac{a(rr'-b^2)}{c\sqrt{rr'+a^2}} \\
&= \frac{r'-r}{r'+r}\times\frac{b^2}{c}\cot\varphi, \\
t' &= x\,\mathrm{tang}\,T = \frac{b(\rho^2+b^2)}{c\sqrt{\rho^2-a^2}} = \frac{b(rr'+a^2)}{c\sqrt{rr'-b^2}} \\
&= \frac{(r'+r)^2}{4c}\,\mathrm{tang}\,\varphi.
\end{aligned}\right.$$

(XIV) . .
$$\left\{\begin{aligned}
tt' &= \frac{ab}{c^2}\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2+b^2)} = \frac{ab}{c^2}\sqrt{(rr'+a^2)(rr'-b^2)} \\
&= \frac{b^2}{c^2}\times\frac{r'^2-r^2}{4}\cot\varphi, \\
tt' &= \tfrac{1}{2}rr'\sin 2T.
\end{aligned}\right.$$

Théorème V. Le produit des deux sous-tangentes est égal au produit des rayons vecteurs, multiplié par le demi-sinus de la double inclinaison de la tangente sur l'axe transverse.

Normales.

(XV) . .
$$\left\{\begin{aligned}
N &= \frac{y}{\sin N} = \frac{b}{a}\sqrt{rr'} = \frac{b^2}{a\sin\varphi}, \\
N' &= \frac{x}{\cos N} = \frac{a}{b}\sqrt{rr'} = \frac{a}{\sin\varphi}.
\end{aligned}\right.$$

Théorème VI. Chaque normale est égale à la racine carrée du produit des rayons vecteurs, multipliée par le rapport de l'axe non adjacent à l'autre axe.

$$\text{(XVI)} \ldots\ldots\ldots \quad N.N' = rr'.$$

Théorème VII. Le produit des normales est égal au produit des rayons vecteurs.

$$\text{(XVII)} \ldots \begin{cases} \dfrac{N}{N'} = \dfrac{b^2}{a^2}, \quad N' - N = \dfrac{c^2}{ab}\sqrt{rr'} = \dfrac{c^2}{a\sin^2\varphi}, \\ \dfrac{1}{N} - \dfrac{1}{N'} = \dfrac{c^2}{ab} \times \dfrac{1}{\sqrt{rr'}} = \dfrac{c^2}{b^2} \times \dfrac{\sin\varphi}{a}. \end{cases}$$

Théorème VIII. Les deux normales sont entre elles comme les carrés des axes non adjacents de l'hyperbole.

Sous-normales.

$$\text{(XVIII)} \ldots \begin{cases} n = y\cot N = \dfrac{b^2}{ac}\sqrt{\varrho^2 + b^2} = \dfrac{b^2}{ac}\sqrt{rr' + a^2} \\ \qquad = \dfrac{b^2}{c} \times \dfrac{r' + r}{r' - r}, \\ n' = x\,\mathrm{tang}\,N = \dfrac{a^2}{bc}\sqrt{\varrho^2 - a^2} = \dfrac{a^2}{bc}\sqrt{rr' - b^2} \\ \qquad = \dfrac{a^2}{c} \times \cot\varphi. \\ nn' = \dfrac{ab}{c}\sqrt{(\varrho^2 - a^2)(\varrho^2 + b^2)} = \dfrac{ab}{c^2}\sqrt{(rr' + a^2)(rr' - b^2)} \\ \qquad = \dfrac{r'^2 - r^2}{4} \times \dfrac{b^2}{c^2} \times \cot\varphi \end{cases}$$

$$nn' = \tfrac{1}{2} rr' \sin 2N.$$

Théorème IX. Le produit des sous-normales est égal au produit des rayons vecteurs multiplié par le demi-sinus de la double inclinaison de la normale sur l'axe transverse.

71. **Projections des tangentes et des normales sur les rayons vecteurs.**

$$(\text{XIX}) \ldots \begin{cases} T\cos\varphi = \dfrac{\rho^2-a^2}{\sqrt{\rho^2+b^2}} = \dfrac{rr'-b^2}{\sqrt{rr'+a^2}} = \dfrac{2(rr'-b^2)}{r'+r} \\ \qquad\qquad = \dfrac{2b^2}{r'+r}\cot\varphi, \\ T'\cos\varphi = \sqrt{\rho^2+b^2} = \sqrt{rr'+a^2} = \dfrac{r'+r}{2}; \end{cases}$$

$$(\text{XX}) \ldots\ldots \begin{cases} N\sin\varphi = \dfrac{b}{a}\sqrt{rr'} \times \dfrac{b}{\sqrt{rr'}} = \dfrac{b^2}{a}, \\ N'\sin\varphi = \dfrac{a}{b}\sqrt{rr'} \times \dfrac{b}{\sqrt{rr'}} = a; \end{cases}$$

$$(\text{XXI}) \ldots \begin{cases} T\cos\varphi \times T'\cos\varphi = \rho^2 - a^2 = b^2\cot\varphi, \\ N\sin\varphi \times N'\sin\varphi = b^2. \end{cases}$$

Théorème X. Si l'on projette les deux tangentes sur les rayons vecteurs,

1° la projection de la tangente vers l'axe des y est égale à la demi-somme des rayons vecteurs;

2° le produit des deux projections est égal à la différence des carrés du rayon central et du demi-axe transverse, ou égal au carré du demi-axe non transverse multiplié par la cotangente du demi angle des rayons vecteurs.

Théorème XI. Si l'on projette les deux normales sur les rayons vecteurs,

1° la projection de la normale vers l'axe des x est la troisième proportionnelle au demi-axe transverse et au demi-axe non transverse;

2° la projection de la normale vers l'axe des y est égale au demi-axe transverse;

3° le produit des deux projections est égal au carré du demi-axe non transverse.

Projections des rayons vecteurs sur la tangente et la normale.

$$\text{(XXII)}\ldots\begin{cases} r\cos\varphi = \sqrt{\frac{r}{r'}(rr'-b^2)} = \sqrt{\frac{r}{r'}(\varrho^2-a^2)} = b\sqrt{\frac{r}{r'}}\cot\varphi, \\ r'\cos\varphi = \sqrt{\frac{r'}{r}(rr'-b^2)} = \sqrt{\frac{r'}{r}(\varrho^2-a^2)} = b\sqrt{\frac{r'}{r}}\cot\varphi. \end{cases}$$

$$\text{(XXIII)}\ .\ .\ .\ r\sin\varphi = b\sqrt{\frac{r}{r'}},\quad r'\sin\varphi = b\sqrt{\frac{r'}{r}};$$

$$\text{(XXIV)}\ .\ .\begin{cases} r\cos\varphi\times r'\cos\varphi = \varrho^2-a^2 = b^2\cot^2\varphi, \\ r\sin\varphi\times r'\sin\varphi = b^2. \end{cases}$$

Théorème XII. 1° Le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur la normale, est égal à la différence des carrés du rayon central et du demi-axe transverse

2° Le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur la tangente est constant et égal au carré du demi-axe non transverse.

72. **Distances du centre aux intersections des axes avec la tangente et la normale.**

$$\text{(XXV)}\ .\ .\begin{cases} OT = \tau = \frac{ac}{\sqrt{rr'+a^2}} = \frac{ac}{\sqrt{\varrho^2+b^2}} = \frac{r'-r}{r'+r}\times c, \\ OT' = \tau' = \frac{bc}{\sqrt{rr'-b^2}} = c\tang\varphi; \end{cases}$$

$$\text{(XXVI)}\ .\ .\begin{cases} ON = \nu = \frac{c}{a}\sqrt{rr'+a^2} = \frac{c}{a}\sqrt{\varrho^2+b^2} = \frac{r'+r}{r'-r}\times c, \\ ON' = \nu' = \frac{c}{b}\sqrt{rr'-b^2} = \frac{c}{b}\sqrt{\varrho^2-a^2} = c\cot\varphi. \end{cases}$$

Théorème XIII. 1° La distance du centre à l'intersection de la tangente avec l'axe transverse, est à la demi-distance focale, comme la différence des rayons vecteurs est à leur somme;

2° La distance du centre à l'intersection de la normale avec l'axe transverse, est à la demi-distance focale, comme la somme des rayons vecteurs est à leur différence.

Théorème XIV. 1° La distance du centre à l'inter-

section de la tangente avec l'axe non transverse, est égale à la demi-distance focale multipliée par la tangente du demi-angle des rayons vecteurs;

2° La distance du centre à l'intersection de la normale avec l'axe non transverse, est égale à la demi-distance focale multipliée par la cotangente du demi-angle des rayons vecteurs.

(XXVII) . . . . . . $\tau v = \tau' v' = c^2.$

(XXVIII) $\tau\tau' = \frac{r'-r}{r'+r} \times c^2 \operatorname{tang} \varphi, \quad vv' = \frac{r'+r}{r'-r} \times c^2 \operatorname{cotang} \varphi;$

(XXIX) . . $\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau'^2} = \frac{rr'}{a^2b^2}, \quad v^2 + v'^2 = \frac{c^4 rr'}{a^2b^2}.$

(XXX) . . . . . $v^2 + v'^2 = c^4\left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau'^2}\right).$

Théorème XV. La demi-distance focale est moyenne proportionnelle entre les distances du centre aux intersections de la tangente et de la normale, soit avec l'axe des x, soit avec l'axe des y.

Théorème XVI. 1° La somme des carrés des inverses des distances du centre aux intersections de la tangente avec les deux axes, est égale au produit des rayons vecteurs, divisé par le carré du produit des demi-axes,

2° La somme des carrés des distances du centre aux intersections de la normale avec les deux axes, est égale à la quatrième puissance de la demi-distance focale, multipliée par la somme précédente.

Distances du centre à la tangente et à la normale.

(XXXI) $d = \frac{ab}{\sqrt{rr'}}, \quad d' = \frac{c^2}{ab} \times \frac{xy}{\sqrt{rr'}} = \frac{\sqrt{rr'}}{ab} \times \tfrac{1}{2}c^2 \sin 2T.$

(XXXII) . . . $\begin{cases} dd' = \frac{c^2}{rr'} \times xy = \tfrac{1}{2}c^2 \sin 2T, \\ \frac{d'}{d} = \frac{c^2}{a^2b^2} \times xy = \frac{rr'}{a^2b^2} \times \tfrac{1}{2}c^2 \sin 2T. \end{cases}$

Théorème XVII. Le produit des distances du centre à la tangente et à la normale est égale au carré de la

demi-distance focale multiplié par le demi-sinus de la double inclinaison de la tangente sur l'axe transverse.

73. **Segments déterminés par les directrices sur la tangente et la normale.**

$$(\text{XXXIII})\dots\left\{\begin{array}{l} MS = \dfrac{r}{\cos\varphi}, \quad MS' = \dfrac{r'}{\cos\varphi}; \\ ML = \dfrac{r'-r}{r'+r}\times\dfrac{r}{\cos\varphi}, \quad ML' = \dfrac{r'-r}{r'+r}\times\dfrac{r'}{\cos\varphi}. \end{array}\right.$$

Théorème XVIII. **Les perpendiculaires élevées par les foyers sur les rayons vecteurs, rencontrent la tangente aux mêmes points que les directrices.**

Théorème XIX. **Chaque directrice determine sur la tangente et la normale des segments qui sont entre eux comme la somme des rayons vecteurs est à leur différence.**

74. **Segments déterminés par la tangente et la normale sur les directrices.**

$$(\text{XXXIV})\dots SL = \frac{2ar}{c\sin 2T}, \quad S'L' = \frac{2ar'}{c\sin 2T}.$$

75. **Eléments de l'hyperbole conjuguée.** Cette courbe est représentée par l'équation

$$(3)\ \dots\dots\dots\quad a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2.$$

Pour appliquer à cette hyperbole les formules précédentes il suffira d'y changer a en b, x en y et réciproquement.

Désignons par x_1, y_1 les coordonnées d'un point M_1 de la courbe, par ϱ_1 le rayon central, par r_1, r_1' les rayons vecteurs, et par $2\varphi_1$ l'angle compris.

En faisant les changements indiqués, nous obtenons

$$
\text{(XXXV)}\begin{cases}
y = \pm \frac{b}{c}\sqrt{\varrho_1^2+a^2} = \pm \frac{b}{c}\sqrt{r_1 r_1' + b^2} = \pm \frac{b(r_1+r_1')}{2c} \\
\qquad = \pm \frac{r_1'^2 - r_1^2}{4c}, \\
x = \pm \frac{a}{c}\sqrt{\varrho_1^2-b^2} = \pm \frac{a}{c}\sqrt{r_1 r_1' - a^2} = \pm \frac{a^2}{c}\operatorname{cotang}\varphi_1, \\
xy = \pm \frac{ab}{c^2}\sqrt{(\varrho_1^2+a^2)(\varrho_1^2-b^2)} \\
\qquad = \pm \frac{ab}{c^2}\sqrt{(r_1 r_1'-a^2)(r_1 r_1'+b^2)} = \pm \frac{a^2}{c^2}\times\frac{r_1'^2-r^2}{4}\cot\varphi_1,
\end{cases}
$$

pour les coordonnées du point M_1;

$$
\text{(XXXVI)} \quad \ldots\ldots \begin{cases}
\varrho_1^2 = b^2 + r_1 r_1' \cos^2\varphi_1, \\
c^2 = b^2 + r_1 r_1' \sin^2\varphi_1
\end{cases}
$$

pour les valeurs de ϱ_1 et c en fonction de b, r_1, r_1' et φ_1;

$$
\text{(XXXVII)} \ldots\ldots \varrho_1^2 = b^2 - a^2 + r_1 r_1'
$$

pour celle de ϱ_1 en fonction de a, b, r_1 et r_1';

$$
\text{(XXXVIII)}\begin{cases}
\sin\varphi_1 = \frac{a}{\sqrt{r_1 r_1'}}, \quad \cos\varphi_1 = \sqrt{\frac{r_1 r_1' - a^2}{r_1 r_1'}} \\
\qquad = \sqrt{\frac{\varrho_1^2 - b^2}{r_1 r_1'}}, \\
\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{a}{\sqrt{r_1 r_1' - a^2}} = \frac{a}{\sqrt{\varrho_1^2 - b^2}}
\end{cases}
$$

pour la valeur du demi-angle φ_1 compris entre les rayons vecteurs; enfin

$$
\text{(XXXIX)}\begin{cases}
\cos 2\varphi_1 = \frac{2a^2 - r_1 r_1'}{r_1 r_1'} = \frac{\varrho_1^2 - c^2}{r_1 r_1'}, \\
\sin 2\varphi_1 = \frac{2a\sqrt{r_1 r_1' - a^2}}{r_1 r_1'} = \frac{2a\sqrt{\varrho_1^2 - b^2}}{r_1 r_1'}, \\
\operatorname{tang} 2\varphi_1 = \frac{2a\sqrt{r_1 r_1' - a^2}}{2a^2 - r_1 r_1'} = \frac{2a\sqrt{\varrho_1^2 - b^2}}{\varrho_1^2 - c^2},
\end{cases}
$$

pour la valeur de l'angle $2\varphi_1$ compris entre les rayons vecteurs.

76. Nons trouvons ensuite

$$(\text{XL}) \ldots \begin{cases} \operatorname{tang} T_1 = \cot N_1 = \dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{\varrho_1^2+a^2}{\varrho_1^2-b^2}} = \dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{r_1r_1'+b^2}{r_1r_1'-a^2}} \\ \qquad = \dfrac{r_1'+r_1}{r_1'-r_1}\operatorname{tang}\varphi_1, \\ \sin T_1 = \cos N_1 = \dfrac{a}{c}\sqrt{\dfrac{\varrho_1^2+a^2}{r_1r_1'}} = \dfrac{a}{c}\sqrt{\dfrac{r_1r_1'+b^2}{r_1r_1'}} \\ \qquad = \dfrac{r_1'+r_1}{2c}\sin\varphi_1, \\ \cos T_1 = \sin N_1 = \dfrac{b}{c}\sqrt{\dfrac{\varrho_1^2-b^2}{r_1r_1'}} = \dfrac{b}{c}\sqrt{\dfrac{r_1r_1'-a^2}{r_1r_1'}} \\ \qquad = \dfrac{r_1'-r_1}{2c}\cos\varphi_1, \end{cases}$$

pour les inclinaisons de la tangente et de la normale sur l'axe transverse;

$$(\text{XLI}) \ldots \begin{cases} T_1 = \sqrt{r_1r_1'}\sqrt{\dfrac{\varrho_1^2-b^2}{\varrho_1^2+a^2}} = \sqrt{r_1r_1'}\sqrt{\dfrac{r_1r_1'-a^2}{r_1r_1'+b^2}} \\ \qquad = \dfrac{a}{b}\sqrt{r_1r_1'}\cot T_1, \\ T_1' = \sqrt{r_1r_1'}\sqrt{\dfrac{\varrho_1^2+a^2}{\varrho_1^2-b^2}} = \sqrt{r_1r_1'}\sqrt{\dfrac{r_1r_1'+b^2}{r_1r_1'-a^2}} \\ \qquad = \dfrac{b}{a}\sqrt{r_1r_1'}\cot T_1', \end{cases}$$

$$(\text{XLII}) \ldots \begin{cases} T_1 = \dfrac{a^2}{b\sin\varphi_1\operatorname{tang} T_1} = \dfrac{2r_1r_1'\cos\varphi_1}{r_1'+r_1}, \\ T_1' = \dfrac{a\operatorname{tang} T_1}{\sin\varphi_1} = \dfrac{r_1'+r_1}{2\cos\varphi_1}, \end{cases}$$

$$(\text{XLIII})\quad T_1 . T_1' = r_1r_1', \quad \frac{T_1}{T_1'} = \frac{4a^2}{(r_1+r_1')^2}\cot^2\varphi_1 = \frac{(r_1'-r_1)^2\cos^2\varphi_1}{(r_1'+r_1)^2\sin^2\varphi_1};$$

pour les valeurs des tangentes;

$$(\text{XLIV}) \begin{cases} t_1 = \dfrac{b(\varrho_1^2-b^2)}{c\sqrt{\varrho_1^2+a^2}} = \dfrac{b(r_1r_1'-a^2)}{c\sqrt{r_1r_1'+b^2}} = \dfrac{r_1'-r_1}{r_1'+r_1}\times\dfrac{a^2}{c}\cot\varphi_1, \\ t_1' = \dfrac{a(\varrho_1^2+a^2)}{c\sqrt{\varrho_1^2-b^2}} = \dfrac{a(r_1r_1'+b^2)}{c\sqrt{r_1r_1'-a^2}} = \dfrac{(r_1'+r_1)^2}{4c}\operatorname{tang}\varphi_1; \end{cases}$$

$$\text{(XLV)}\quad t_1 t_1' = \frac{ab}{c^2}\sqrt{(\varrho_1^2+a^2)(\varrho_1^2-b^2)} = \frac{ab}{c^2}\sqrt{(r_1 r_1'+b^2)(r_1 r_1'-a^2)}$$
$$= \frac{a^2}{c^2}\times\frac{r_1'^2-r_1^2}{4}\times\cot\varphi_1 = \tfrac{1}{2} r_1 r_1' \sin 2T_1\,;$$

pour les sous-tangentes et leur produit;

77. Puis nous obtenons

$$\text{(XLVI)} \ldots\ldots \begin{cases} N_1 = \dfrac{a}{b}\sqrt{r_1 r_1'} = \dfrac{a^2}{b\sin\varphi_1}, \\ N_1' = \dfrac{b}{a}\sqrt{r_1 r_1'} = \dfrac{b}{\sin\varphi_1}, \\ N_1 \,.\, N_1' = r_1 r_1' = \dfrac{a^2}{\sin^2\varphi_1} \end{cases}$$

pour les normales et leur produit;

$$\text{(XLVII)} \begin{cases} n_1 = \dfrac{a^2}{bc}\sqrt{\varrho_1^2+a^2} = \dfrac{a^2}{bc}\sqrt{r_1 r_1'+b^2} = \dfrac{a^2}{c}\times\dfrac{r_1'+r_1}{r_1'-r_1}, \\ n_1' = \dfrac{b^2}{ac}\sqrt{\varrho_1^2-b^2} = \dfrac{b^2}{ac}\sqrt{r_1 r_1'-a^2} = \dfrac{b^2}{c}\times\cot\varphi_1, \\ n_1 n_1' = \dfrac{ab}{c}\sqrt{(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_1^2+a^2)} \\ \quad = \dfrac{ab}{c^2}\sqrt{(r_1 r_1'-a^2)(r_1 r_1'+b^2)} = \dfrac{r_1'^2-r_1^2}{4}\times\dfrac{a^2}{c^2}\cot\varphi_1 \\ \quad = \tfrac{1}{2} r_1 r_1' \sin 2N_1 \end{cases}$$

pour les valeurs des sous-normales et de leur produit.

78. On verra enfin que

$$\text{(XLVIII)} \begin{cases} T_1 \cos\varphi_1 = \dfrac{\varrho_1^2-b^2}{\sqrt{\varrho_1^2+a^2}} = \dfrac{r_1 r_1'-a^2}{\sqrt{r_1 r_1'+b^2}} = \dfrac{2(r_1 r_1'-a^2)}{r_1'+r} \\ \qquad\qquad = \dfrac{2a^2}{r_1'+r_1}\cot\varphi_1, \\ T_1'\cos\varphi_1 = \sqrt{\varrho_1^2+a^2} = \sqrt{r_1 r_1'+b^2} = \dfrac{r_1'+r_1}{2}\,; \end{cases}$$

$$\text{(XLIX)} \ldots \begin{cases} N_1 \sin\varphi_1 = \dfrac{a}{b}\sqrt{r_1 r_1'}\times\dfrac{a}{\sqrt{r_1 r_1'}} = \dfrac{a^2}{b}, \\ N_1'\sin\varphi_1 = \dfrac{b}{a}\sqrt{r_1 r_1'}\times\dfrac{a}{\sqrt{r_1 r_1'}} = b, \end{cases}$$

sont les projections des tangentes et des normales sur les rayons vecteurs et donnent

$$T_1 \cos\varphi_1 \times T_1' \cos\varphi_1 = \varrho_1^2 - b^2 = a^2 \cot\varphi_1,$$

$$N_1 \sin\varphi_1 \times N_1' \sin\varphi_1 = a^2;$$

puis que

$$(\mathrm{L}) \ldots \begin{cases} \tau_1 = \dfrac{bc}{\sqrt{r_1 r_1' + b^2}} = \dfrac{bc}{\sqrt{\varrho_1^2 + a^2}} = \dfrac{r_1' - r_1}{r_1' + r_1} \times c, \\ \tau_1' = \dfrac{ac}{\sqrt{r_1 r_1' - a^2}} = \dfrac{ac}{\sqrt{\varrho_1^2 - b^2}} = c \tang\varphi_1, \end{cases}$$

$$(\mathrm{LI}) \ldots \begin{cases} \nu_1 = \dfrac{c}{b}\sqrt{r_1 r_1' + b^2} = \dfrac{c}{b}\sqrt{\varrho_1^2 + a^2} = \dfrac{r_1' + r_1}{r_1' - r_1} \times c, \\ \nu_1' = \dfrac{c}{a}\sqrt{r_1 r_1' - a^2} = \dfrac{c}{a}\sqrt{\varrho_1^2 - b^2} = c \operatorname{cotang}\varphi_1 \end{cases}$$

sont les distances du centre aux intersections des axes avec la tangente et la normale, et que

$$(\mathrm{LII}) \begin{cases} d_1 = \dfrac{ab}{\sqrt{r_1 r_1'}}, \quad d_1' = \dfrac{c^2}{ab} \times \dfrac{x_1 y_1}{\sqrt{r_1 r_1'}} = \dfrac{\sqrt{r_1 r_1'}}{ab} \times \tfrac{1}{2} c^2 \sin 2T_1 \\ d_1 d_1' = \dfrac{c^2}{r_1 r_1'} \times x_1 y_1 = \tfrac{1}{2} c^2 \sin 2T_1 \\ \dfrac{d_1'}{d_1} = \dfrac{c^2}{a^2 b^2} \times x_1 y_1 = \dfrac{r_1 r_1'}{a^2 b^2} \times \tfrac{1}{2} c^2 \sin 2T_1 \end{cases}$$

sont les distances du centre à la tangente et à la normale.

79. Les segments déterminés par les directrices sur la tangente et la normale seront

$$(\mathrm{LIII}) \ldots \begin{cases} M_1 S_1 = \dfrac{r_1}{\cos\varphi_1}, \quad M_1 S_1' = \dfrac{r_1'}{\cos\varphi_1}, \\ M_1 L_1 = \dfrac{r_1' - r_1}{r_1' + r_1} \times \dfrac{r_1}{\cos\varphi_1}, \quad M_1 L_1' = \dfrac{r_1' - r_1}{r_1' + r_1} \times \dfrac{r_1'}{\cos\varphi_1}; \end{cases}$$

et on aura pour les segments compris sur les directrices entre la tangente et la normale

$$(\mathrm{LIV}) \ldots\ldots S_1 L_1 = \frac{2br_1}{c \sin 2T_1}, \quad S_1' L_1' = \frac{2br_1}{c \sin 2T_1}.$$

80. Supposons que les deux diamètres 2ϱ, $2\varrho_1$ soient conjugués, de sorte que

$$(4) \ldots\ldots\ldots \quad \varrho^2 - \varrho_1^2 = a^2 - b^2.$$

Combinons cette équation successivement avec chacune des suivantes

$$(5) \ldots\ldots \quad \begin{cases} \varrho^2 = a^2 - b^2 + rr', \\ \varrho_1^2 = b^2 - a^2 + r_1 r_1', \end{cases}$$

et nous trouvons

$$(\text{LV}) \ldots\ldots \quad \varrho^2 = r_1 r_1', \quad \varrho_1^2 = rr'.$$

Théorème XX. Dans l'hyperbole, tout rayon central est moyen proportionnel entre les deux rayons vecteurs menés à l'extrémité du rayon correspondant dans l'hyperbole conjuguée.

81. Si nous retranchons l'une de l'autre ces deux dernières égalités et que nous comparions le résultat à (4) nous obtiendrons

$$(\text{LVI}) \ldots\ldots \quad r_1 r_1' - rr' = a^2 - b^2.$$

Théorème XXI. Dans deux hyperboles conjuguées, la différence des produits des rayons vecteurs menés à deux points conjugués est constante et égale à la différence des carrés des axes transverses.

82. Nous avons

$$r' - r = 2a, \quad r_1' - r_1 = 2b,$$

d'où nous tirons

$$(r + r')^2 = 4a^2 + 4rr', \quad (r_1 + r_1')^2 = 4b^2 + 4r_1 r_1';$$

retranchant la seconde égalité de la première, il vient

$$(r + r')^2 - (r_1 + r_1')^2 = 4(a^2 - b^2) - 4(r_1 r_1' - rr');$$

mais, en vertu de la relation (LVI) le second membre est nul; on a donc

$$(\text{LVII}) \ldots\ldots \quad r + r' = r_1 + r_1'.$$

Théorème XII. Dans deux hyperboles conjuguées, les sommes des rayons vecteurs qui aboutissent à deux points conjugués, sont égales.

83. Puisque

$$r_1' + r_1 = r' + r = 2a + 2r,$$

$$r_1' - r_1 = 2b,$$

il vient

$$\text{(LVIII)} \ldots \ldots r_1' = a + b + r, \quad r_1 = a - b + r$$

pour les valeurs des deux rayons vecteurs qui aboutissent, dans la seconde hyperbole, à l'extrémité du rayon conjugué de ϱ auquel aboutit r.

84. Les relations de condition

$$\varrho^2 - \varrho_1^2 = a^2 - b^2, \quad \varrho^2 = r_1 r_1', \quad \varrho_1^2 = rr'$$

transforment les expressions (XXXVIII) et (XXXIX) dans les suivantes:

$$\text{(LIX)} \quad \sin\varphi_1 = \frac{a}{\varrho}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho}, \quad \operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{a}{\sqrt{\varrho^2 - a^2}};$$

$$\text{(LX)} \ldots \sin 2\varphi_1 = \frac{2a\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho^2}, \quad \cos 2\varphi_1 = \frac{\varrho^2 - 2a^2}{\varrho^2},$$

$$\operatorname{tang} 2\varphi_1 = \frac{2a\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho^2 - 2a^2}.$$

85. Nous avons trouvé au n° 69, formules (V) que

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho_1}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{\sqrt{\varrho^2 - a^2}};$$

si nous comparons ces valeurs à (LIX), nous obtiendrons

$$\text{(LXI)} \ldots \ldots \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} = \frac{2\varrho}{2\varrho_1}, \quad \frac{\operatorname{cotang}\varphi}{\operatorname{cotang}\varphi_1} = \frac{2a}{2b}.$$

Théorème XIII. Dans deux hyperboles conjuguées, si l'on mène des rayons vecteurs aux extrémités de deux diamètres conjugués, 1° les cosinus des demi-angles compris sont entre eux comme ces diamètres; 2° les cotangentes des mêmes angles forment un rapport constant, égal au rapport des axes transverses.

85. Divisons la première des relations (LXI) par la seconde, il viendra

$$\text{(LXII)} \ldots \ldots \ldots \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1} = \frac{2\varrho}{2\varrho_1} : \frac{2a}{2b}.$$

Théorème XIV. **Dans deux hyperboles conjuguées le rapport de deux diamètres conjugués, divisé par le rapport des axes transverses, est égal au rapport des sinus des demi-angles compris entre les rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités de ces diamètres.**

86. Les coordonnées de l'extrémité de ϱ étant, d'après n[0] 69,

$$x = \frac{a}{c}\sqrt{\varrho^2 + b^2} = \frac{a}{c}\sqrt{a^2 + rr'} = \frac{a(r+r')}{2c},$$

$$y = \frac{b}{c}\sqrt{\varrho^2 - a^2} = \frac{b}{c}\sqrt{rr' - b^2} = \frac{b^2}{c}\operatorname{cotang}\varphi,$$

celles de l'extrémité de ϱ_1 seront, en vertu de la formule (XXXV),

$$\text{(LXIII)} \ldots \begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{c}\sqrt{\varrho^2 - a^2} = \dfrac{a}{c}\sqrt{rr' - b^2} = \dfrac{ab}{c}\operatorname{cotang}\varphi, \\[2ex] y_1 = \dfrac{b}{c}\sqrt{\varrho^2 + b^2} = \dfrac{b}{c}\sqrt{rr' + a^2} = \dfrac{b(r+r')}{2c}; \end{cases}$$

on en tire

$$\text{(LXIV)} \ldots xy = x_1 y_1 = \frac{a}{c^2}\sqrt{(\varrho^2 - a^2)(\varrho^2 + b^2)}$$

$$= \frac{ab}{c^2}\sqrt{(rr' + a^2)(rr' - b^2)} = \frac{ab}{c^2} \times \frac{r+r'}{2} \times \operatorname{cotang}\varphi.$$

87. Nous trouvons ensuite

$$\text{(LXV)} \begin{cases} \operatorname{tang} T_1 = \dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{\varrho^2 + b^2}{\varrho^2 - a^2}} = \dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{rr' + a^2}{rr' - b^2}} = \dfrac{r'^2 - r^2}{4b^2} \times \operatorname{tang}\varphi, \\[3ex] \sin T_1 = \dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{\sqrt{\varrho^2 + b^2}}{\varrho} = \dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{\sqrt{rr' + a^2}}{\varrho} = \dfrac{r'^2 - r^2}{4c\varrho}, \\[3ex] \cos T_1 = \dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho} = \dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{\sqrt{rr' - b^2}}{\varrho} = \dfrac{b^2}{c\varrho}\operatorname{cotang}\varphi, \end{cases}$$

pour l'inclinaison sur l'axe transverse de la première hyperbole, de la tangente menée dans la conjuguée, à l'extrémité M_1 du diamètre conjugué de 2ϱ.

88. Les tangentes et les normales en M_1 seront

$$(\text{LXVI})\left\{\begin{aligned} T_1 &= \varrho\sqrt{\frac{\varrho^2-a^2}{\varrho^2+b^2}} = \varrho\sqrt{\frac{rr'-b^2}{rr'+a^2}} = \frac{2b\varrho}{r+r'}\operatorname{cotang}\varphi, \\ T_1' &= \varrho\sqrt{\frac{\varrho^2+b^2}{\varrho^2-a^2}} = \varrho\sqrt{\frac{rr'+a^2}{rr'-b^2}} = \frac{(r+r')\varrho}{2b}\operatorname{tang}\varphi, \end{aligned}\right.$$

$$(\text{LXVII}) \; \ldots\ldots \quad N_1 = \frac{a\varrho}{b}, \quad N_1' = \frac{b\varrho}{a},$$

d'où on tire

$$(\text{LXVIII}) \; \ldots \quad T_1 \times T_1' = N_1 \times N_1' = \varrho^2.$$

Théorème XV. Dans deux hyperboles conjuguées, le produit des tangentes, menées dans l'une d'elles à l'extrémité d'un rayon, est égal au produit des normales, et aussi égal au carré du rayon conjugué dans l'autre hyperbole.

89. Nous obtenons pour les sous-tangentes et les sous-normales:

$$(\text{LXIX})\left\{\begin{aligned} t_1 &= \frac{b(\varrho^2-a^2)}{c\sqrt{\varrho^2+b^2}} = \frac{b(rr'-b^2)}{c\sqrt{rr'+a^2}} = \frac{2a^2b^2}{c\varrho(r+r')}\operatorname{cotang}\varphi, \\ t_1' &= \frac{a(\varrho^2+b^2)}{c\sqrt{\varrho^2-a^2}} = \frac{a(rr'+a^2)}{c\sqrt{rr'-b^2}} = \frac{\varrho(r+r')^2}{4ac}; \end{aligned}\right.$$

$$(\text{LXX})\left\{\begin{aligned} n_1 &= \frac{a^2}{bc}\sqrt{\varrho^2+b^2} = \frac{a^2}{bc}\sqrt{rr'+a^2} = \frac{a^2(r+r')}{2bc}, \\ n_1' &= \frac{b^2}{ac}\sqrt{\varrho^2-a^2} = \frac{b^2}{ac}\sqrt{rr'-b^2} = \frac{b^3}{ac}\operatorname{cotang}\varphi; \end{aligned}\right.$$

d'où il nous vient

$$(\text{LXXI}) \quad t_1t_1' = n_1n_1' = x_1y_1 = nn' = tt' = \frac{b^2}{c^2} \times \frac{r'^2-r^2}{4} \times \operatorname{cotang}\varphi.$$

Théorème XVI. Dans deux hyperboles conjugués, si, par les extrémités de deux diamètres conjugués, on mène des tangentes, le produit des sous-tangentes et celui des sous-normales, par rapport à l'extrémité d'un diamètre, sont égaux entre eux et égaux aux mêmes produits par rapport à l'extrémité du diamètre conjugué, et ces produits sont encore égaux aux produits des coordonnées des points de contact.

90. Les projections des tangentes et des normales en M_1 sur les rayons vecteurs seront

$$\text{(LXXII)} \quad \begin{cases} T_1 \cos\varphi_1 = \dfrac{2ab}{r+r'} \cot\varphi, \quad T_1' \cos\varphi_1 = \dfrac{r+r'}{2}; \\ N_1 \sin\varphi_1 = \dfrac{a^2}{b}, \quad N_1' \sin\varphi_1 = b; \end{cases}$$

mais nous avons trouvé

$$T\cos\varphi = \frac{2b^2}{r+r'}\cos\varphi, \quad T'\cos\varphi = \frac{r+r'}{2};$$

$$N\sin\varphi = \frac{b^2}{a}, \qquad N'\sin\varphi = a;$$

d'où nous tirons

$$\text{(LXXIII)} \quad \frac{T\cos\varphi}{T_1\cos\varphi_1} = \frac{N\sin\varphi}{N_1'\sin\varphi_1} = \frac{N'\sin\varphi}{N_1\sin\varphi_1} = \frac{2b}{2a},$$

$$\text{(LXXIV)} \ldots \quad T_1\cos\varphi_1 \times T_1'\cos\varphi_1 = ab\cot\varphi,$$

$$\text{(LXXV)} \ldots \quad N_1\sin\varphi_1 \times N'\sin\varphi_1 = a^2,$$

$$\text{(LXXVI)} \ldots \quad T'\cos\varphi = T_1'\cos\varphi_1,$$

$$\text{(LXXVII)} \ldots \frac{T'\cos\varphi}{N'\sin\varphi} = \frac{r'+r}{r'-r}, \quad \frac{T_1'\cos\varphi_1}{N_1'\sin\varphi_1} = \frac{r_1'+r_1}{r_1'-r_1}.$$

Théorème XVII. Dans deux hyperboles conjuguées, si l'on mène des tangentes et des normales par les extrémités de deux diamètres conjugués, et qu'on projette ces lignes sur les rayons vecteurs,

1° le rapport des projections des tangentes vers l'axe des x est égal au rapport inverse des axes;

2° les projections des tangentes vers l'axe des y sont égales entre elles;

3° le produit des projections des deux tangentes à l'extrémité d'un diamètre, est égal au produit des axes transverses, multiplié par la cotangente du demi-angle compris entre les rayons vecteurs qui aboutissent à l'extrémité du diamètre conjugué;

4° le produit des projections des deux normales à l'extrémité d'un diamètre est égal au carré du demi-axe non transverse;

5⁰ le rapport des projections de la tangente et de la normale vers l'axe des y est égal au rapport de la somme des rayons vecteurs à leur différence.

91. Nous avons, pour les distances du centre aux intersections des axes avec les tangentes et les normales;

$$\text{(LXXVIII)}\ldots\begin{cases}\tau_1 = \dfrac{bc}{\sqrt{\varrho^2+b^2}} = \dfrac{bc}{\sqrt{rr'+a^2}} = \dfrac{2bc}{r+r'},\\[2ex] \tau_1' = \dfrac{ac}{\sqrt{\varrho^2-a^2}} = \dfrac{ac}{\sqrt{rr'-b^2}} = \dfrac{ac}{b}\operatorname{tang}\varphi;\end{cases}$$

$$\text{(LXXIX)}\ldots\begin{cases}\nu_1 = \dfrac{c}{b}\sqrt{\varrho^2+b^2} = \dfrac{c}{b}\sqrt{rr'+a^2} = \dfrac{(r+r')c}{2b},\\[2ex] \nu_1' = \dfrac{c}{a}\sqrt{\varrho^2-a^2} = \dfrac{c}{a}\sqrt{rr'-b^2} = \dfrac{bc}{a}\operatorname{cotang}\varphi;\end{cases}$$

mais au n⁰ 72 nous avons aussi trouvé

$$\tau = \frac{2ac}{r+r'}, \qquad \tau' = c\operatorname{tang}\varphi,$$

$$\nu = \frac{r'+r}{2a}\times c, \quad \nu' = c\operatorname{cotang}\varphi.$$

Comparant ces valeurs et les précédentes, on voit que

$$\text{(LXXX)} \ldots \quad \frac{\tau}{\tau_1} = \frac{\tau'}{\tau_1'} = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{\nu_1'}{\nu'} = \frac{a}{b};$$

$$\text{(LXXXI)} \ldots \quad \tau\nu = \tau'\nu' = \tau_1\nu_1 = \tau_1'\nu_1' = c^2;$$

$$\text{(LXXXII)}\ldots\begin{cases}\tau\tau' = \tau_1\tau_1' = \dfrac{r'-r}{r'+r}\times c^2\operatorname{tang}\varphi,\\[2ex] \nu\nu' = \nu_1\nu_1' = \dfrac{r'+r}{r'-r}\times c^2\operatorname{cotang}\varphi.\end{cases}$$

Théorème XVIII. 1⁰ Les tangentes menées aux extrémités de deux diamètres conjugués coupent chaque axe à des distances du centre, qui sont entre elles comme le premier axe est au second;

2⁰ les produits des distances déterminées par les tangentes sur les deux axes sont égaux, ainsi que ceux des distances formées par les normales;

3° chacun des premiers produits divisé par l'un des seconds, est égal au carré du rapport de la différence des rayons vecteurs à leur somme, multiplié par le carré de la tangente du demi-angle compris entre ces rayons.

92. Les distances du centre à la tangente $T_1 T_1'$ et à la normale $N_1 N_1'$ seront, d'après (LII),

$$\text{(LXXXIII)}\ d_1 = \frac{ab}{\varrho}, \quad d_1' = \frac{b}{\varrho} \cdot \frac{r+r'}{2} \cdot \cot\varphi = \frac{a}{\varrho_1} \cdot \frac{r_1+r_1'}{2} \cdot \cot\varphi_1 = \frac{r_1+r_1'}{2} \cos\varphi_1;$$

et, comme nous avons trouvé

$$d = \frac{ab}{\varrho_1}, \quad d' = \frac{b}{\varrho_1} \cdot \frac{r+r'}{2} \cdot \cot\varphi = \frac{a}{\varrho} \cdot \frac{r_1+r_1'}{2} \cdot \cot\varphi_1 = \frac{r+r'}{2} \cos\varphi$$

il vient

$$\text{(LXXXIII bis)} \ldots \quad d\varrho_1 = d_1 \varrho = ab;$$

$$\text{(LXXXIV)} \ldots \quad dd_1 = \frac{a^2b^2}{\varrho\varrho_1};$$

$$\text{(LXXXV)} \ldots \quad \frac{d}{d_1} = \frac{d'}{d_1'} = \frac{\varrho_1}{\varrho};$$

$$\text{(LXXXVI)} \ldots \frac{1}{d^2} - \frac{1}{d'^2} = \frac{\varrho^2 - \varrho_1^2}{a^2b^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}.$$

Théorème XIX. Dans toute hyperbole 1° la distance du centre à chaque tangente est égale au produit des demi-axes divisé par le conjugué du rayon mené au point de contact;

2° la distance du centre à chaque normale est égale à la demi-somme des rayons vecteurs menés au point de contact, multipliée par le cosinus du demi-angle compris.

Théorème XX. Dans deux hyperboles conjugués, 1° la différence des inverses des carrés des demi-axes transverses est égale à la différence des inverses des carrés des distances du centre aux tangentes menées aux extrémités de deux diamètres conjugués.

2° le rapport des distances du centre aux tangentes

et le rapport des distances du centre aux normales sont égaux entre eux et égaux au rapport des diamètres conjugués.

93. Par le n° 79 nous voyons que les directrices déterminent sur la tangente $T_1 T_1'$ et la normale $N_1 N_1'$, menées en M_1, conjugué de M, les segments

$$(\mathrm{LXXXVII})\left\{\begin{aligned} M_1 S_1 &= \frac{r_1 \varrho}{\varrho_1 \cos\varphi}, & M_1 S_1' &= \frac{r_1' \varrho}{\varrho_1 \cos\varphi}; \\ M_1 L_1 &= \frac{2 b r_1 \varrho}{\varrho_1 (r'+r)\cos\varphi}, & M_1 L_1' &= \frac{2 b r_1' \varrho}{\varrho_1 (r'+r)\cos\varphi}; \end{aligned}\right.$$

mais nous avons déjà trouvé au n° 73

$$(\mathrm{LXXXVIII})\left\{\begin{aligned} MS &= \frac{r}{\cos\varphi}, & MS' &= \frac{r'}{\cos\varphi}, \\ ML &= \frac{2ar}{(r'+r)\cos\varphi}, & ML' &= \frac{2ar'}{(r'+r)\cos\varphi}; \end{aligned}\right.$$

il vient donc

$$(\mathrm{LXXXIX})\left\{\begin{aligned} MS \times MS' &= \frac{\varrho_1^2}{\cos^2\varphi}, \quad M_1 S_1 \times M_1 S_1' = \frac{\varrho^4}{\varrho_1^2 \cos^2\varphi} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{\varrho^2}{\cos^2\varphi_1}, \\ ML \times ML' &= \frac{4a^2 \varrho_1^2}{(r'+r)^2 \cos^2\varphi}, \\ M_1 L_1 \times M_1 L'_1 &= \frac{4b^2 \varrho^2}{(r'+r)^2 \cos^2\varphi_1}; \end{aligned}\right.$$

d'où nous tirons, en vertu de (LXI),

$$(\mathrm{XC}) \;.\;.\;.\;.\;.\; MS \times MS' = M_1 S_1 \times M_1 S_1',$$

$$(\mathrm{XCI}) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{ML \times ML'}{M_1 L_1 \times M_1 L_1'} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Théorème XXI. Dans deux hyperboles conjuguées 1° le produit des deux segments déterminés par les directrices sur une tangente, est égal au produit des deux segments déterminés par les directrices sur la tangente menées du point conjugué du premier point de contact; 2° les produits des segments formés sur

chacune des normales, sont entre eux comme les axes transverses.

94. Angle de deux diamètres conjugués. En désignant cet angle par V, nous trouverons, par un calcul analogue à celui qui a été employé pour l'ellipse, que

$$\text{(XCII)} \ldots \left\{ \begin{aligned} &\sin V = \frac{ab}{\rho\rho_1} = \frac{a}{\rho_1}\sin\varphi = \frac{b}{\rho}\sin\varphi_1 = \sin\varphi\sin\varphi_1, \\ &\cos V = \sqrt{\frac{\rho^2+b^2}{\rho^2-a^2}} \times \cos\varphi\cos\varphi_1, \\ &\operatorname{tang} V = \sqrt{\frac{\rho^2-a^2}{\rho^2+b^2}} \times \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi_1, \end{aligned} \right.$$

Théorème XXII. Le sinus de l'angle de deux diamètres conjugués est égal au produit des sinus des demi-angles compris entre les rayons vecteurs qui aboutissent à leurs extrémités.

95. Considérons les deux hyperboles conjuguées

$$(6) \ldots\ldots\ldots \quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

$$(7) \ldots\ldots\ldots \quad a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2,$$

et leurs asymptotes communes

$$(8) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y = \pm\frac{b}{a}x;$$

l'équation

$$ay\sqrt{\rho^2-a^2} - bx\sqrt{\rho^2+b^2} = -abc$$

sera celle de la tangente menée à (6) par l'extrémité supérieure de ρ, et

$$ay\sqrt{\rho^2+b^2} - bx\sqrt{\rho^2-a^2} = abc$$

sera l'équation de la tangente menée à (7) par l'extrémité supérieure de ρ_1 conjugué de ρ.

Ces deux tangentes coupent les deux asymptotes (8), la première en deux points E, F dont les coordonnées sont

$$x' = \frac{ac}{\sqrt{\rho^2+b^2} - \sqrt{\rho^2-a^2}}, \quad y' = \frac{bc}{\sqrt{\rho^2+b^2} - \sqrt{\rho^2-a^2}};$$

$$x'' = \frac{ac}{\sqrt{\varrho^2+b^2} - \sqrt{\varrho^2-a^2}}, \quad y'' = \frac{bc}{\sqrt{\varrho^2+b^2} - \sqrt{\varrho^2-a^2}};$$

et la seconde en deux points E_1, F_1 dont les coordonnées sont

$$x_1' = \frac{ac}{\sqrt{\varrho^2+b^2} + \sqrt{\varrho^2-a^2}}, \quad y_1' = \frac{-bc}{\sqrt{\varrho^2+b^2} + \sqrt{\varrho^2-a^2}},$$

$$x_1'' = \frac{-ac}{\sqrt{\varrho^2+b^2} + \sqrt{\varrho^2-a^2}}, \quad y_1'' = \frac{bc}{\sqrt{\varrho^2+b^2} + \sqrt{\varrho^2-a^2}}.$$

Si on compare les valeurs de x', y' et x'', y'', on verra que les deux points E, F se confondent. La distance E_1F_1 sera

$$\text{(XCIII)} \ldots \delta = \frac{2c^2}{\sqrt{\varrho^2+b^2} + \sqrt{\varrho^2-a^2}} = \frac{2abc}{ay+bx}.$$

Menons la tangente à (7) par l'extrémité du rayon symétrique de ϱ_1; son équation sera

$$ay\sqrt{\varrho^2+b^2} + bx\sqrt{\varrho^2-a^2} = abc;$$

elle coupera les deux asymptotes en G, G_1 dont les coordonnées sont

$$x = \frac{ac}{\sqrt{\varrho^2+b^2} + \sqrt{\varrho^2-a^2}}, \quad y = \frac{bc}{\sqrt{\varrho^2+b^2} + \sqrt{\varrho^2-a^2}};$$

$$x_1 = \frac{ac}{\sqrt{\varrho^2+b^2} - \sqrt{\varrho^2-a^2}}, \quad y_1 = \frac{bc}{\sqrt{\varrho^2+b^2} - \sqrt{\varrho^2-a^2}}.$$

Nous aurons pour les distances des points d'intersection

$$GE = GF = \frac{2a}{c}\sqrt{\varrho^2+b^2} = 2X,$$

$$G_1E_1 = \frac{2b}{c}\sqrt{\varrho^2+b^2} = 2Y_1,$$

$$G_1F_1 = \frac{2a}{c}\sqrt{\varrho^2+b^2} = 2X.$$

La longueur $2X$ est la projection du diamètre 2ϱ sur l'axe transverse $2a$, et $2Y_1$ est la projection du diamètre conjugué $2\varrho_1$ sur l'axe $2b$.

96. Supposons que les deux hyperboles conjuguées soient équilatères; leurs équations seront

$$(9) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y^2 - x^2 = \mp a^2.$$

Si nous faisons $b = a$ dans les résultats précédents nous aurons

(XCIV) . . . . $\varrho^2 = rr' = \varrho_1^2, \quad c^2 = 2a^2;$

$$r' = a + \sqrt{\varrho^2 + a^2}, \quad r = -a + \sqrt{\varrho^2 + a^2};$$

$$\sin\varphi = \frac{a}{\varrho}, \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{a}{\sqrt{\varrho^2 - a^2}};$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2a\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho^2}, \quad \cos 2\varphi = \frac{\varrho^2 - 2a^2}{\varrho^2}, \quad \operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2a\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho^2 - 2a^2}.$$

Théorème XXIII. Dans l'hyperbole équilatère, tout rayon central est moyen proportionnel entre les deux rayons vecteurs qui aboutissent à son extrémité.

97. Nous trouvons ensuite

$$x = \pm\sqrt{\frac{\varrho^2 + a^2}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{\varrho^2 - a^2}{2}};$$

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{\varrho^2 - a^2}{2}}, \quad y_1 = \pm\sqrt{\frac{\varrho^2 + a^2}{2}}$$

pour les coordonnées des extrémités de deux diamètres conjugués.

98. Nous avons après cela

(XCV)... $T = T_1 = \varrho\sqrt{\frac{\varrho^2 - a^2}{\varrho^2 + a^2}}, \quad T' = T_1' = \varrho\sqrt{\frac{\varrho^2 + a^2}{\varrho^2 - a^2}},$

$$T . T' = \varrho^2,$$

(XCVI) . . . . $N = N_1 = N' = N_1' = \varrho;$

(XCVII) .. $t = t_1 = \frac{\varrho^2 - a^2}{\sqrt{2(\varrho^2 + a^2)}}, \quad t' = t_1' = \frac{\varrho^2 + a^2}{\sqrt{2(\varrho^2 - a^2)}},$

$$tt' = t_1 t_1' = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\varrho^2 + a^2)(\varrho^2 - a^2)};$$

(XCVIII) . . . . . . $\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} = \frac{\varrho}{tt'}.$

Théorème XXIV. Dans l'hyperbole équilatère, la normale est égale au rayon central, qui est moyen proportionnel entre les deux tangentes.

Théorème XXV. Le rayon divisé par le produit des sous-tangentes est égal à la somme des inverses des tangentes.

§. IX. Détermination des éléments de la parabole par le rayon vecteur et le paramètre.

99. **Inclinaison de la tangente sur l'axe.** Supposons que la parabole soit rapportée à son axe et à la tangente au sommet; elle sera représentée par l'équation

(1) . . . . $y^2 = 2px,$

où p est le paramètre de la courbe.

Soient x, y les coordonnées d'un point de la parabole, r le rayon vecteur mené en ce point et φ l'angle qu'il fait avec la tangente. On sait que

(I) . . . . $2r = 2x + p.$

L'équation de la tangente étant

(2) . . . . $Yy = p(X + x),$

on a

$$\operatorname{tang} T = \frac{p}{y};$$

il vient donc

$$\text{(II)} \ldots \begin{cases} \sin T = \ \sin\varphi = \sqrt{\dfrac{p}{2x+p}} = \sqrt{\dfrac{p}{2r}}, \\ \cos T = \ \cos\varphi = \sqrt{\dfrac{2x}{2x+p}} = \sqrt{\dfrac{2r-p}{2r}}, \\ \operatorname{tang} T = \operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\dfrac{p}{2x}} \quad = \sqrt{\dfrac{p}{2r-p}}; \end{cases}$$

d'où on tire, pour l'inclinaison du rayon vecteur sur l'axe

$$\text{(III)} \ldots \begin{cases} \sin 2\varphi = \dfrac{2\sqrt{2px}}{2x+p} = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\sqrt{p(2r-p)}}{r}, \\ \cos 2\varphi = \dfrac{2x-p}{2x+p} = \dfrac{r-p}{r}, \\ \operatorname{tang} 2\varphi = \dfrac{2\sqrt{2px}}{2x-p} = \dfrac{y}{r-p} = \dfrac{\sqrt{p(2r-p)}}{r-p}. \end{cases}$$

100. Valeurs des tangentes. Les triangles rectangles *MPT*, *MQT'* nous donnent

$$(\text{IV})\ldots\begin{cases} T^2 = \dfrac{y^2}{\sin^2 T} = 2x(2x+p) = 4rx = 2r(2r-p), \\[2ex] T'^2 = \dfrac{x^2}{\cos^2 T} = \dfrac{x}{2}(2x+p) = rx = \tfrac{1}{2}r(2r-p). \end{cases}$$

Théorème I. La tangente vers l'axe des y est la moitié de la tangente vers l'axe des x.

101. Produit des tangentes. On trouve

$$(\text{V})\ldots\ldots\ldots\ldots\quad T\times T' = 2rx.$$

Théorème II. Le produit des tangentes est égal au double produit du rayon vecteur par l'abscisse.

102. Valeur des sous-tangentes. On a

$$(\text{VI})\ldots\begin{cases} t = \dfrac{y}{\operatorname{tang} T} = y\cot T = 2x = 2r-p, \\[2ex] t' = \dfrac{x}{\cot T} = x \operatorname{tang} T = \dfrac{y}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{p(2r-p)}; \end{cases}$$

d'où

$$(\text{VII})\ldots\ldots\quad t'^2 = \tfrac{1}{4}pt, \quad tt' = xy = \frac{y^3}{2p}.$$

Théorème III. La sous-tangente sur l'axe des x est le double de l'abscisse, et la sous-tangente sur l'axe des y est la moitié de l'ordonnée.

Théorème IV. La sous-tangente sur l'axe des y est moyenne proportionnelle entre la sous-tangente sur l'axe des x et le quart du paramètre.

103. Valeurs des normales et des sous-normales. Par les triangles rectangles *MNP*, *MN'Q* on a

$$(\text{VIII})\ldots\begin{cases} N^2 = \dfrac{y^2}{\cos^2 T} = y^2+p^2 = p(2x+p) = 2rp, \\[2ex] N'^2 = \dfrac{x^2}{\sin^2 T} = \dfrac{x^2(2x+p)}{p} = \dfrac{2rx^2}{p} = \dfrac{r(2r-p)^2}{2p}; \end{cases}$$

$$(\text{IX}) \ldots \begin{cases} n = y \operatorname{tang} T = p, \\ n' = x \cot T = \frac{xy}{p} = \sqrt{\frac{2x^3}{p}} = \sqrt{\frac{(2r-p)^3}{4p}}. \end{cases}$$

Théorème V. Les carrés de la tangente et de la normale vers l'axe des x sont entre eux comme la double abscisse est au paramètre, et, par suite,

Les carrés de la tangente et de la normale vers l'axe des y sont entre eux comme le paramètre est à la double abscisse.

104. Projections des tangentes et des normales sur le rayon vecteur. Ces projections sont

$$(\text{X}) \ldots \begin{cases} T \cos\varphi = y \operatorname{cotang}\varphi = 2x = 2r - p, \\ T' \cos\varphi = x = \frac{1}{2}(2r-p) = r - \frac{p}{2}; \end{cases}$$

$$(\text{XI}) \ldots \begin{cases} N \sin\varphi = y \operatorname{tang}\varphi = p, \\ N' \sin\varphi = x = r - \frac{p}{2}. \end{cases}$$

Théorème VI. Si l'on projette les deux tangentes sur le rayon vecteur, la première projection sera double de la seconde, égale à la sous-tangente sur l'axe des x, et, parsuite, égale à la double abscisse.

Théorème VII. Si l'on projette les normales sur le rayon vecteur, la première projection sera égale à la sous-normale sur l'axe des x, et, parsuite, égale au paramètre, et la seconde sera égale à l'abscisse.

105. Projections des rayons vecteurs sur la tangente et la normale. Elle sont

$$(\text{XII}) \ldots \begin{cases} r \cos\varphi = \sqrt{\frac{r(2r-p)}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2r(2x+p)} = \frac{1}{2}T, \\ r \sin\varphi = \sqrt{\frac{pr}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{p(2x+p)} = \frac{1}{2}N. \end{cases}$$

Théorème VIII. Si l'on projette le rayon vecteur sur la tangente et la normale, la première projection sera égale à la moitié de la tangente sur l'axe des x, et la seconde égale à la moitié de la normale sur l'axe des x.

106. **Distances du sommet aux pieds de la tangente.** Faisons successivement $Y=0$, $X=0$ dans l'équation (2) de la tangente; nous obtenons, en valeur absolue,

$$\text{(XIII)} \ldots \ldots \begin{cases} \tau = x = r - \frac{p}{2}, \\ \tau' = \frac{px}{y} = \frac{y}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{p(2r-p)}; \end{cases}$$

et, par suite,

$$\text{(XIV)} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \tau'^2 = \tfrac{1}{2}p\tau.$$

107. **Distances du sommet aux pieds des normales.** Nous avons

$$\text{(XV)} \ldots \begin{cases} v = x + n = x + p, \\ v' = y + n' = y + \frac{xy}{p} = \frac{y}{p}(p+x), \end{cases}$$

d'où

$$\text{(XVI)} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \frac{v}{v'} = \frac{p}{y}.$$

Théorme IX. Les distances du sommet aux pieds des normales sont entre elles comme le paramètre est à l'ordonnée.

108. **Distances des pieds des tangentes aux pieds des normales.** En les représentant par α, β, on a

$$\text{(XVII)} \ldots \begin{cases} \alpha = n + t = \tau + v = 2x + p = 2r, \\ \beta = n' + t' = v' - \tau' = \frac{y}{p}(p+x) - \frac{y}{2} = \frac{y(2x+p)}{2p} \\ \quad = \frac{ry}{p} = \frac{rx}{2y}. \end{cases}$$

Théorème X. 1° La distance du pied de la tangente sur l'axe des x au pied de la normale, est égale au double rayon vecteur.

2° La distance du pied de la tangente sur l'axe des y au pied de la normale, est une quatrième proportionnelle entre le paramètre, le rayon vecteur et l'ordonnée.

109. **Segments déterminés par la directrice sur la**

tangente et la normale. Soient S et L les points où la tangente et la normale rencontrent la directrice; on a

$$\frac{MS}{T} = \frac{x + \frac{p}{2}}{t} = \frac{2x + p}{4x},$$

$$\frac{ML}{N} = \frac{x + \frac{p}{2}}{n} = \frac{2x + p}{2p};$$

d'où

$$\text{(XVIII)} \ldots \begin{cases} MS = \dfrac{2x + p}{4x} \sqrt{2x(2x+p)} = \sqrt{\dfrac{(2x+p)^3}{8x}} = \sqrt{\dfrac{r^3}{x}}, \\ ML = \dfrac{2x + p}{2p} \sqrt{p(2x + p)} = \sqrt{\dfrac{(2x+p)^3}{4p}} = \sqrt{\dfrac{2r^3}{p}}. \end{cases}$$

110. **Segment déterminé par la tangente et la normale sur la directrice.** Ce segment est

$$SL^2 = MS^2 + ML^2 = \frac{r^3}{x} + \frac{2r^3}{p} = \frac{r^3(2x + p)}{px} = \frac{4r^4}{y^2},$$

d'où

$$\text{(XIX)} \ \ldots\ldots\ldots \quad SL = \frac{2r^2}{y}.$$

Théorème XI. Le segment compris sur la directrice entre la tangente et la normale est une troisième proportionnelle à la demi-ordonnée et le rayon vecteur.

111. On peut traiter, comme cas particuliers, ceux où le rayon vecteur est égal au paramètre, puis à l'ordonnée.

XXI.

Calcul des rayons des deux cercles qui touchent trois cercles tangents deux à deux.

Par

Monsieur *Georges Dostor*,
Docteur ès sciences
Professeur de mathématiques à Paris.

Soient A, B, C les centres des trois cercles donnés, qui se touchent deux à deux; O le centre de l'un des deux cercles qui sont tangents à tous les trois. Désignons les rayons de ces cercles par a, b, c, r.

Supposons, pour fixer les idées, que le cercle O soit intérieur au triangle ABC.

Tirons les droites OA, OB, OC. Il est évident que

$$OA = a + r, \quad OB = b + r, \quad OC = c + r;$$

et

$$BC = b + c, \quad CA = c + a, \quad AB = a + b.$$

Représentons par α, β, γ les angles BOC, COA, AOB. Puisque $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$, nous avons

$$(1) \ldots \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

Or le triangle OBC donne

$$(b+c)^2 = (b+r)^2 + (c+r)^2 - 2(b+r)(c+r)\cos\alpha,$$

d'où on tire

$$\cos\alpha = 1 - \frac{2bc}{(b+r)(c+r)};$$

et, par suite

$$\cos\beta = 1 - \frac{2ca}{(c+r)(a+r)},$$

$$\cos\gamma = 1 - \frac{2ab}{(a+r)(b+r)}.$$

Substituant ces valeurs dans la relation (1), on obtient

$$\left[1-\frac{2bc}{(b+r)(c+r)}\right]^2 + \left[1-\frac{2ca}{(c+r)(a+r)}\right]^2 + \left[1-\frac{2ab}{(a+r)(b+r)}\right]^2$$
$$-2\left[1-\frac{2bc}{(b+r)(c+r)}\right]\left[1-\frac{2ca}{(c+r)(a+r)}\right]\left[1-\frac{2ab}{(a+r)(b+r)}\right] = 1,$$

ou, en effectuant et en faisant évanouir les dénominateurs:

$$b^2c^2(a+r)^2 + c^2a^2(b+r)^2 + a^2b^2(c+r)^2$$
$$-2a^2bc(b+r)(c+r) - 2b^2ca(c+r)(a+r) - 2c^2ab(a+r)(b+r)$$
$$-4a^2b^2c^2 = 0.$$

Effectuant dans cette équation et ordonnant par rapport à r, on trouve

$$r^2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - 2a^2bc - 2b^2ca - 2c^2ab)$$
$$-2r(b^2c^2a + c^2a^2b + a^2b^2c) + a^2b^2c^2 = 0,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\text{(I)} \quad \ldots \quad r^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{bc} - \frac{2}{ca} - \frac{2}{ab}\right)$$
$$-2r\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 1 = 0.$$

Cette équation donne les rayons des deux cercles tangents demandés; l'un d'eux est compris entre les trois cercles donnés, tandisque l'autre leur est exterieur ou les enveloppe.

Ces rayons sont

$$\text{(II)} \quad \ldots \quad r = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \pm \sqrt{\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{bc} - \frac{2}{ca} - \frac{2}{ab}}.$$

Pour que le cercle extérieur se réduise à une droite, à laquelle les trois cercles sont tangents, tout en étant entre eux

tangents deux à deux, il faut que le coefficient de r^2 dans l'équation (I) se réduise à zéro, c'est-à-dire que

$$\text{(III)} \quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{bc}-\frac{2}{ca}-\frac{2}{ab}=0;$$

or ce coefficient peut s'écrire

$$\text{(IV)} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \times\left(\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{c}}\right);$$

donc si c est le plus petit des trois rayons a, b, c, il faudra que l'on ait

$$\text{(V)} \quad \frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}.$$

ce qu'on pourrait trouver directement au moyen des trapèzes birectangles debout sur la tangente commune. Donc

Théorème. Pour que trois cercles tangents deux à deux touchent une même droite, il faut et il suffit que la racine carrée de l'inverse du plus petit rayon soit égale à la somme des racines carrées des inverses des deux autres rayons.

Dans ce cas le rayon du cercle intérieur sera donné par l'équation

$$\text{(VI)} \quad \frac{1}{2r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

qui, en vertu de (V), peut encore s'écrire

$$\text{(VII)} \quad \frac{1}{4r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Si deux des trois cercles donnés sont égaux, par exemple, que l'on ait $a=b$, l'équation des rayons deviendra

$$(a-4c)r^2-2c(a+2c)r+ac^2=0;$$

et si ces deux cercles sont en même temps tangents à une même droite, le rayon du troisième cercle sera $\frac{a}{4}$ ou le quart de celui de chacun des deux autres cercles; ce qui donne, pour le rayon du cercle inscrit,

$$r=\frac{c}{3}=\frac{a}{12}.$$

XXII.

Demonstratio synthetica theorematis, quod ex Elementis Euclidis a Cell. Betti et Brioschi editis sumtum et pagina CXVI. tomi L[i] hujus Archivi propositum est,

a

D^re^. *Christiano Fr. Lindman,*
Lect. Strengnesensi.

(Fig. v. Tab. VI.)

Theorema: Circulo circum triangulum aequilaterum *ABC* (Tab. VI. Fig. 2., 3) circumscripto, si alter circulus ejusdem centri describitur et punctum quodlibet *P* in peripheria ejus sumtum, demonstrandum est, summam quadratorum rectarum *PA*, *PB*, *PC* quantitatem esse constantem.

Priusquam theorema ipsum adgredimur, insequens demonstremus

Lemma: Si rectae *AD*, *BE*, *CF* (Tab. VI. Fig. 1.) perpendiculares e verticibus Δ^i aequilateri *ABC* ad diametrum quandam *MN* circuli circumscripti ducuntur, tres partes diametri *OD*, *OE*, *OF* inter centrum *O* et perpendicula exsistent, e quibus maxima *OD* sit aequalis summae reliquarum.

Ductis rectis AO, BO, CO productaque AO ad H, BE ad G, facillime perspicitur, esse

$$\Delta OCL \cong \Delta HBG \text{ (hypoth.; Eucl. I: 26)}$$

atque ideo

$$OL = GH.$$

Ducta

$$HK \perp MN \text{ et } GR \parallel OH,$$

sequitur, ut sit

$$OF = EK, \quad OK = OE + OF.$$

Quum vero sit

$$\Delta AOD \cong \Delta HOK$$

atque ideo

$$OD = OK,$$

patet, esse

$$OD = OE + OF. \quad \text{Q. e. d.}$$

Jam positis radio circuli circumscripti $= r$ et radio circuli alterius $= \varrho$, theorema ipsum ex Eucl. El. II: 12, 13 colligitur. Habemus enim (Tab. VI. Fig. 2.)

$$\overline{PA}^2 = r^2 + \varrho^2 - 2\varrho \,.\, OD$$

$$\overline{PB}^2 = r^2 + \varrho^2 + 2\varrho \,.\, OE$$

$$\overline{PC}^2 = r^2 + \varrho^2 + 2\varrho \,.\, OF \text{ et ex Ax. II}^o.$$

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 3(r^2 + \varrho^2) - 2\varrho \,.\, OD + 2\varrho \,.\, (OE + OF),$$

et e Lemmate super demonstrato:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 3(r^2 + \varrho^2).$$

Itidem, si est $r > \varrho$, ut in (Tab. VI. Fig. 3.). Q. e. d.

XXIII.

Die rationalen Dreiecke.

Von

Herrn *Wenzel Šimerka*,
Pfarrer in Jenschowitz bei Hohen-Mauth in Böhmen.

(Figuren s. Tafel V.)

Vor etwa eilf Jahren, da der Verfasser dieses Aufsatzes noch Gymnasiallehrer in Budweis war, gab er einer Klasse des Obergymnasiums ein Dreieck mit den Seiten 13′, 14′, 15′ zu verrechnen, was ohne trigonometrische Tafeln vollführt werden kann. Bei der Korrektur der Aufgaben zeigte sich jedoch, dass nur drei Schüler selbständig arbeiteten, die übrigen aber alles von ihnen abgeschrieben hatten. Um das Abschreiben in der Folge möglichst zu verhüten, suchte er andere derartige Dreiecke auf, dass jedem Schüler eine andere Aufgabe gegeben werden könnte. Daraus ergab sich im Verlaufe der Zeit die nachfolgende Abhandlung, welche nicht nur eine Menge lehrreicher algebraisch-geometrischer Aufgaben liefert, sondern auch einen innigen Zusammenhang zwischen der Geometrie und unbestimmten Analytik zeigt, daher sowohl für Lehrer als auch für mathematische Forscher von Interesse sein dürfte. Zur Ueberarbeitung und Herausgabe bewegen den Verfasser ähnliche in diesem Archiv vorkommende Aufsätze.

---

§. 1.

Welche ebenen gradlinigen Figuren kann man rational nennen?

Dreiecke, deren Seiten, Fläche und sämmtliche einfache Winkelfunktionen rationale Zahlen sind, können füglich auch rational heissen. Bei rationalen Vier- und Mehrecken kann diese Eigenschaft auch den Diagonalen zugesprochen werden. Sind die Seiten einer Figur gebrochene oder gemischte Zahlen, so können sie in Brüche mit einem gemeinschaftlichen Nenner verwandelt werden; eben so kann der grösste gemeinsame Theiler aller Geraden für ihr gemeinschaftliches Mass angesehen werden. Desshalb kann uns, wie diess für den praktischen Gebrauch am zweckmässigsten ist, als Regel gelten, dass die Seiten und Diagonalen bei rationalen Figuren ganze Zahlen und theilfremd sind, so dass z. B. ein Dreieck (Δ) mit den Seiten $1\frac{1}{3}$, $3\frac{2}{5}$, $4\frac{1}{3}$ durch das Symbol $\Delta(20, 51, 65)$, oder $\Delta(60, 80, 100)$ kürzer durch $\Delta(3, 4, 5)$ dargestellt werden kann. In Folge dessen stellt $\Delta(a, b, c)$ alle ähnlichen Dreiecke vor, deren Seiten sich zu einander wie $a:b:c$ verhalten, wobei a, b, c die kleinsten ganzen Zahlen sind.

Sollte dieses Dreieck in ein anderes, dessen erste Seite p wäre, verwandelt werden, so hat man die Längen a, b, c blos mit $\frac{p}{a}$ zu multipliziren.

§. 2.

Berechnung schiefwinkliger Dreiecke aus rechtwinkligen.

Hat man die zwei rechtwinkligen $\Delta(a, b, c)$, $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$, wobei c und γ die Hypotenusen sind, und ist p das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a, α, multiplicirt man dann die Seiten der gegebenen Dreiecke beziehungsweise mit $m = \frac{p}{a}$, $\mu = \frac{p}{\alpha}$, so ergibt sich $\Delta(p, bm, cm)$, $\Delta(p, \beta\mu, \gamma\mu)$. Da nun die Seiten p, bm und p, $\beta\mu$ rechte Winkel einschliessen, so kann man die gleichen Längen p an einander legen, wo sie zur Höhe eines neuen Dreieckes werden, den Scheitel schliessen die Hypotenusen cm, $\gamma\mu$ ein, und die Basis ist entweder die Summe oder Differenz aus den zwei andern Katheten bm, $\beta\mu$, je nachdem man die zwei rechtwinkligen Dreicke neben einander oder in einander legt, wie

diess Fig. 1., wo $AB=p$, $BC=bm$, $AC=cm$, $BD=BE=\beta\mu$, $AD=AE=\gamma m$ ist, verdeutlicht. Man gelangt somit zu den schiefwinkligen $\Delta\, ACD$ und $\Delta\, ACE$, nämlich

$$\Delta(cm,\ \gamma\mu,\ bm+\beta\mu),\quad \Delta(cm,\ \gamma\mu,\ \pm bm\mp\beta\mu),$$

von denen das zweite im Allgemeinen stumpfwinklig ist. Wird auf diese Weise bei Versetzung der Katheten jedes der rechtwinkligen $\Delta(3, 4, 5)$, $\Delta(5, 12, 13)$ zuerst mit sich selbst, und dann mit dem andern verglichen, so gelangt man im Ganzen zu 14 neuen rationalen Dreiecken, nämlich $\Delta(5, 5, 8)$, $\Delta(7, 15, 20)$, $\Delta(5, 5, 6)$, $\Delta(13, 13, 24)$, $\Delta(65, 119, 156)$, $\Delta(10, 13, 13)$, $\Delta(25, 39, 56)$, $\Delta(16, 25, 39)$, $\Delta(13, 20, 21)$, $\Delta(11, 13, 20)$, $\Delta(25, 52, 63)$, $\Delta(25, 33, 52)$, $\Delta(13, 14, 15)$, $\Delta(4, 13, 15)$. Die umgekehrte Aufgabe, d. i. Bestimmung rechtwinkliger Dreiecke aus schiefwinkligen, kommt weiter unten im §. 5. vor.

§. 3.

Wovon hängt die Rationalität eines Dreieckes ab?

Sind A, B, C die den Seiten a, b, c gegenüberliegenden Winkel, so hat man in Folge des Carnot'schen Lehrsatzes $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Es sind daher die Kosinuse, somit auch die Sekanten, in allen Dreiecken rational, deren Seiten im rationalen Verhältnisse zu einander stehen.

Weil ferner die Fläche $F=\frac{1}{2}bc\sin A$, so hängt die Rationalität der Sinuse, daher auch der Tangenten, Kotangenten und Kosekanten der Winkel, blos von der Rationalität der Fläche oder einer dieser Winkelfunktionen ab.

Wie bekannt ist

$$F=\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]},$$

wobei $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ bedeutet. Die Hauptbedingung der Rationalität von Dreiecken wird daher darin bestehen, die Seiten a, b, c so zu ermitteln, dass das Produkt $s(s-a)(s-b)(s-c)$ ein vollständiges Quadrat, nämlich F^2 werde.

Anmerkung. Die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=\frac{F}{s(s-a)}$ sagt aus, dass in rationalen Dreiecken die Tangenten somit auch die Kotangenten der halben Winkel rational sind.

§. 4.

Rechnungsvortheile.

a) Was die Fläche $F = \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$ anbelangt, zerlege man s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ in Primfaktoren, ziehe die Potenzen gleicher Wurzeln zusammen, und halbire ihre Exponenten. So gibt z. B. $\Delta(15, 112, 113)$,

$$s = 120,$$

daher

$$F = \sqrt{(120 \times 105 \times 8 \times 7)}$$

$$= \sqrt{(2^3.3.5 \times 3.5.7 \times 2^3 \times 7)} = \sqrt{(2^6.3^2.5^2.7^2)} = 2^3.3.5.7,$$

d. i.
$$F = 840.$$

Um hiebei der Faktorenzerlegung zu entgehen, kann man aus jedem quadratischen Faktor die Wurzel ziehen, und quadratische oder paarweise vorkommende Faktorentheiler hervorheben. So gibt $\Delta(40, 85, 117)$,

$$s = 121,$$

$$F = \sqrt{(121 \times 81 \times 36 \times 4)} = 11 \times 9 \times 6 \times 2 = 1188,$$

und $\Delta(50, 69, 73)$

$$\text{bei} \quad s = 96,$$

$$F = \sqrt{(96 \times 46 \times 27 \times 23)} = 23 \times 3 \times 3 \times 8 = 1656.$$

96, 2, 27,
32, 2, 9.

Die Sinuse ganzer und Tangenten halber Winkel ergeben sich aus

$$\sin A = \frac{2F}{bc}, \quad \sin B = \frac{2F}{ac}, \quad \sin C = \frac{2F}{ab},$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \frac{F}{s(s-a)}, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \frac{F}{s(s-b)}, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{F}{s(s-c)}.$$

Ist bei einem Winkel $\sin v = \frac{m}{n}$, so hat man

$$\cos v = \frac{\pm\sqrt{(n+m)\,n-m)}}{n},$$

wo das untere Zeichen bei stumpfen Winkeln zu nehmen ist, und die Rechnung wie bei F vorgenommen werden kann.

b) Oft ist es jedoch nicht nöthig die Fläche zu kennen; dann bestimmt man die Tangenten der halben Winkel aus

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}},$$

wobei man sich nach vorgenommener Kürzung der obigen Vortheile bedienen kann. So folgt aus $\Delta(9, 65, 70)$ bei $s = 72$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{7\times2}{72\times63}} = \frac{1}{18}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{63\times2}{72\times7}} = \frac{1}{2},$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{63\times7}{72\times2}} = \frac{7}{4}.$$

Ist c die grösste Seite, so gibt $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C < 1$ ein spitz-, $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = 1$ ein recht- und $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C > 1$ ein stumpfwinkliges Dreieck an.

Hat man dann überhaupt $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \frac{m}{n}$, so ergibt sich

$$\sin v = \frac{2mn}{n^2+m^2}, \quad \cos v = \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}, \quad \operatorname{tg} v = \frac{2mn}{n^2-m^2},$$

u. s. w.

§. 5.

Zerlegung schiefwinkliger Dreiecke in rechtwinklige.

Durch Perpendikelfällung entstehen aus jedem schiefwinkligen Dreiecke sechs rechtwinklige, von denen aber je zwei, die einen der Winkel A, B, C mit einander gleich haben, ähnlich sind, so dass jedes solche Dreieck zu drei und ist es gleichschenklig zu zwei rechtwinkligen führt. Von diesen Dreieken hat jenes, das die Seite b und den Winkel A enthält, den Werth $\Delta(b\sin A, b\cos A, b)$, so dass es nach §. 1. in $\Delta(\sin A, \cos A, 1)$ übergeht. Die andern zwei Dreiecke sind dem zufolge $\Delta(\sin B, \cos B, 1)$, $\Delta(\sin C, \cos C, 1)$. Hat einer dieser Sinuse die Gestalt $\frac{m}{n}$, so ist $\Delta(m, \sqrt{(n-m)(n+m)}, n)$ das ihm zugehörige rechtwinklige Dreieck. Aus $\Delta(17, 25, 28)$ erhält man z. B.:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \frac{6}{7}$$

somit

$$\sin A = \frac{3}{5}, \quad \sin B = \frac{15}{17}, \quad \sin C = \frac{84}{85}$$

und $\Delta(3, 4, 5)$, $\Delta(15, 8, 17)$, $\Delta(84, 13, 85)$ sind die zugehörigen Ausdrücke.

Verbindet man hiemit das im §. 2. angeführte Verfahren, so gelangt man leicht zu vielen rationalen Dreiecken. Handelt es sich aber darum, alle rationalen Dreiecke innerhalb gewisser Gränzen aufzusuchen, so ist diese Methode doch unzureichend, da einmal viele unbrauchbare Dreiecke gefunden werden, andere erscheinen wieder mehrmals als Resultat, und man ist überdiess nicht sicher, der Forderung vollständig Genüge geleistet zu haben.

§. 6.

Aufgaben für niedere Klassen.

Aus den Seiten eines gegebenen rationalen Dreieckes berechne man

a) die Fläche F nach §. 4.;

b) die drei Höhen $\frac{2F}{a}$, $\frac{2F}{b}$, $\frac{2F}{c}$;

c) den Halbmesser des umschriebenen nnd eingeschriebenen Kreises, nämlich $\frac{abc}{4F}$ und $\frac{F}{s}$, so wie

d) die Halbmesser der drei äusseren Berührungskreise, nämlich $\frac{F}{s-a}$, $\frac{F}{s-b}$, $\frac{F}{s-c}$.

e) Man bestimme ferner die Qualität der Winkel und

f) gebe die rechtwinkligen Dreiecke an, in welche ein gegebenes schiefwinkliges Dreieck zerfällt.

g) Ist das gegebene Dreieck rechtwinklig, so formire man aus demselben durch Umlegung zwei gleichschenklige Dreiecke, und durch Perpendikelfällung zwei neue rechtwinklige.

§. 7.

Eigenschaft der Seiten bei rationalen Dreiecken.

Ein nicht unwichtiger Umstand bei rationalen Dreiecken ist der, dass ihre Seitensumme stets eine paare Zahl ist, in Folge dessen dann s eine ganze, und von den Seiten a, b, c eine gerade und zwei ungerade Zahlen sein müssen, vorausgesetzt, dass a, b, c theilfremd, also nicht zugleich paar sind. Wäre nämlich $2s = a + b + c$ eine unpaare Zahl, so sind nur zwei Fälle möglich: entweder hat man

$$a = 2\alpha + 1, \quad b = 2\beta + 1, \quad c = 2\gamma + 1$$

oder

$$a = 2\alpha, \qquad b = 2\beta, \qquad c = 2\gamma + 1.$$

Was den ersten Fall anbelangt, wo daher alle drei Seiten ungerade sind, so hat man

$$s = \alpha + \beta + \gamma + \tfrac{3}{2}$$

und

$$F^2 = (\alpha+\beta+\gamma+\tfrac{3}{2})(-\alpha+\beta+\gamma+\tfrac{1}{2})(\alpha-\beta+\gamma+\tfrac{1}{2})(\alpha+\beta-\gamma+\tfrac{1}{2})$$

oder

$$16F^2 = (2\alpha+2\beta+2\gamma+3)(-2\alpha+2\beta+2\gamma+1)(2\alpha-2\beta+2\gamma+1)(2\alpha+2\beta-2\gamma+1).$$

Wird nun $2\alpha + 2\beta + 2\gamma \equiv 2\lambda$, (mod. 4.) gesetzt, wo $\lambda = 0$ oder 1 bedeutet, je nachdem $\alpha + \beta + \gamma$ paar oder unpaar sein dürfte, und stellen G, H, J, K nach einander die Faktoren des rechten Gliedes bei $16F^2$ vor, so erhält man

$$G \equiv 2\lambda + 3, \quad H \equiv J \equiv K \equiv 2\lambda + 1, \quad (\text{mod. } 4.);$$

indem z. B. beim Model 4.,

$$H = -2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 1 \equiv 2\lambda - 4\alpha + 1 \equiv 2\lambda + 1.$$

Hieraus folgt

$$HJ \equiv (2\lambda+1)^2 \equiv 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 \equiv 1,$$

dann

$$HJK \equiv 2\lambda + 1, \quad GHJK \equiv (2\lambda+3)(2\lambda+1) \equiv 4\lambda^2 + 8\lambda + 3 \equiv 3,$$

somit auch

$$16F^2 = (4F)^2 \equiv 3, \ (\text{mod. } 4).$$

Das Quadrat der ganzen Zahl $4F$ kann aber beim Model 4 nur 0 oder 1 nie aber 3 zum Reste geben; es ist sonach die Annahme, dass a, b, c zugleich unpaar wären, unstatthaft.

Dasselbe ereignet sich auch im zweiten Falle, wo der Beweis denselben Gang befolgt.

Daraus ergibt sich, dass in rationalen Dreiecken nicht nur die halbe Seitensumme, sondern auch die Fläche eine ganze Zahl ist.

§. 8.

Algebraische Bestimmung der Seiten.

Setzt man die dritte Seite eines rationalen Dreieckes $c = b + m$, so erhält man wegen $a + b > c = b + m$ auch $a > m$. Ferner ist die ganze Zahl $s = b + \frac{a+m}{2}$, somit a mit m zugleich paar oder unpaar, und es kann $m = a - 2n$ gesetzt werden, woraus dann $s = a + b - n$ hervorgeht. Darnach findet man aus der Flächengleichung in §. 4. wegen $s - c = n$

$$F^2 = (a + b - n)(b - n)(a - n)n.$$

Soll nun diese Gleichung in ganzen Zahlen lösbar sein, so müssen je zwei Faktoren nach Auslassung der vollständigen Quadrate dasselbe Produkt geben, das in den andern zwei Faktoren nach derselben Auslassung vorkommt. Es ist sonach

$$\frac{(a + b - n)(b - n)}{y^2} = \frac{(a - n)n}{z^2},$$

oder wegen

$$m = a - 2n, \quad b^2 + bm - (a - n)n = (a - n)n\frac{y^2}{z^2}.$$

Dieser Ausdruck führt 4mal genommen rücksichtlich der aus obigen Sätzen resultirenden Gleichung $4(a - n)n + m^2 = a^2$ zu

$$(2b + m)^2 = 4(a - n)n\frac{y^2}{z^2} + a^2,$$

woraus man dann bei $x = 2b + m$ und $D = 4\frac{(a-n)n}{z^2}$

$$x^2 - Dy^2 = a^2$$

erhält, wobei dem Obigen nach z^2 den quadratischen Theiler von $(a - n)n$ bedeutet.

Jedes der letzten Gleichung genügende x gibt

$$b = \tfrac{1}{2}(x - m), \quad c = \tfrac{1}{2}(x + m)$$

bei $m = a - 2n$. Unbrauchbar ist hier der Werth von $x = a$, weil er $b = n$ und $F = 0$ liefert; dasselbe geschieht bei $n = 0$.

Von besonderer Bedeutung sind hier die zwei nachstehenden Fälle:

a) Soll D ein Quadrat, demnach $= 4$ sein, so muss wegen $(a-n)n = z^2$ d. i. $an = n^2 + z^2$ die Seite a als ein Theiler der Summe zweier Quadrate, wie die unbestimmte Analytik lehrt, auch diese quadratische Form haben, d. i. $a = \alpha^2 + \beta^2$ sein, wobei dann $n = \alpha^2$ der obigen Gleichung genügt, da $n = \beta^2$ dasselbe Resultat liefert.

Die Gleichung $x^2 - 4y^2 = a^2$ gibt wegen $(x-2y)(x+2y) = a^2$ so viele Lösungen, als es Arten gibt, wie a^2 in zwei von einander verschiedene Faktoren zerfällt. Bei $a = 5$ ist z. B.

$$5 = 1^2 + 2^2,$$

also

$$\alpha = n = 1, \quad m = 3, \quad (x-2y)(x+2y) = 25, \quad x - 2y = 1, \quad x + 2y = 25,$$

daher

$$x = 13, \quad b = 5, \quad c = 8,$$

somit $\Delta(5, 5, 8)$. Wird jedoch

$$x - 2y = 2, \quad x + 2y = \frac{25}{2}$$

gesetzt, so gelangt man zu

$$x = \frac{29}{4}, \quad b = \frac{17}{8}, \quad c = \frac{41}{8}$$

und $\Delta(17, 40, 41)$.

b) Ist hingegen D kein Quadrat, so erhält man nach der Theorie der unbestimmten Gleichungen von obiger Gestalt aus einem Werthepaare der Unbekannten d. i. etwa aus g, h für x, um das es sich hier blos handelt, den Ausdruck $x = g\varphi + hD\psi$, wo φ, ψ Zahlen sind, die der Gleichung $\varphi^2 - D\psi^2 = 1$ genügen, und sich aus $(\mu + \nu\sqrt{D})^v = \varphi + \psi\sqrt{D}$ dadurch ergeben, dass der rationale Theil vom irrationalen getrennt wird, wobei μ, ν die nach 1, 0 zunächst höheren Werthe von φ, ψ darstellen. Für ψ sind übrigens auch negative Werthe zulässig, und v bedeutet eine ganze positive Zahl.

Beispiel.

$a=5$, $n=2$ gibt $m=1$ und $x^2-24y^2=25$; ferner findet man $g=7$, $h=1$, $\mu=5$, $\nu=1$ also $x=7\varphi+24\psi$ und $(5+\sqrt{24})^v=\varphi+\psi\sqrt{24}$.

Hieraus folgt weiter bei

$v=0;\quad \varphi=\ 1,\quad \psi=\quad 0,\quad x=\ 7,\quad \Delta(5, 3, 4)$,

$v=1;\quad \varphi=\ 5,\quad \psi=-\ 1,\quad x=\ 11,\quad \Delta(5, 5, 6)$,

$v=1;\quad \varphi=\ 5,\quad \psi=\quad 1,\quad x=\ 59,\quad \Delta(5, 29, 30)$,

$v=2;\quad \varphi=49,\quad \psi=-10,\quad x=103,\quad \Delta(5, 51, 52)$,

$v=2;\quad \varphi=49,\quad \psi=\quad 10,\quad x=583,\quad \Delta(5, 291, 292)$ u. s. w.

Mittelst dieser Methode kann man zu einem gegebenen a, falls nach einander $n=1, 2, 3, \ldots < \frac{1}{2}a$ genommen wird, alle Werthe von b, c, die gewisse Gränzen nicht übersteigen, bestimmen. Bei etwas grösseren a macht jedoch die Lösung von $x^2-Dy^2=a^2$ immer ziemliche Schwierigkeiten.

§. 9.

Berechnung der Seiten aus den Winkeln.

Eine bedeutende Menge rationaler Dreiecke kann man auf folgende Art leicht finden: Ist

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A=\frac{t}{u},$$

also

$$\sin A=\frac{2tu}{t^2+u^2},\quad \cos A=\frac{u^2-t^2}{t^2+u^2},$$

dann

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B=\frac{t'}{u'},$$

daher

$$\sin B=\frac{2t'u'}{t'^2+u'^2},\quad \cos B=\frac{u'^2-t'^2}{t'^2+u'^2},$$

so erhält man wegen $C=180^0-(A+B)$,

$$\sin C=\sin(A+B)=\frac{2tu(u'^2-t'^2)}{(t^2+u^2)(t'^2+u'^2)}+\frac{2t'u'(u^2-t^2)}{(t^2+u^2)(t'^2+u'^2)},$$

d. i.

$$\sin C = \frac{2(uu'-tt')(tu'+t'u)}{(t^2+u^2)(t'^2+u'^2)}.$$

Mittelst des Sinussatzes gelangt man zu

$$a:b = \frac{2tu}{t^2+u^2} : \frac{2t'u'}{t'^2+u'^2},$$

somit

$$b = \frac{at'u'(t^2+u^2)}{tu(t'^2+u'^2)},$$

$$a:c = \frac{2tu}{t^2+u^2} : \sin C, \quad c = \frac{a(uu'-tt')(tu'+t'u)}{tu(t'^2+u'^2)}.$$

Um als Seiten relative Primzahlen zu erhalten, setze man

$$ak = tu(t'^2+u'^2),$$

dann ist

$$\left.\begin{array}{l} ak = tu(t'^2+u'^2), \\ bk = t'u'(t^2+u^2), \quad ck = (uu'-tt')(tu'+t'u) \end{array}\right\} \quad . \; . \; 1)$$

So folgt aus $t=3$, $u=4$, $t'=2$, $u'=3$

$$ak = 12 \times 13, \quad bk = 6 \times 25, \quad ck = 6 \times 17$$

und bei $k=6$ hat man $\Delta(26, 25, 17) = \Delta(17, 25, 26)$.

Rechtwinklige Dreiecke ergeben sich aus $t'=u'=1$, wo bei $k=1$, $a=2tu$, $b=t^2+u^2$, $c=u^2-t^2$, also

$$\Delta(u^2-t^2, \quad 2tu, \quad t^2+u^2). \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

Gleichschenklige Dreiecke erhält man bei $t'=t$, $u'=u$ aus $ak=tu(t^2+u^2)=bk$, $ck=2tu(u^2-t^2)$, wo $k=tu$, im Ausdrucke

$$\Delta(t^2+u^2, \quad t^2+u^2, \quad 2(u^2-t^2)). \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3)$$

Der Umstand, dass manchmal $c \overset{=}{<} 0$ erscheint, rührt, wie diess bei Null und negativen Grössen meistentheils geschieht, von überschrittenen Positionsbedingungen her; denn bei sonst positiven Werthen von t, u, t', u' soll wegen $\sin C > 0$ auch $uu'-tt' > 0$, d. i. $uu' > tt'$ sein.

F r a g e. Wie gelangt man von den Gleichungen 1) zu $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B) : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B) = (a+b):(a-b)$?

Mittelst der eben angeführten Sätze lassen sich alle im Dreiecke

vorkommenden Grössen als Funktionen von tu, $t'u'$, k darstellen. So erhält man aus $F = \frac{1}{2}ab\sin C$ die Formel

$$Fk^2 = tut'u'(tu' + t'u)(uu' - tt'),$$

dann

$$sk = uu'(tu' + t'u), \qquad (s-a)k = t'u(uu' - tt'),$$

$$(s-b)\,k = tu'(uu' - tt'), \qquad (s-c)\,k = tt'(tu' + t'u),$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \frac{uu' - tt'}{tu' + t'u}, \qquad \cos C = \frac{(tu' + t'u)^2 - (uu' - tt')^2}{(t^2 + u^2)(t'^2 + u'^2)},$$

u. s. w.

Man löse darnach die im §. 6. vorkommenden Aufgaben im Allgemeinen auf, und wende die Formeln auf einen speciellen Fall an!

§. 10.

Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen.

Setzt man der Uebersicht wegen nicht nur

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \frac{t}{u}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \frac{t'}{u'},$$

sondern auch

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \frac{t''}{u''},$$

so erhält man wegen

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \cot\tfrac{1}{2}(B + C) = \left(1 - \frac{t't''}{u'u''}\right) : \left(\frac{t'}{u'} + \frac{t''}{u''}\right),$$

$$\frac{t}{u} = \frac{u'u'' - t't''}{t'u'' + t''u'}, \quad \frac{t'}{u'} = \frac{uu'' - tt''}{tu'' + t''u}, \quad \frac{t''}{u''} = \frac{uu' - tt'}{tu' + t'u}, \quad . \quad . \; 4)$$

wo die zweite und dritte Gleichung aus der vorhergehenden durch höhere Streichung entsteht. Heissen p, p', p'' die grössten Zahlen, wodurch sich die Brüche in 4) beziehungsweise kürzen lassen (die Kürzer), so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{lll} tp = u'u'' - t't'', & t'p' = uu'' - tt'', & t''p'' = uu' - tt' \\ up = t'u'' + t''u', & u'p' = tu'' + t''u, & u''p'' = tu' + t'u. \end{array}\right\} \quad . \quad . \; 5)$$

Die Quadratsummen hievon geben

$$(t^2 + u^2)p^2 = (t'^2 + u'^2)(t''^2 + u''^2), \quad (t'^2 + u'^2)p'^2 = (t^2 + u^2)(t''^2 + u''^2),$$

und aus dem Produkte dieser Gleichungen folgt

$$p^2 p'^2 = (t''^2 + u''^2)^2$$

d. i.

$$pp' = t''^2 + u''^2, \quad pp'' = t'^2 + u'^2, \quad p'p'' = t^2 + u^2, \quad \ldots 6)$$

woraus man dann

$$pp'p'' = \sqrt{[(t^2+u^2)(t'^2+u'^2)(t''^2+u''^2)]}$$

und

$$p = \sqrt{\frac{(t'^2+u'^2)(t''^2+u''^2)}{t^2+u^2}}, \quad p' = \sqrt{\frac{(t^2+u^2)(t''^2+u''^2)}{t'^2+u'^2}},$$

$$p'' = \sqrt{\frac{(t^2+u^2)(t'^2+u'^2)}{(t''^2+u''^2)}}, \quad \ldots \ldots \ldots 7)$$

erhält. Setzt man aus 5), 6) die bezüglichen Werthe in die Gleichung 1), so findet man

$$ak = tupp'', \quad bk = t'u'p'p'', \quad ck = t''u''p''^2.$$

Sind, wie gewöhnlich, a, b, c theilfremd, dann kann man

$$k = lp'' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots 8)$$

nehmen, und es ist

$$al = tup, \quad bl = t'u'p', \quad cl = t''u''p'', \quad \ldots \ldots 9)$$

wo l das grösste gemeinschaftliche Mass der Produkte tu, $t'u'$, $t''u''$ angibt, wenn p, p', p'' relativ prim sind

Durch Substitution dieser neuen Grössen in die Ausdrücke des §. 9. gelangt man zu vielen interessanten Formeln, wie

$$sl = uu'u'', \quad (s-a)l = ut't'', \quad (s-b)l = tu't'',$$

$$(s-c)l = tt'u'', \quad Fl^2 = tt't''uu'u'', \quad Fl = stt't'' \text{ u. s. w.}$$

1. **Anmerkung.** Bei Angabe von Grössengattungen, die in dieser Abhandlung oft vorkommen, kann man Kürze wegen die Zahlen einklammern, und die Bedeutung der ersten vorsetzen. So ist z. B. bei rechtwinkligen Dreiecken nach 2)

$$\Delta(u^2 - t^2,\ 2tu,\ t^2 + u^2), \quad \frac{t}{u}\left(\frac{u-t}{u+t},\ \frac{t}{u},\ \frac{1}{1}\right), \quad p(1,\ 2,\ t^2 + u^2),$$

und bei gleichschenkligen Dreiecken nach 3)

$$\Delta(t^2+u^2,\ t^2+u^2,\ 2(u^2-t^2)), \quad \frac{t}{u}\left(\frac{t}{u},\ \frac{t}{u},\ \frac{u^2-t^2}{2tu}\right), \quad p(t^2+u^2,\ t^2+u^2,\ 1).$$

2. **Anmerkung.** Die Abhandlung des Herrn **Ligowski**, Bd. XLVI., S. 503. dieses Archivs, stimmt mit diesen Untersuchungen überein, falls daselbst

$$x=\frac{u}{t}=\cot\tfrac{1}{2}A,\quad y=\frac{u'}{t'}=\cot\tfrac{1}{2}B,\quad z=\frac{u''}{t''}=\cot\tfrac{1}{2}C,\quad \varrho=\frac{t''p''}{tt'}$$

gesetzt, und jede der Linien a, b, c, S, $S-a$ u. s. w. u. s. w. $\frac{k}{t^2t'^2}$ mal genommen wird. Aus

$$xyz=x+y+z$$

folgt dann

$$\frac{uu'u''}{tt't''}=\frac{u}{t}+\frac{u'}{t'}+\frac{u''}{t''},$$

welches Resultat auch diese Theorie liefert.

§. 11

Relation zwischen den Kürzern und den Tangenten halber Winkel.

Da nach Gleichung 6) die Kürzer p, p', p'' in Summen aus zwei Quadraten aufgehen, so müssen sie, wie bekannt, selbst solche Summen sein; man kann daher

$$p=\lambda^2+\mu^2,\quad p'=\lambda'^2+\mu'^2,\quad p''=\lambda''^2+\mu''^2 \quad ..\ 10)$$

setzen, und die neuen Grössen $\lambda\lambda'\lambda''\mu\mu'\mu''$ Vermittler nennen, weil sie den Uebergang zur analytischen Behandlung der rationalen Dreiecke vermitteln. Aus diesen Vermittlern findet man die Tangenten der halben Winkel durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll} t=-(\lambda'\lambda''+\mu'\mu''), & t'=-(\lambda\lambda''+\mu\mu''), & t''=-(\lambda\lambda'+\mu\mu') \\ u=\lambda''\mu'-\lambda'\mu'', & u'=\lambda\mu''-\lambda''\mu, & u''=\lambda'\mu-\lambda\mu'. \end{array}\right\} \quad ..\ 11)$$

Von der Zulässigkeit dieser Setzungen kann man sich durch Substitution der hier in 10), 11) vorkommenden Werthe in die Gleichungen 4), 5), überzeugen.

Man kann zwar die Grössen $\frac{t}{u}$ auf mehrfache Art aus $\frac{\lambda}{\mu}$ bestimmen; die angeführten Gleichungen haben aber vor andern Methoden, die doch schlüsslich zu demselben Ziele führen, das voraus, dass sie bei gehöriger Zeichenbestimmung der Vermittler sämmtlich positive Werthe von tu liefern, und die höhere Streichung zulassen; weshalb diese trinären Ausdrücke auch symmetrisch verrückt werden können; d. h. erhält man

$$\left(\frac{t}{u}, \frac{t'}{u'}, \frac{t''}{u''}\right) \text{ aus } \left(\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda'}{\mu'}, \frac{\lambda''}{\mu''}\right),$$

so ergibt sich

$$\left(\frac{t'}{u'}, \frac{t''}{u''}, \frac{t}{u}\right) \text{ aus } \left(\frac{\lambda'}{\mu'}, \frac{\lambda''}{\mu''}, \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Sollen nur zwei von den Brüchen $\frac{t}{u}$ versetzt werden, so sind ausser der Versetzung ihrer bezüglichen $\frac{\lambda}{\mu}$ noch alle λ oder μ negativ zu nehmen, wie diess nach Gleichung 11) aus

$$\left(\frac{\lambda}{-\mu}, \frac{\lambda''}{-\mu''}, \frac{\lambda'}{-\mu'}\right) \text{ was } \left(\frac{t}{u}, \frac{t''}{u''}, \frac{t'}{u'}\right)$$

gibt, hervorgeht.

Sind die Vermittler a priori gegeben, so liefern sie gewöhnlich mehrere t oder u negativ; wollen wir sie positiv haben, so gelangen wir dazu durch gehörige Umstürzung und Zeichenänderung. Dazu dienen, wenn wie vorausgesetzt

$$\left(\frac{t}{u}, \frac{t'}{u'}, \frac{t''}{u''}\right) \text{ aus } \left(\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda'}{\mu'}, \frac{\lambda''}{\mu''}\right)$$

berechnet ist, die Ausdrücke

$$\left(\frac{-t}{u}, \frac{u'}{t'}, \frac{u''}{t''}\right) \text{ bei } \left(\frac{\mu}{\lambda}, \frac{-\lambda'}{\mu'}, \frac{\lambda''}{-\mu''}\right), \quad . \; . \; \alpha)$$

$$\left(\frac{t}{-u}, \frac{t'}{-u'}, \frac{t''}{-u''}\right) \quad \text{„} \quad \left(\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\mu'}{\lambda'}, \frac{\mu''}{\lambda''}\right), \quad . \; . \; \beta)$$

$$\left(\frac{t}{u}, \frac{-u'}{t'}, \frac{u''}{-t''}\right) \quad \text{„} \quad \left(\frac{-\mu}{\lambda}, \frac{\lambda'}{\mu'}, \frac{\lambda''}{\mu''}\right). \quad . \; . \; \gamma)$$

Geht man einige Beispiele durch, so wird man sich überzeugen, dass man mit diesen Schemen bei gehöriger Verrückung oder Versetzung ausreicht; sonst müsste hiezu eine eigene Tabelle verfasst werden. Die Richtigkeit von α), β), γ) erhellet aus 11).

Die Anwendung hievon mögen zwei Beispiele erläutern:

a) Aus

$$\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right) \text{ folgt } \frac{t}{u}\left(\frac{-21}{-1}, \frac{-11}{3}, \frac{-9}{-2}\right).$$

Nach α) macht man den Zähler im ersten Bruche bei $\frac{t}{u}$ positiv und die zwei andern werden umgestürzt; bei $\frac{\lambda}{\mu}$ wird der erste Bruch umgestürzt, die andern nicht, aber beim zweiten wird der Zähler und beim dritten der Nenner negativ gemacht, so ist

$$\frac{t}{u}\left(\frac{21}{-1}, \frac{3}{-11}, \frac{-2}{-9}\right) \text{ und } \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{2}{1}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{-5}\right).$$

Nach β) werden alle u positiv, wenn die $\frac{\lambda}{\mu}$ umgestürzt werden; das gibt

$$\frac{t}{u}\left(\frac{21}{1}, \frac{3}{11}, \frac{-2}{9}\right), \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{-1}, \frac{-5}{1}\right).$$

Um hier noch $\frac{-2}{9}$ positiv zu machen, wozu α) dient, muss man die Ausdrücke noch verrücken, sie erhalten dann die Gestalt

$$\frac{t}{u}\left(\frac{-2}{9}, \frac{21}{1}, \frac{3}{11}\right), \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{-5}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{-1}\right),$$

was in

$$\frac{t}{u}\left(\frac{2}{9}, \frac{1}{21}, \frac{11}{3}\right), \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{-5}, \frac{-1}{2}, \frac{4}{1}\right)$$

übergeht.

2)
$$\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}\right)$$

gibt

$$\frac{t}{u}\left(\frac{-9}{19}, \frac{-7}{-9}, \frac{-9}{-2}\right),$$

nach α) ist

$$\frac{t}{u}\left(\frac{9}{19}, \frac{-9}{-7}, \frac{-2}{-9}\right), \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{2}{1}, \frac{-1}{4}, \frac{5}{-1}\right).$$

Dann gibt γ)

$$\frac{t}{u}\left(\frac{9}{19}, \frac{7}{-9}, \frac{-9}{2}\right), \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{5}{-1}\right),$$

so wie auch

$$\frac{t}{u}\left(\frac{9}{19}, \frac{9}{7}, \frac{2}{9}\right), \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{-2}{-1}, \frac{-1}{4}, \frac{5}{-1}\right) = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{2}{1}, \frac{1}{-4}, \frac{-5}{1}\right).$$

Weil die Ausdrücke

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda'}{\mu'}, \frac{\lambda''}{\mu''}\right), \left(\frac{-\mu}{\lambda}, \frac{-\mu'}{\lambda'}, \frac{-\mu''}{\lambda''}\right), \left(\frac{\mu}{-\lambda}, \frac{\mu'}{-\lambda'}, \frac{\mu''}{-\lambda''}\right),$$
$$\left(\frac{-\lambda}{-\mu}, \frac{-\lambda'}{-\mu'}, \frac{-\lambda''}{-\mu''}\right)$$

nach 11) dieselben Werthe von $\frac{t}{u}$ mit denselben Vorzeichen geben, so lassen sich die sechs Vermittler so einrichten, dass unter ihnen blos zwei negativ vorkommen.

§. 12.

Bestimmung der Vermittler aus den Tangenten der halben Winkel.

a) Zu diesem Zwecke berechnet man zuerst nach Gleichung 6) oder 7) die Kürzer p, p', p'', und es ergibt sich als Folge von 11)

$$\left.\begin{aligned} \lambda' &= \frac{u''\mu - t''\lambda}{p}, \quad \mu' = -\frac{u''\lambda + t''\mu}{p} \\ \lambda'' &= \frac{u\mu' - t\lambda'}{p'}, \quad \mu'' = -\frac{u\lambda' + t\mu'}{p'}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; 12)$$

Die erste von diesen Gleichungen ist als unbestimmt zu behandeln; denn um λ' zu finden, muss früher λ, μ ermittelt werden. In gewöhnlichen Fällen ist ihre Lösung nicht schwer, da wegen $p = \lambda^2 + \mu^2$ die Unbekannten λ, μ nur ein oder einige wenige Werthepaare haben.

Was schwierige Fälle anbelangt, möge den Vorgang nachstehendes Beispiel beleuchten: Wäre

$$\frac{t}{u}\left(\frac{3}{314}, \quad \frac{61}{312}, \quad \frac{477}{98}\right)$$

gegeben, so hat man nach Gleichung 6)

$$p'p'' = 98605, \quad pp'' = 101065, \quad pp' = 237133.$$

Hieraus findet man $p = 493$ als das grösste gemeinschaftliche Mass von 101065, 237133; dann ist $p(493, 481, 205)$. Nun soll $u''\mu - t''\lambda$ durch 493 theilbar sein, man hat daher

$$98\mu - 477\lambda \equiv 0, \text{ (Mod. 493)},$$

d. i.

$$98\mu \equiv 477\lambda, \quad 98\mu \equiv -16\lambda, \quad 49\mu \equiv -8\lambda.$$

Der letzten Kongruenz genügen für λ, μ beziehungsweise die Werthe 49, -8. Diess können aber nicht die gesuchten Grössen sein, da die Summe ihrer Quadrate den Model 493 übersteigt. Es ist jedoch

$$8^2+49^2=493\times5,$$

also

$$493\times5^2=(49^2+8^2)(1^2+2^2)=(98\pm8)^2+(49\mp16)^2=90^2+65^2,$$

daher

$$493=18^2+13^2=\lambda^2+\mu^2,$$

d. i.

$$\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{18}{-13},\ \frac{-20}{9},\ \frac{6}{13}\right).$$

Am öftesten kommt $p=1$ oder 2 vor, dann hat man

$$\left(\frac{t}{u},\ \frac{t'}{u_{\prime}},\ \frac{t''}{u''}\right),\ (1,\ p',\ p''),\ \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{0}{-1},\ \frac{-u''}{t''},\ \frac{u'}{t'}\right),$$

$$\left(\frac{t}{u},\ \frac{t'}{u'},\ \frac{t''}{u''}\right),\ (2,\ p',\ p''),\ \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{1},\ \frac{(u''-t''):2}{-(u''+t''):2},\ \frac{-(u'+t'):2}{(u'-t'):2}\right).$$

Eben so hat man bei rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecken nach §. 10.

$$\left(\frac{u-t}{u+t},\ \frac{t}{u},\ \frac{1}{1}\right),\ p(1,\ 2,\ t^2+u^2),\ \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{0}{-1},\ \frac{-1}{1},\ \frac{u}{t}\right),$$

$$\left(\frac{t}{u},\ \frac{t}{u},\ \frac{u^2-t^2}{2tu}\right),\ p(t^2+u^2,\ t^2+u^2,\ 1),\ \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{-u}{t},\ \frac{u}{t},\ \frac{0}{-1}\right).$$

b) Wollte man die Vermittler positiv haben, so dienen dazu ähnliche Regeln wie im vorigen Paragraph bei den Tangenten halber Winkel; es gibt nämlich

$$\left(\frac{\mu}{\lambda},\ \frac{\mu'}{\lambda'},\ \frac{\mu''}{\lambda''}\right),\quad \left(\frac{t}{-u},\ \frac{t'}{-u'},\ \frac{t''}{-u''}\right)$$

und

$$\left(\frac{\lambda}{-\mu},\ \frac{\mu'}{\lambda'},\ \frac{\mu''}{\lambda''}\right),\quad \left(\frac{t}{-u},\ \frac{-u'}{-t'},\ \frac{u''}{t''}\right),$$

falls

$$\left(\frac{t}{u},\ \frac{t'}{u'},\ \frac{t''}{u''}\right)\ \text{aus}\ \left(\frac{\lambda}{\mu},\ \frac{\lambda'}{\mu'},\ \frac{\lambda''}{\mu''}\right)$$

entstanden ist.

In praktischer Hinsicht ist das Positivmachen der Vermittler ohne Bedeutung; in theoretischer Beziehung folgt jedoch daraus, dass drei Vermittlerpaare, wie immer umgestürzt und bezeichnet, nicht mehr als vier rationale Dreiecke geben, die aus

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda'}{\mu'}, \frac{\lambda''}{\mu''}\right), \left(\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda'}{\mu'}, \frac{\mu''}{\lambda''}\right), \left(\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\mu'}{\lambda'}, \frac{\lambda''}{\mu''}\right), \left(\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\lambda'}{\mu'}, \frac{\lambda''}{\mu''}\right)$$

resultiren, da sich jede andere Komplexion mittelst obiger zwei Formeln auf eine von den unteren zwei Gestalten zurückführen lässt.

§. 13.

Koordinaten der Scheitel rationaler Dreiecke.

Aus den Gleichungen 11) ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} tu\lambda\mu + t'u'\lambda'\mu' + t''u''\lambda''\mu'' = 0, \\ tu(\lambda^2-\mu^2) + t'u'(\lambda'^2-\mu'^2) + t''u''(\lambda''^2-\mu''^2) = 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; 13)$$

und setzt man

$$\left.\begin{array}{lll} fl = 2tu\lambda\mu, & f'l = 2t'u'\lambda'\mu', & f''l = 2t''u''\lambda''\mu'', \\ gl = tu(\lambda^2-\mu^2), & g'l = t'u'(\lambda'^2-\mu'^2), & g''l = t''u''(\lambda''^2-\mu''^2), \end{array}\right\} 14)$$

so ist

$$f + f' + f'' = 0, \quad g + g' + g'' = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; 15)$$

wie auch

$$(f^2+g^2)l^2 = t^2u^2(\lambda^4 + 2\lambda^2\mu^2 + \mu^4) = t^2u^2(\lambda^2+\mu^2)^2 = t^2u^2p^2 = a^2l^2,$$

(nach Gleichung 10) und 9)), daher

$$a^2 = f^2 + g^2, \quad b^2 = f'^2 + g'^2, \quad c^2 = f''^2 + g''^2. \quad . \; . \; 16)$$

Nimmt man in Fig. 2.

$$a = BC, \quad b = AC, \quad c = AB$$

und

$$\begin{array}{lllll} f & = - CM & = - P'P'', & g = & BM, \\ f' = & AM' = & PP'', & g' = & CM', \\ f'' & = - AM'' & = - PP', & g'' = & - BM'' \end{array}$$

an, so wird dadurch den Gleichungen 15), 16) Genüge geleistet, und die Geraden OP, AP; OP', BP'; OP'', CP'' stellen die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte A, B, C dar. Heissen nun diese Koordinaten

$$m = OP,\quad m' = OP',\quad m'' = OP'',$$

$$n = AP,\quad n' = BP',\quad n'' = CP'',$$

so geben die vorstehenden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll} m'-m'' = f, & m''-m = f', & m-m' = f'', \\ n'-n'' = g, & n''-n = g', & n-n' = g'', \end{array}\right\} \quad \ldots 17)$$

was offenbar auch mit 15) übereinstimmt.

Hier haben wir sechs Unbekannte, und zu ihrer Bestimmung nur vier Gleichungen, da nach 15) die Werthe von f'', g'' aus f, f' und g, g' hervorgehen. Man kann daher zwei Unbekannte z. B. m, n beliebig nehmen, und erhält

$$\left.\begin{array}{lll} m, & m' = m - f'', & m'' = m + f', \\ n, & n' = n - g'', & n'' = n + g'. \end{array}\right\} \quad \ldots 18)$$

Zu Schulaufgaben eignen sich am besten positive und so weit es angeht kleine Koordinaten, und man gelangt z. B. bei

$$\Delta(5,\ 29,\ 30),\quad \frac{t}{u}\left(\frac{1}{12},\ \frac{3}{4},\ \frac{9}{8}\right),\quad \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{-2},\ \frac{-5}{2},\ \frac{1}{2}\right)\quad l = 12$$

zu

$$f = -4,\quad f' = -20,\quad f'' = 24,$$

$$g = -3,\quad g' = 21,\quad g'' = -18,$$

was wegen

$$m,\quad m' = m - 24,\quad m'' = m - 20,$$

$$n,\quad n' = n + 18,\quad n'' = n + 21,$$

$$\begin{array}{lll} m = 24, & m' = 0, & m'' = 4, \\ n = 0, & n' = 18, & n'' = 21, \end{array} \quad \text{d. i.}\quad 24|0,\quad 0|18,\quad 4|21$$

gibt.

Nach diesen Grundsätzen ist zum praktischen Gebrauche die beigefügte Tabelle (s. am Ende) berechnet, worin alle rationalen Dreiecke vorkommen, deren Seiten 100 nicht übersteigen.

Uebrigens ist klar, dass hier nicht nur die Abszissen, sondern auch die Ordinaten um jede beliebige Grösse vermehrt oder vermindert werden können. Ist überdiess an den Grössen $\frac{\lambda}{\mu}$ und $\frac{f}{g}$ nichts gelegen, so kann man auch die Abszissen mit den Ordinaten vertauschen, und bei diesen oder jenen die Zeichen ändern.

§. 14.

Folgesätze.

a) Zwischen den bei rationalen Dreiecken vorkommenden Grössen bestehen viele, mitunter interessante Beziehungen. So folgt aus der Fläche

$$F = \tfrac{1}{2}(AP + BP')PP' + \tfrac{1}{2}(BP' + CP'')P'P'' - \tfrac{1}{2}(AP + CP'')PP'',$$

$$2F = (n + n')(m' - m) + (n' + n'')(m'' - m') - (n + n'')(m'' - m),$$

$$= -(n + n')f'' - (n' + n'')f - (n + n'')f' = (n + n')(f + f')$$

$$-(n' + n'')f - (n + n'')f' = f'(n' - n'') - f(n'' - n) = f'g - fg',$$

und bei höherer Streichung

$$2F = f'g - fg' = f''g' - f'g'' = fg'' - f''g \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

Diess gibt nach Gleichung 15)

$$fn + f'n' + f''n'' = -(gm + g'm' + g''m'') = 2F; \quad . \quad . \quad 20)$$

so wie auch

$$fm + f'm' + f''m'' = gn + g'n' + g''n'' = 0. \quad . \quad . \quad . \quad 21)$$

b) Ist

$$y = a'x + b'$$

die Gleichung einer Geraden in der Ebene, so stellt, wie bekannt, a' die Tangente des oberhalb rechts liegenden Winkels, den die gegebene Gerade mit der Abszissenaxe bildet, (des Richtungswinkels) dar.

Werden nun die den Seiten a, b, c zugehörigen Richtungswinkel mit α, α', α'' bezeichnet, so hat man in Fig. 3. $\alpha = CA'X$, $\alpha' = AB'X$, $\alpha'' = BC'X$. Aber der Winkel $BC'X$ in Fig. 3. ist $= BAM''$ in Fig. 2.; man hat daher

$$\operatorname{tg}\alpha'' = \operatorname{tg} BC'X = \operatorname{tg} BAM'' = \frac{BM''}{AM''} = \frac{n' - n}{m' - m} = \frac{g''}{f''}.$$

Die Richtungskonstanten der Dreiecksseiten sind demnach

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{g}{f}, \quad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{g'}{f'}, \quad \operatorname{tg}\alpha'' = \frac{g''}{f''}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22)$$

In Folge dessen haben alle zu a, b, c perpendikulären Geraden beziehungsweise die Richtungskonstanten $-\frac{f}{g}$, $-\frac{f'}{g'}$, $-\frac{f''}{g''}$.

c) Halbirt die Gerade AE den Winkel $A = BAC$, ist daher nach §. 10. $\operatorname{tg} C'AE = \frac{t}{u}$, so hat man wegen

$$AEX = AC'X - C'AE = BC'X - C'AE,$$

was

$$\operatorname{tg} AEX = \frac{\operatorname{tg} BC'X - \operatorname{tg} C'AE}{1 + \operatorname{tg} BC'X . \operatorname{tg} C'AE} = \left(\frac{g''}{f''} - \frac{t}{u}\right) : \left(1 + \frac{g''t}{f''u}\right)$$
$$= \frac{g''u - f''t}{f''u + g''t}$$

gibt, nach Gleichung 14) in

$$\frac{(\lambda''^2 - \mu''^2)\, u - 2\lambda''\mu''t}{2\lambda''\mu''u + (\lambda''^2 - \mu''^2)\, t}$$

übergeht, und wegen Gleichung 11) zu

$$\operatorname{tg} AEX = \frac{\lambda'\mu'' + \lambda''\mu'}{\mu'\mu'' - \lambda'\lambda''}$$

führt. Werden nun die Richtungskonstanten von den Halbirungslinien der inneren Winkel A, B, C beziehungsweise mit $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\beta'}{\gamma'}$, $\frac{\beta''}{\gamma''}$ bezeichnet, so hat man

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\lambda'\mu'' + \lambda''\mu'}{\mu'\mu'' - \lambda'\lambda''}, \quad \frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{\lambda\mu'' + \lambda''\mu}{\mu\mu'' - \lambda\lambda''}, \quad \frac{\beta''}{\gamma''} = \frac{\lambda\mu' + \lambda'\mu}{\mu\mu' - \lambda\lambda'} \quad \ldots 23)$$

Die Geraden, welche die äusseren Dreieckswinkel halbiren, stehen auf den Halbirungslinen innerer Winkel senkrecht; für sie sind daher die angeführten Richtungskonstanten umgestürzt und negativ zu nehmen.

d) Da

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg}(BC'X - AB'X') = \left(\frac{g''}{f''} - \frac{g'}{f'}\right) : \left(1 + \frac{g'g''}{f'f''}\right) = \frac{f'g'' - f''g'}{f'f'' + g'g''};$$

so hat man nach Gleichung 19)

$$\operatorname{tg} A = -\frac{2F}{f'f'' + g'g''}, \quad \operatorname{tg} B = -\frac{2F}{ff'' + gg''}, \quad \operatorname{tg} C = -\frac{2F}{ff' + gg'}.$$

Diess gibt

$$g \cot A = -\frac{f'f''g + gg'g''}{2F},$$

so wie

$$g' \cot B - f'' = -\frac{ff''g' + gg'g''}{2F} - \frac{f''(f'g - fg')}{2F}$$
$$= -\frac{f'f''g + gg'g''}{2F},$$

d. i.

$$g \cot A = g' \cot B - m + m',$$

so dass man bei höherer Streichung zu

$$g \cot A + m = g' \cot B + m' = g'' \cot C + m''$$

gelangt. Auf ähnliche Art erhält man auch

$$f \cot A - n = f' \cot B - n' = f'' \cot C - n''.$$

§. 15.

Bestimmung der Geraden und Punkte in rationalen Dreiecken.

a) Was die Seiten $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ anbelangt, gelten für sie nach Gleichung 22) beziehungsweise die Ausdrücke

$$y - n' = \frac{g}{f}(x - m'),\quad y - n'' = \frac{g'}{f'}(x - m''),\quad y - n = \frac{g''}{f''}(x - m).$$

Hieraus erhält man bei $y = 0$ die Längen von Segmenten der Abszissenaxe, und bei $x = 0$ jene der Ordinatenaxe.

Seiten, bei denen $g = 0$, sind zur Abszissenaxe, und wo $f = 0$ vorkommt, zur Ordinatenaxe parallel.

b) Eben so erhält man als Gleichungen für die Senkrechten

von A auf BC, $\quad y - n = -\frac{f}{g}(x - m),$

„ B „ AC, $\quad y - n' = -\frac{f'}{g'}(x - m'),$

„ C „ AB, $\quad y - n'' = -\frac{f''}{g''}(x - m'').$

Die Werthe

$$x = M_1 = g \cot A + m,\quad y = N_1 = -f \cot A + n$$

lassen nach §. 14. d) die höhere Streichung zu, und genügen desshalb allen drei Gleichungen. M_1, N_1 sind demnach Koordinaten des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes der Dreiecks-

höhen. Die Entfernungen dieses Punktes von den Scheiteln A, B, C sind wegen

$$\sqrt{[(M_1-m)^2+(N_1-n)^2]} = \sqrt{(f^2+g^2)\cot A^2},$$

beziehungsweise $a\cot A$, $b\cot B$, $c\cot C$.

c) Die Gleichungen der in den Mittelpunkten der Seiten stehenden Senkrechten sind

$$\text{bei } BC, \quad y-\tfrac{1}{2}(n'+n'') = -\frac{f}{g}[x-\tfrac{1}{2}(m'+m'')],$$

$$\text{,, } AC, \quad y-\tfrac{1}{2}(n+n'') = -\frac{f'}{g'}[x-\tfrac{1}{2}(m+m'')],$$

$$\text{,, } AB, \quad y-\tfrac{1}{2}(n+n') = -\frac{f''}{g''}[x-\tfrac{1}{2}(m+m')].$$

Für den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt hat man mit Rücksicht auf §. 14. d)

$$M_2 = \tfrac{1}{2}(-g\cot A+m'+m''), \quad N_2 = \tfrac{1}{2}(f\cot A+n'+n'').$$

Diess mit den Werthen von M_1, N_1 in b) verglichen gibt

$$M_1+2M_2 = m+m'+m'', \quad N_1+2N_2 = n+n'+n''.$$

Ferner findet man

$$m-M_2 = \tfrac{1}{2}(g\cot A+2m-m'-m'') = \tfrac{1}{2}(g\cot A-f'+f''),$$
$$n-N_2 = \tfrac{1}{2}(-f\cot A+2n-n'-n'') = \tfrac{1}{2}(-f\cot A-g'+g'').$$

Diess mit den Werthen von $4F$ multiplizirt gibt nach Gleichung 19) und 14) d)

$$4F(m-M_2) = -f'f''g-gg'g''-f'(fg''-f''g)+f''(f'g-fg')$$
$$= -gg'g''-ff'g''+f'f''g-ff''g'.$$

Eben so ist

$$4F(n-N_2) = ff'f''+fg'g''-g'(fg''-f''g)+g''(f'g-fg')$$
$$= ff'f''-fg'g''+f''gg'+f'gg''.$$

Die Summe der Quadrate letzterer Gleichungen beträgt

$$16F^2[(m-M_2)^2+(n-N_2)^2] = (f^2+g^2)(f'^2+g'^2)(f''^2+g''^2)$$
$$= a^2b^2c^2;$$

somit ist die Entfernung des Durchschnittspunktes von A, und wegen Zulässigkeit höherer Streichung von B und C

$$\sqrt{[(m-M_2)^2+(n-N_2)^2]} = abc:4F.$$

Diess ist also der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises.

d) Die Gleichungen der Geraden, welche die Scheitel mit den Mittelpunkten der Gegenseiten verbinden, sind

$$y-n=\frac{g'-g''}{f'-f''}(x-m), \qquad y-n'=\frac{g''-g}{f''-f}(x-m'),$$
$$y-n''=\frac{g-g'}{f-f'}(x-m''),$$

indem z. B. die erste dieser Linien durch die Punkte m, n; $\frac{1}{2}(m'+m'')$, $\frac{1}{2}(n'+n'')$ geht, somit zur Richtungskonstante

$$\frac{\frac{1}{2}n'+\frac{1}{2}n''-n}{\frac{1}{2}m'+\frac{1}{2}m''-m}=\frac{n'+n''-2n}{m'+m''-2m}=\frac{g'-g''}{f'-f''}$$

hat.

Diese drei Linien schneiden sich im Punkte

$$M_3=\tfrac{1}{3}(f'-f'')+m, \qquad N_3=\tfrac{1}{3}(g'-g'')+n;$$

da diese Ausdrücke die höhere Streichung zulassen. Diess ist bekanntlich der Schwerpunkt, weshalb auch die obigen Geraden die Schwerlinien heissen.

Für die Gerade, welche durch die Punkte M_1N_1, M_2N_2 geht, erhält man die Gleichung

$$y+f\cot A-n=\frac{3f\cot A+g'-g''}{-3g\cot A+f'-f''}(x-g\cot A-m),$$

welcher auch die Werthe M_3, N_3 genügen. Diese drei Punkte liegen daher in einer Geraden, welche bei rechtwinkligen Dreiecken wegen $\cot C=0$ in

$$y-n''=\frac{g-g'}{f-f'}(x-m'')$$

übergeht, somit durch den Scheitel des rechten Winkels und die Mitte der Hypotenuse geht.

Folgesatz. Die Gleichung der Geraden AB ist nach a)

$$y-n=\frac{g''}{f''}(x-m),$$

und die Gleichung ihrer Schwerlinie

$$y-n''=\frac{g-g'}{f-f'}(x-m'');$$

die Kotangente des von beiden Linien eingeschlossenen Winkels α ist demnach

$$\cot\alpha = \left(1 + \frac{g''}{f''} \cdot \frac{g-g'}{f-f'}\right) : \left(\frac{g''}{f''} - \frac{g-g'}{f-f'}\right)$$
$$= \frac{ff''-f'f''+gg''-g'g''}{fg''-f''g+f''g'-f'g''},$$

wobei nach Gleichung 19) der Nenner $4F$ beträgt. In Folge dessen hat man

$$4F\cot\alpha = ff''-f'f''+gg''-g'g'',$$

und bei höherer Streichung

$$4F\cot\alpha' = ff'-ff''+gg'-gg'',$$

so wie

$$4F\cot\alpha'' = f'f''-ff'+g'g''-gg'.$$

Aus der Summe dieser drei Gleichungen ergibt sich

$$\cot\alpha + \cot\alpha' + \cot\alpha'' = 0.$$

Siehe Band XLIX., S. 115. und S. 346 dieses Archivs.

e) Die Gleichungen der Geraden, welche die inneren Winkel A, B, C halbiren, sind beziehungsweise nach §. 14. c)

$$y-n = \frac{\beta}{\gamma}(x-m), \quad y-n' = \frac{\beta'}{\gamma'}(x-m'), \quad y-n'' = \frac{\beta''}{\gamma''}(x-m'').$$

Um hier zu erfahren, ob diese drei Geraden durch einen Punkt gehen, setze man

$$y = y'+n, \qquad x = x'+m;$$

dann ist

$$y' = \frac{\beta x'}{\gamma}$$

und die zweite Gleichung gibt

$$\frac{\beta x'}{\gamma} + g'' = \frac{\beta'}{\gamma'}(x'+f'')$$

d. i.

$$x' = \gamma \cdot \frac{f''\beta'-g''\gamma'}{\beta\gamma'-\beta'\gamma}.$$

Es ist aber nach Gleichung 14) und 23)

$$f''\beta' - g''\gamma' = \frac{t''u''}{l}\left[2\lambda''\mu''(\lambda\mu'' + \lambda''\mu) - (\lambda''^2 - \mu''^2)(\mu\mu'' - \lambda\lambda'')\right]$$
$$= \frac{t''u''}{l}(\lambda''^2 + \mu''^2)(\lambda\lambda'' + \mu\mu'') = -\frac{tt''u''p''}{l}.$$

Eben so hat man

$$(\beta\gamma' - \beta'\gamma) = (\lambda'\mu'' + \lambda''\mu')(\mu\mu'' - \lambda\lambda'') - (\lambda\mu'' + \lambda''\mu)(\mu'\mu'' - \lambda'\lambda'')$$
$$= (\lambda''^2 + \mu''^2)(\lambda'\mu - \lambda\mu') = p''u''.$$

Werden daher die Koordinaten des gesuchten Punktes analoger Weise mit M_4, N_4 bezeichnet, so ist

$$M_4 = -\frac{\gamma t' t''}{l} + m, \qquad N_4 = -\frac{\beta t' t''}{l} + n.$$

Dass M_4 bei höherer Streichung konstant bleibt, erhellet aus den Gleichungen

$$\frac{\gamma t' t''}{l} - m = \frac{\gamma' t t''}{l} - m'?$$

$$t''(\gamma t' - \gamma' t) = l(m - m') = f''l = 2t''u''\lambda''\mu''?$$

$$\gamma t' - \gamma' t = -(\mu'\mu'' - \lambda'\lambda'')(\lambda\lambda'' + \mu\mu'') + (\mu\mu'' - \lambda\lambda'')(\lambda'\lambda'' + \mu'\mu'')$$
$$= 2\lambda''\mu''(\lambda'\mu - \lambda\mu') = 2u''\lambda''\mu'',$$

was schon ausser Frage steht. Denselben Gang befolgt der Beweis bei N_4.

Die Entfernung dieses Punktes von A beträgt

$$\sqrt{[(M_4 - m)^2 + (N_4 - n)^2]} = \frac{t't''}{l}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} = \frac{t't''}{l}\sqrt{p'p''}.$$

Diess mit

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \frac{t}{\sqrt{t^2 + u^2}} = \frac{t}{\sqrt{p'p''}}$$

multiplizirt gibt den perpendikulären Abstand des besagten Punktes von AB an, und ist nach den Bemerkungen zu Gleichung 9)

$$= \frac{tt't''}{l} = \frac{F}{s}.$$

Diese durch höhere Streichung sich nicht ändernde Senkrechte stellt den Halbmesser des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises dar.

f) Für die Halbirungsgeraden des inneren Winkels A und der äusseren Winkel B, C bestehen die Gleichungen

$$y-n=\frac{\beta}{\gamma}(x-m),\quad y-n'=-\frac{\gamma'}{\beta'}(x-m'),$$
$$y-n''=-\frac{\gamma''}{\beta''}(x-m''),$$

ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt hat die Koordinaten

$$M_5=-\frac{\gamma u'u''}{l}+m=\quad\frac{\beta' tu''}{l}+m'=-\frac{\beta'' tu'}{l}+m'',$$

$$N_5=-\frac{\beta u'u''}{l}+n=-\frac{\gamma' tu''}{l}+n'=\quad\frac{\gamma'' tu'}{l}+n'',$$

wobei die Nachweisung wie unter e) ist. Dieser Punkt hat von A die Entfernung $\frac{u'u''}{l}\sqrt{p'p''}$; der Halbmesser des äusseren an BC angeschriebenen Kreises beträgt daher

$$\frac{tu'u''}{l}=\frac{F}{s-a}.$$

g) Die Linien, von denen eine den inneren Winkel B und die andern die äusseren Winkel A, C halbiren, haben die Gleichungen

$$y-n=-\frac{\gamma}{\beta}(x-m),\quad y-n'=\frac{\beta'}{\gamma'}(x-m'),$$
$$y-n''=-\frac{\gamma''}{\beta''}(x-m'').$$

Da diese Ausdrücke aus jenen in f) sich durch höhere Streichung ableiten lassen, so hat man auch

$$M_6=-\frac{\beta t'u''}{l}+m=-\frac{\gamma' uu''}{l}+m'=\quad\frac{\beta'' t'u}{l}+m'',$$

$$N_6=\quad\frac{\gamma t'u''}{l}+n=-\frac{\beta' uu''}{l}+n'=-\frac{\gamma'' t'u}{l}+n'',$$

und als Halbmesser ergibt sich

$$\frac{t'uu''}{l}=\frac{F}{s-b}.$$

h) Was schlüsslich die Geraden anbelangt, von denen eine den inneren Winkel C, die anderen zwei aber die äusseren A, B halbiren, so hat man

$$y-n=-\frac{\gamma}{\beta}(x-m),\quad y-n'=-\frac{\gamma'}{\beta'}(x-m'),$$

$$y-n''=\frac{\beta''}{\gamma''}(x-m''),$$

woraus dann eben so

$$M_\gamma=\frac{\beta t''u'}{l}+m=-\frac{\beta' t''u}{l}+m'=-\frac{\gamma''uu'}{l}+m'',$$

$$N_\gamma=-\frac{\gamma t''u'}{l}+n=\frac{\gamma' t''u}{l}+n'=-\frac{\beta''uu'}{l}+n'';$$

und der Halbmesser

$$=\frac{t''uu'}{l}=\frac{F}{s-c}$$

folgt.

Jenschowitz, den 2. November 1869.

Wenzel Šimerka.

Seiten			Fläche	Tangenten halber Winl			
a,	b,	c	F	$\frac{t}{u}$,	$\frac{t'}{u'}$,	$\frac{t''}{u''}$	$\frac{t'}{t'}$
10,	17,	21	84	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{7}{6}$	$\frac{10}{9}$
10,	35,	39	168	$\frac{1}{8}$,	$\frac{4}{7}$,	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
11,	13,	20	66	$\frac{3}{11}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{3}{2}$	$\frac{14}{3}$
11,	25,	30	132	$\frac{2}{11}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$
11,	60,	61	330	$\frac{1}{11}$,	$\frac{5}{6}$,	$\frac{1}{1}$	[illegible]
11,	90,	97	396	$\frac{1}{22}$,	$\frac{4}{9}$,	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{4}$
12,	17,	25	90	$\frac{2}{9}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{5}$
12,	35,	37	210	$\frac{1}{6}$,	$\frac{5}{7}$,	$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{6}$
12,	55,	65	198	$\frac{1}{18}$,	$\frac{3}{11}$,	$\frac{3}{1}$	$\frac{9}{7}$
13,	13,	24	60	$\frac{1}{5}$,	$\frac{1}{5}$,	$\frac{12}{5}$	$\frac{4}{3}$
13,	14,	15	84	$\frac{1}{2}$,	$\frac{4}{7}$,	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$
13,	20,	21	126	$\frac{1}{3}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{7}{9}$	[illegible]
13,	30,	37	180	$\frac{1}{6}$,	$\frac{9}{20}$,	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$
13,	37,	40	240	$\frac{1}{6}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{16}{15}$	$\frac{3}{5}$
13,	40,	45	252	$\frac{1}{7}$,	$\frac{4}{7}$,	$\frac{9}{7}$	[illegible]
13,	40,	51	156	$\frac{1}{13}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{3}{1}$	[illegible]
13,	68,	75	390	$\frac{1}{13}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{5}{3}$	[illegible]
13,	84,	85	546	$\frac{1}{13}$,	$\frac{6}{7}$,	$\frac{1}{1}$	[illegible]
14,	25,	25	168	$\frac{7}{24}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{3}{4}$	[illegible]
14,	61,	65	420	$\frac{3}{28}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{6}{5}$	[illegible]
15,	26,	37	156	$\frac{1}{6}$,	$\frac{4}{13}$,	$\frac{2}{1}$	[illegible]
15,	28,	41	126	$\frac{1}{9}$,	$\frac{3}{14}$,	$\frac{3}{1}$	[illegible]
15,	34,	35	252	$\frac{2}{9}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{6}{7}$	[illegible]
15,	37,	44	264	1/[illegible]	1/[illegible]	11/[illegible]	[illegible]

den Buchbinder!

ıen S. 224. und S. 241. eingeheftet.

XXIV.

Die Coordinaten des Schwerpunktes eines beliebigen Vierecks und sich aus denselben ergebende Constructionen dieses Punktes im Vergleich mit dem Schwerpunkte des Trapezes.

Von

Herrn Prof. Dr. *H. Emsmann*,
an der Realschule I. Ordnung zu Stettin.

(Fig. s. Taf. IV.)

Im Archiv der Mathematik und Physik (Theil L., Heft 2. S. 212.—219.) sind in Veranlassung der bekannten Construction des Schwerpunktes eines Trapezes neben einer neuen interessanten graphischen Bestimmung desselben vom Herrn Herausgeber die Coordinaten dieses Punktes analytisch entwickelt.

Heisst das Trapez in continuirlicher Bezeichnung $ABCD$ mit den beiden parallelen Seiten AB und CD, von denen die längere $AB = a$, die kürzere $CD = b$ ist, so ergiebt sich für A als Anfangspunkt des rechtwinkeligen Coordinatensystems, wenn AB die positive Abscissenhalbaxe ist, die positiven Ordinaten in der Richtung der Höhe genommen sind und die Höhe mit h bezeichnet wird, für den Schwerpunkt die Abscisse

$$X = \tfrac{1}{3}(a - b + c + \frac{bc}{a+b})$$

und die Ordinate

$$Y = \tfrac{1}{3}h\,\frac{a+2b}{a+b},$$

wo a die Abscisse des Punktes B und c dieselbe für C ist.

Die bekannte Construction des Schwerpunktes eines Trapezes, in Betreff deren in obiger Abhandlung auf Culmann verwiesen ist, hat mich schon längst veranlasst, die Coordinaten des Schwerpunktes des allgemeinen Vierecks zu bestimmen, um aus ihnen die des Trapezes als des speciellen Falles abzuleiten, und um zu ersehen, wie die Construction für das Trapez aus der für das allgemeine Viereck hervorgeht. Einige der erhaltenen Resultate erlaube ich mir im Folgenden mitzutheilen.

Das Viereck heisse in continuirlicher Bezeichnung $ABCD$; A sei Anfangspunkt des rechtwinkeligen Coordinatensystems, AB die positive Abscissenhalbaxe, die positiven Ordinaten liegen nach der Seite der Figur zu und zwar sei die Abscisse für $B=a$, für $C=c$, für $D=d$; die Seite $CD=b$, und die Ordinate für $C=h$ und für $D=h_1$.

Verfolgt man den Gang, welcher in der oben angegebenen Abhandlung durchgeführt ist, so ergiebt sich für den Schwerpunkt des allgemeinen Vierecks

$$\left.\begin{aligned} X &= \tfrac{1}{3}\left(c+d+\frac{a(a-d)h}{ch_1+(a-d)h}\right),\\ Y &= \tfrac{1}{3}\left(h+\frac{ch_1^2-dhh_1}{ch_1+(a-d)h}\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{I.}$$

Führt man, wie in den Formeln für das Trapez die Seite b ein, setzt man also $d=c-\sqrt{b^2-(h_1-h)^2}$; so erhält man folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} X &= \tfrac{1}{3}\left(a-\sqrt{b^2-(h_1-h)^2}+c+\frac{c\left[a-c+\sqrt{b^2-(h_1-h)^2}-\frac{h_1}{h}(a-c)\right]}{c\frac{h_1}{h}+a-c+\sqrt{b^2-(h_1-h)^2}}\right) \\ &\text{und} \\ Y &= \tfrac{1}{3}h\,.\,\frac{ah+(h_1+h)\sqrt{b^2-(h_1-h)^2}+c\frac{h_1^2-h^2}{h}}{ch_1+h\left(a-c+\sqrt{b^2-(h_1-h)^2}\right)}. \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

Da für das Trapez $h_1=h$ wird, so resultiren hieraus die obigen Trapezformeln sofort; ebenso auch die für den Schwerpunkt des Dreiecks, nämlich $x=\frac{1}{3}(a+c)$ und $y=\frac{1}{3}h$, wenn ausser $h_1=h$ noch $b=0$ gesetzt wird.

Sucht man nach diesen einander entsprechenden Formeln die einander entsprechenden Constructionen, so scheinen diejenigen für das allgemeine Viereck ziemlich complicirt ausfallen zu müssen; dem

ist indessen nicht so, da die Formeln unter II. auf die einfacheren unter I. bei der Construction zurückgehen und diese leicht construirbar sind.

a. Geben wir dem Werthe für X unter I. die Form:

$$X = \tfrac{1}{2}\left(c + d + \frac{a(a-d)}{c\frac{h_1}{h} + a - d}\right).$$

Ist das Viereck $ABCD$ (Fig. 1.) gegeben, so verlängere man DC, bis AB in O geschnitten wird; ziehe $CE \perp AB$; mache die Verlängerung $EM = EA$; fälle $DF \perp AB$ und verbinde O mit M, wodurch die Verlängerung von DF in P geschnitten wird. Schneidet man hierauf $FR = FA$ von FP ab; zieht AR, bis die Verbindungslinie von B und P in Q geschnitten wird, und fällt $QU \perp AB$; so ist

$$X = \tfrac{1}{2}(AE + AF + BU).$$

Behufs des einfachen Beweises, braucht man nur $FN = FB$ zu machen, N mit B zu verbinden und QU bis zum Durchschnitt mit BN in L zu verlängern.

Führt man diese Construction an dem Trapeze aus, so ergiebt sich Folgendes:

Ist das Trapez $ABCD$ (Fig. 2.) gegeben, so fälle man von C und D die Normalen CE und DF auf AB; mache FP, die Verlängerung von DF, $= AE$; ziehe PB; schneide auf FP die Strecke $FR = FA$ ab; verlängere AR bis zum Durchschnitt mit BP in Q und fälle $QU \perp AB$. Es ist dann

$$X = \tfrac{1}{2}(AE + AF + BU).$$

b. Geben wir dem Werthe für X unter I. die Form:

$$X = \tfrac{1}{2}\left(c + d + \frac{a(a-d)\frac{h}{h_1}}{c + (a-d)\frac{h}{h_1}}\right).$$

Ist das Viereck $ABCD$ (Fig. 3.) gegeben, so ziehe man $CS \parallel DB$; errichte in A auf AB die Normale $AM = AB$; verbinde M mit S; fälle $CE \perp AB$ und verlängere CE bis zum Durchschnittspunkte P mit MS. Fällt man noch $DF \perp AB$, so ist

$$X = \tfrac{1}{2}(AE + AF + EP).$$

Der Beweis schliesst sich unmittelbar an die Construction an ohne weitere Hilfslinie.

Führt man diese Construction an dem Trapeze aus, so ergiebt sich Folgendes:

Ist das Trapez *ABCD* (Fig. 4.) gegeben, so mache man *BS*, die Verlängerung von *AB*, $= CD$; errichte in *A* auf *AB* die Normale $AM = AB$; verbinde *M* mit *S*; fälle $CE \perp AB$ und verlängere *CE* bis zum Durchschnittspunkte *P* mit *MS*. Fällt man noch $DF \perp AB$, so ist

$$X = \tfrac{1}{3}(AE + AF + EP).$$

Hier sehen wir die grösste Uebereinstimmung zwischen der Construction der Abscisse für den Schwerpunkt des allgemeinen Vierecks und des Trapezes.

c. Geben wir dem Werthe für *Y* unter I. die Form:

$$Y = \tfrac{1}{3}\left(h + \frac{h_1\left(c\frac{h_1}{h} - d\right)}{c\frac{h_1}{h} + a - d}\right).$$

Ist das Viereck *ABCD* (Fig. 5.) gegeben, so verlängere man *DC*, bis *AB* in *O* geschnitten wird; ziehe $CE \perp AB$; mache die Verlängerung $EM = EA$; fälle $DF \perp AB$ und verbinde *O* mit *M*, wodurch die Verlängerung von *DF* in *P* geschnitten wird. Schneidet man hierauf $FQ = FP$ ab; zieht durch *D* eine Parallele mit *AB*, welche die in *B* auf *AB* errichtete Normale in *R* schneidet, verbindet *R* mit *Q* und errichtet in *A* eine Normale auf *AB*, welche *RQ* in *S* trifft; so ist

$$Y = \tfrac{1}{3}(CE + AS).$$

Führt man diese Construction an dem Trapeze aus, so ergiebt sich Folgendes:

Ist das Trapez *ABCD* (Fig. 6.) gegeben, so verlängere man die längere parallele Seite um eine Strecke gleich der kürzeren ($AQ = CD$) und die kürzere nach der entgegengesetzten Seite bis zum Durchschnitt mit der Normalen auf der längeren in dem nach derselben Seite hin liegenden Endpunkte ($CR = EB$); verbinde die Endpunkte der Verlängerungen (*QR*) und errichte in dem anderen Endpunkte (*A*) der längeren Seite eine Normale (*AS*), bis sie die Verbindungslinie schneidet. Es ist dann

$$Y = \tfrac{1}{3}(CE + AS) = \tfrac{1}{3}(BR + AS).$$

d. **Geben wir dem Werthe für Y unter I. die Form:**

$$Y = \tfrac{1}{2}\left(h + \frac{ch_1 - dh}{c + (a-d)\frac{h}{h_1}}\right).$$

Ist das Viereck $ABCD$ (Fig. 7.) gegeben, so ziehe man $CS \parallel DB$ und verlängere DC bis zum Durchschnitt mit AB in O; construire EM und FP wie bei Fig. I.; mache $FQ = FP$; errichte $AG \perp AB$ bis $DG \parallel AB$ geschnitten wird; verbinde G mit S und verlängere SG bis zum Durchschnitt R mit einer in Q auf QB errichteten Normalen. Dann ist

$$Y = \tfrac{1}{2} QR.$$

Es beruht diese Construction mit darauf, dass

$$(a-d)\frac{h}{h_1} = ES$$

ist, also

$$Y = \tfrac{1}{2}\left(h + \frac{ch_1 - dh}{AS}\right) = \tfrac{1}{2}\,\frac{FS.h + AE.h_1}{AS}$$

wird.

Führt man diese Construction an dem Trapeze aus, so ergiebt sich folgende einfache Construction:

Ist das Trapez $ABCD$ (Fig. 8.) gegeben, so verlängere man die längere der parallelen Seiten um die kürzere nach beiden Seiten hin ($BS = AQ = CD$); errichte AG normal auf der längeren Seite bis zum Durchschnitte mit der kürzeren; verbinde den Durchschnittspunkt (G) mit dem Endpunkte (S) der Verlängerung an dem anderen Ende der längeren Seite und verlängere diese Verbindungslinie (GS) bis zum Durchschnitt (R) mit der in Q auf QS errichteten Normalen. Es ist dann

$$Y = \tfrac{1}{2} QR.$$

Die Ordinate Y könnte man auch aus der Gleichung

$$Y = \tfrac{1}{2}\left(h + \frac{c\frac{h_1^2}{h} - dh_1}{c\frac{h_1}{h} + a - d}\right) = \tfrac{1}{2}\left(h + \frac{h_1\left(c\frac{h_1}{h} - d\right)}{c\frac{h_1}{h} + a - d}\right)$$

construiren und daraus wieder eine neue Construction für das Trapez ableiten, wie sich auch noch andere Constructionen durch Umformung der Gleichungen für X und Y ergeben; das Vor-

stehende genügt aber mehr denn ausreichend, um die verschiedenartigen Constructionen zu erweisen. Die grosse Anzahl von Combinationen, um die Lage des Schwerpunktes selbst zu bestimmen, noch anzudeuten, bedarf es nicht.

Schliesslich erwähne ich noch eines Satzes, der sich aus der Construction für das Trapez unter a. (Fig. 2.) ergiebt und leicht synthetisch zu erweisen ist.

Nimmt man (Fig. 9.) auf einer Strecke (AB) zwei beliebige Punkte (E und F) an, zieht durch diese Parallelen von einer Länge, welche gleich ist der Summe aus den Abständen des betreffenden Punktes von den beiden nächst liegenden ($FP = AF + FE$ und $EP' = EB + EF$), verbindet die Endpunkte mit dem entfernteren Endpunkte der Strecke (BP und AP'), schneidet auf jeder Parallelen von ihrem Anfangspunkte eine Strecke ab, gleich der Entfernung des Anfangspunktes von dem näheren Endpunkte der Strecke ($FR = AF$ und $ER' = EB$), zieht durch diese Punkte und den näheren Endpunkt der Strecke Strahlen, bis sie obige Verbindungslinien schneiden (ARQ und $BR'Q'$); so läuft die Verbindungslinie dieser beiden Punkte mit den Parallelen parallel und trifft die gegebene Strecke stets in demselben Punkte (N).

Die beiden auf der Strecke (AB) beliebig anzunehmenden Punkte (E und F) sind zwar in Fig. 9. zwischen A und B angenommen worden; indessen ist, wie sogleich von selbst in die Augen fällt, die Lage dieser Punkte gleichgültig, wenn man nur bei der Construction gehörig positiv oder negativ abträgt und verbindet, und dann natürlich auch das Wort „Summe" in dem allgemeinen arithmetischen Sinne nimmt, was sich eigentlich Alles von selbst versteht.

XXV.

Problema geometricum,

propositum a

D^{re}. *Christiano Fr. Lindman*,
Lectore Stregn.

(Fig. Tab. VI.).

Problema, quod mihi proposui ad solvendum, est, rectam per punctum datum ita ducere, ut triangulum datum in duas partes aequales dividat. Quod quamquam non dubito, quin antea propositum solutumque sit, mihi tamen non indignum visum est, de quo denuo disseratur.

Solutio mere geometrica eo facilius invenitur, quod problema propositum in hoc includitur: per punctum datum rectam ducere, quae duas rectas inter se secantes ita secet, ut triangulum inde ortum datae fiat magnitudinis. Sit igitur ABC (Fig. I.) triangulum datum et P punctum datum. Per P ducatur recta DE lateri alicui AC parallela fiatque parallelogrammum $ADEF =$ dimidio trianguli i. e. est quarta proportionalis AF ad AD, $\frac{1}{2}AC$, $\frac{1}{2}AB$ quaeratur et parallelogrammum conficiatur. Ducta deinde $FO = PD$ et ad AC perpendiculari, ex O ut centro scribatur circulus, cujus radius est $= PE$. Ita inveniemus in AC duo puncta aut unum punctum aut nullum, prout sit $PE \gtreqless PD$. In figura puncta sunt duo H et H', quae cum P conjuncta dant duas rectas GH, $G'H'$, quarum utraque triangulum datum in duas partes aequales dividat. Eadem quoque constructio de angulis B et C facienda est. Quo facto, duo alia

puncta nunc invenientur in AC et duo in BC. Attamen problemati proposito nullae aliae lineae satisfaciunt, quam quae latera trianguli inter vertices angulorum secent. E lineis igitur, quae, adhibitis angulis B et C, inveniuntur, una tantum G_2H_2 problemati convenit. Itaque per punctum P tres tantum tales lineae nunc duci possunt. Etsi problema, triangulo ABC dato, tres admittit solutiones, inde tamen colligere non licet, rem semper ita se habituram, neque apparet, quomodo quantitates datae comparatae esse debeant, ut una vel plures solutiones exsistant, id quod via analytica investigandum est.

Primum igitur quaeramus locum punctorum, ubi rectae, quae triangulum datum ABC (Fig. II.) in duas partes aequales dividant, ipsae bipartitae sunt. Origine in A collocata et AC, AB axibus abscissarum et ordinatarum resp. sumtis, aequatio rectae ejusmodi est

$$\frac{\xi}{u}+\frac{\eta}{z}=1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

si sunt $(u, 0)$, $(0, z)$ coordinatae punctorum, ubi axes secat. Coordinatae puncti medii igitur sunt $x=\frac{1}{2}u$, $y=\frac{1}{2}z$. Quoniam vero superficies trianguli ita orti est $=\frac{1}{2}uz \operatorname{Sin} A$ et dimidium trianguli dati aequat vel est $=\frac{1}{4}bc \operatorname{Sin} A$, aequatio loci quaesiti erit

$$xy=\tfrac{1}{8}bc \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

quae est aequatio hyperbolae, axes pro asymptotis habentis. Hyperbola illa satis commode scribi potest, quia unum ex punctis ejus $b'(x=\frac{1}{4}b,\ y=\frac{1}{2}c)$ cognitum est. Quemadmodum is ramus hyperbolae (2), de quo nunc agitur, cadit inter BC et rectam BC parallelam, quae triangulum bifariam secat et hyperbolam tangit, sic duae aliae sunt hyperbolae, similiter ad AC et AB sitae ac prima ad BC, quarum aequationes facile reperiuntur. Enimvero si aequatio (1) rectam repraesentat, quae AB in P, BC in Q secat, quoniam est

$$\frac{\xi}{b}+\frac{\eta}{c}=1$$

aequatio rectae BC, colligitur, coordinatas punctorum P et Q esse resp.

$$\xi_1=\frac{bu(c-z)}{cu-bz},\quad \eta_1=\frac{cz(u-b)}{cu-bz};\quad \xi_2=0,\quad \eta_2=z$$

atque ideo $\Delta BPQ=\dfrac{au(c-z)^2}{2(cu-bz)}\operatorname{Sin} B$. Quia autem ΔBPQ $=\frac{1}{2}\Delta ABC=\dfrac{ac}{4}\operatorname{Sin} B$, prodit aequatio

$$\frac{u\,(c-z)^2}{cu-bz}=\frac{c}{2}.$$

Quum vero coordinatae puncti medii rectae PQ sint

$$x=\frac{bu\,(c-z)}{2(cu-bz)},\quad y=\tfrac{1}{2}\left(z+\frac{cz\,(u-b)}{cu-bz}\right),$$

eliminandis u et z invenitur

$$cx^2+bxy-bcx=-\frac{b^2c}{8}, \quad \ldots\ldots\ (3)$$

quae est aequatio hyperbolae, cujus asymptotae sunt AB et AC. Eodem modo invenitur aequatio

$$by^2+cxy-bcy=-\frac{bc^2}{8} \quad \ldots\ldots\ (4)$$

hyperbolae tertiae, quae CA et CB pro asymptotis habet. Jam patet, ramos hyperbolarum, intra ΔABC cadentes, inter se contactus habere, primum et secundum in puncto $c'(x=\frac{1}{2}b,\ y=\frac{1}{4}c)$, primum et tertium in puncto $b'(x=\frac{1}{4}b,\ y=\frac{1}{2}c)$, secundum et tertium in puncto $a'(x=\frac{1}{4}b,\ y=\frac{1}{4}c)$, eademque paria hyperbolarum a medianis CC', BB', AA' iisdem punctis tangi. E theoria hyperbolae cognitum est, omnes rectas, quae triangulum in duas partes aequales dividant, quandam ex his hyperbolis contingere. Necesse quoque est, latera trianguli inter vertices angulorum secari. Tangentes igitur per punctum datum $(x=\alpha,\ y=\beta)$ transeuntes quaerendae sunt. Si aequatio rectae, quae per punctum datum transit et hyperbolam (2) secat, est

$$y-\beta=t(x-\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ (5)$$

invenitur

$$x=\frac{\alpha t-\beta\pm\sqrt{(\alpha t-\beta)^2+\frac{1}{2}bct}}{2t}.$$

Ut aequatio (5) tangentem repraesentat, necesse est, sit

$$\sqrt{(\alpha t-\beta)^2+\frac{bct}{2}}=0$$

vel, si t_1 est valor quantitatis t huic rei respondens,

$$t_1=\frac{-(bc-4\alpha\beta)\pm R_1}{4\alpha^2},\qquad (R_1=\sqrt{b^2c^2-8bc\alpha\beta}).$$

Coordinatis puncti contactus per x_1, y_1 designatis, habebimus

$$x_1 = \frac{bc \pm R_1}{8\beta}, \qquad y_1 = \frac{bc \mp R_1}{8\alpha}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ (6)$$

Si t_2, t_3 sunt valores coëfficientis t, quando recta (5) hyperbolam (3) aut (4) tangit et x_2, y_2; x_3, y_3 designant coordinatas puncti contactus, inveniuntur

$$t_2 = \frac{bc - 4\alpha(c-\beta) \pm R_2}{4\alpha^2}, \quad (R_2 = \sqrt{b^2c^2 - 8c\alpha(bc - c\alpha - b\beta)}),$$

$$x_2 = \frac{b(bc \mp R_2)}{8(bc - c\alpha - b\beta)},$$

$$y_2 = \frac{8c\alpha(bc - c\alpha - b\beta) - b^2c(c-\beta) \mp (bc - 2c\alpha - b\beta)R_2}{8\alpha(bc - c\alpha - b\beta)};$$

$$t_3 = \frac{-bc + 4\beta(b-\alpha) \pm R_3}{2(b^2 - 2(b-\alpha)^2)}, \quad (R_3 = \sqrt{b^2c^2 - 8b\beta(bc - c\alpha - b\beta)}),$$

$$y_3 = \frac{c(bc \mp R_3)}{8(bc - c\alpha - b\beta)},$$

$$x_3 = \frac{8b\beta(bc - c\alpha - b\beta) - bc^2(b-\alpha) \mp (bc - c\alpha - 2b\beta)R_3}{8\beta(bc - c\alpha - b\beta)}.$$

Quantitates R_1, R_2, R_3 monstrant, fieri non posse, ut recta per punctum (α, β) transiens unam ex hyperbolis (2), (3), (4) contingat, nisi sit resp.

$$bc \geqq 8\alpha\beta, \quad b^2c \geqq 8\alpha(bc - c\alpha - b\beta), \quad bc^2 \geqq 8\beta(bc - c\alpha - b\beta).$$

Jam scrutandum est, quo pacto eventurum sit, ut lineae illae ramos hyperbolarum intra ΔABC cadentes tangant, neque obliviscendum est, tangentes cum eodem ramo contactum habere non posse, nisi punctum datum intra eum asymptotarum angulum jacet, qui ramum comprehendit.

Primum ponamus

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad bc - c\alpha - b\beta > 0$$

vel punctum intra triangulum; sequitur, ut utraque tangens eundem ramum tangat. Comparandis ordinatis punctorum b', a'', c' cum y_1, abscissis punctorum c', b'', a' cum x_2, ordinatis punctorum a', c'', b' cum y_3 reperiemus, contactum fieri

inter b' et a'', si est $\frac{c}{2} \underset{=}{>} \frac{bc+R_1}{8\alpha} \underset{=}{>} \frac{c}{2\sqrt{2}}$

$$\text{vel } 2c\alpha + b\beta \underset{=}{>} bc \underset{=}{>} (c\alpha + b\beta)\sqrt{2},$$

„ a'' et c', „ „ $\frac{c}{2\sqrt{2}} \underset{=}{>} \frac{bc-R_1}{8\alpha} \underset{=}{>} \frac{c}{4}$

$$\text{vel } 2b\beta + c\alpha \underset{=}{>} bc \underset{=}{>} (c\alpha + b\beta)\sqrt{2},$$

„ c' et b'', „ „ $\frac{b}{2} \underset{=}{>} \frac{b(bc+R_2)}{8(bc-c\alpha-b\beta)} \underset{=}{>} \frac{b}{2\sqrt{2}}$

$$\text{vel } bc \underset{=}{>} 2b\beta + c\alpha, \; \beta \underset{=}{>} c(1-\frac{1}{\sqrt{2}}),$$

„ b'' et a', „ „ $\frac{b}{2\sqrt{2}} \underset{=}{>} \frac{b(bc-R_2)}{8(bc-c\alpha-b\beta)} \underset{=}{>} \frac{b}{4}$

$$\text{vel } \beta \underset{=}{>} c(1-\frac{1}{\sqrt{2}}), \; c\alpha \underset{=}{>} b\beta,$$

„ a' et c'', „ „ $\frac{c}{2\sqrt{2}} \underset{=}{>} \frac{c(bc-R_3)}{8(bc-c\alpha-b\beta)} \underset{=}{>} \frac{c}{4}$

$$\text{vel } \alpha \underset{=}{>} b(1-\frac{1}{\sqrt{2}}), \; b\beta \underset{=}{>} c\alpha,$$

„ c'' et b', „ „ $\frac{c}{2} \underset{=}{>} \frac{c(bc+R_3)}{8(bc-c\alpha-b\beta)} \underset{=}{>} \frac{c}{2\sqrt{2}}$

$$\text{vel } bc \underset{=}{>} 2c\alpha + b\beta, \; \alpha \underset{=}{>} b(1-\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Inde elucet, rectas, quae triangulum datum in duas partes aequales dividant, numquam plures tribus esse, et inspectio figurae docet, id non evenire, nisi punctum (α, β) intra spatium curvilineum $a'c''b'a''c'b''a'$ situm sit.

Positis deinde

$$\alpha > 0, \; \beta > 0, \; bc - c\alpha - b\beta = 0,$$

vel punctum in BC situm esse, facile perspicitur, nullam tangentem hyperbolae primae problemati satisfacere. Quum vero nunc ha-

beamus $x_2 = \frac{\alpha}{2}$, $y_3 = \frac{\beta}{2}$, colligitur, unam tangentem hyperbolae secundae problemati convenire, si est

$$b \overset{>}{=} \alpha \overset{>}{=} \frac{b}{2},$$

et unam hyperbolae tertiae, si est

$$c \overset{>}{=} \beta \overset{>}{=} \frac{c}{2},$$

quae tamen res non simul evenire possunt. Itaque una tantum linea ejusmodi invenitur.

Si est

$$\alpha > b, \quad \beta < 0, \quad bc - c\alpha - b\beta = 0$$

vel punctum in linea BC producta, una reperitur recta hyperbolam primam tangens, si est

$$2c\alpha + b\beta \overset{>}{=} bc \overset{>}{=} c\alpha + 2b\beta;$$

si est

$$\alpha < 0, \quad \beta > 0,$$

una exsistit linea eandem hyperbolam tangens, si est

$$2b\beta + c\alpha \overset{>}{=} bc \overset{>}{=} b\beta + 2c\alpha.$$

Ne multus sim, mihi sufficiat dicere, unam tantum rectam, quae triangulum bifariam secet, reperiri pro quovis situ puncti dati, sive est extra triangulum sive in quodam ejus latere, id quod eodem fere atque antea modo invenitur, praeterquam quod valores tantum positivi quantitatum y_1, x_2, y_3 cum aptis coordinatis punctorum b', c', a' comparantur.

XXVI.

Ueber eine Brechungscurve.

Von

Herrn Dr. *Ad. Hochheim*,
Lehrer an der höheren Gewerbeschule zu Magdeburg.

(Figur s. Taf. V.)

In Theil L. Nr. III. S. 54. dieses Archivs stellt Herr Professor Kudelka in einer Abhandlung: „Die Gesetze der Lichtbrechung" folgendes ungelöste Problem auf:

Von einem leuchtenden Punkte O mögen zwei Strahlen auf eine Ebene fallen, welche zwei ungleich stark brechende Medien trennt; sie werden dann beim Durchgange durch die Ebene gebrochen und die gebrochenen Strahlen schneiden sich rückwärts verlängert in einem Punkte.

Man denke sich nun das Medium, in welches die von O kommenden Strahlen eintreten, hinsichtlich seiner materiellen Beschaffenheit wie durch Zauberei in stetiger Veränderung begriffen, so dass dadurch der Brechungsexponent m in den Zustand stetigen Wachsen versetzt wird. Die den obigen einfallenden Strahlen, die wir als unveränderlich beibehalten, entsprechenden gebrochenen Strahlen, werden alsdann immer grösser und grösser, ihr Schnittpunkt wird seinen Ort verändern und somit eine gewisse Bahn beschreiben.

Näheres über die Gestalt und Beschaffenheit der Bahn möge hier folgen:

Die Gerade XX bilde die Grenze zwischen den beiden Medien und sei zugleich Abscissen-Axe. Der lichtstrahlende Punkt O habe die Coordinaten a, b. Die beiden von ihm ausgehenden Strahlen seien AO und BO. A liege im Anfangspunkte des Coordinatensystems, B habe die Coordinaten ϱ, 0. Der Einfallswinkel des Strahles OA sei α, der des Strahles OB sei β; die entsprechenden Brechungswinkel seien α_1 und β_1. Der Durchschnittspunkt der rückwärts verlängerten gebrochenen Strahlen sei F mit den Coordinaten xy, dann ist die Gleichung der Geraden AF:

$$y = \frac{\sqrt{m^2 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \cdot x,$$

und die der Geraden BF:

$$y = \frac{\sqrt{m^2 - \sin^2\beta}}{\sin\beta} (x - \varrho).$$

Quadriren wir jede dieser beiden Gleichungen, so ergiebt sich:

$$y^2 \sin^2\alpha = x^2 m^2 - x^2 \sin^2\alpha,$$

$$y^2 \sin^2\beta = (x - \varrho)^2 m^2 - (x - \varrho)^2 \sin^2\beta.$$

Durch Elimination von m^2 aus diesen beiden Gleichungen findet man die Gleichung für den geometrischen Ort der Schnittpunkte der gebrochenen Strahlen:

$$y^2 = \frac{x^2 (x - \varrho)^2 (\sin^2\alpha - \sin^2\beta)}{x^2 \sin^2\beta - (x - \varrho)^2 \sin^2\alpha}$$

oder

$$y = \pm R \frac{x(x - \varrho)}{\sqrt{x^2 \sin^2\beta - (x - \varrho)^2 \sin^2\alpha}},$$

wo

$$R = \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}$$

ist.

Die Curve besteht aus zwei Theilen, die sich im Punkte $x = \varrho$ durchschneiden. Beide liegen symmetrisch zur x-Axe zwischen den Geraden

$$x = \frac{\varrho \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

und

$$x = \frac{\varrho \sin\alpha}{\sin\alpha - \sin\beta},$$

die sie zu Asymptoten haben.

Für

$$x < \frac{\varrho \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

und

$$x > \frac{\varrho \sin\alpha}{\sin\alpha - \sin\beta}$$

ist y imaginär. Der Anfangspunkt des Coordinatensystems ist demnach ein isolirter Punkt der Curve. Der leuchtende Punkt O liegt in der Curve, denn setzt man

$$x = \frac{\varrho \cot\beta}{\cot\beta - \cot\alpha} = a,$$

so geht die Gleichung der Curve über in

$$y = \pm \frac{\varrho \cot\alpha \cot\beta}{\cot\beta - \cot\alpha} = \pm b,$$

in ihm schneiden sich die gebrochenen Strahlen für $m = 1$.

Um den Lauf der Curve noch genauer zu untersuchen, bilden wir die beiden ersten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \pm R \frac{x^3 \sin^2\beta - (x-\varrho)^3 \sin^2\alpha}{(x^2 \sin^2\beta - (x-\varrho)^2 \sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm R \frac{3x(x-\varrho)\varrho^2 \sin^2\alpha . \sin^2\beta}{(x^2 \sin^2\beta - (x-\varrho)^2 \sin^2\alpha)^{\frac{5}{2}}}.$$

Für $x < \varrho$ haben y und $\frac{dy}{dx}$ stets entgegengesetzte Vorzeichen; zwischen $x = \varrho \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta}$ und $x = \varrho$ muss demnach der oberhalb der x-Axe liegende Theil herab-, der unterhalb liegende aufsteigen; für alle Werthe von x zwischen ϱ und $\varrho \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \sin\beta}$ haben y und $\frac{dy}{dx}$ gleiche Vorzeichen, der über der x-Axe liegende Theil steigt daher auf, der unterhalb liegende ab.

Setzt man

$$x = \varrho \frac{\sqrt[3]{\sin^2\alpha}}{\sqrt[3]{\sin^2\alpha} - \sqrt[3]{\sin^2\beta}},$$

so wird $\frac{dy}{dx} = 0$; doch ist hier weder ein Maximum, noch ein Minimum vorhanden, da sich die Curve nicht über $x = \varrho \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \sin\beta}$ hinaus erstreckt.

Da y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ stets gleiche Vorzeichen besitzen, so muss die Curve der x-Axe stets die convexe Seite zukehren; für $x = \varrho$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, jeder Theil der Curve besitzt daher im Punkte $(\varrho, 0)$ einen Beugungspunkt.

Der Schnittpunkt der gebrochenen Strahlen wird sich nur auf dem Arme der Curve bewegen, welcher zwischen $x = \varrho$ und $x = \varrho \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \sin\beta}$ oberhalb der x-Axe liegt; er durchläuft für $m < 1$ das Stück zwischen $x = \varrho$ und $x = a$; für $m > 1$ den übrigen Theil, der sich in die Unendlichkeit erstreckt.

Berichtigungen zum ersten Hefte dieses Theils.

S. 8. Z. 16. v. o. Statt „r“ s. m. „T“.
S. 8. „ 17. v. o. „ „und“ s. m. „um“.
S. 8. „ 7. v. u. „ „r“ s. m. „T“.
S. 9. „ 4. v. o. „ „des“ s. m. „eines“.
S. 9. Z. 3—Z. 9 v. o. ist dem gesperrt gedruckten Satze die folgende Fassung zu geben:

„Jedes unendlich kleine Flächenstück kann durch einen unendlich kleinen Kreisbogen erzeugt werden, wenn sich derselbe so bewegt, dass einer seiner Punkte einen zweiten unendlich kleinen Kreisbogen beschreibt, während der zu jenem Punkte gehörige Radius des ersten Bogens mit dem zu einem bestimmten Punkte des zweiten Bogens gehörigen Radius parallel bleibt und die Ebenen der beiden Bogen beständig auf einander senkrecht stehen.“ K. Exner.

XXVII.

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, insbesondere auch die allgemeine Gleichung des Kreises, in Dreilinien-Coordinaten oder in sogenannten trimetrischen Coordinaten.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte in Dreilinien-Coordinaten scheint mir noch nicht in so vollständiger und allgemeiner Entwickelung gegeben zu sein, wie ich dieselbe in dieser Abhandlung zu geben versuchen werde, um daran späterhin noch weitere Entwickelungen in dieser Richtung anzuschliessen. Als vollständig bekannt setze ich dabei voraus die von mir in der Abhandlung Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. gegebene allgemeine Theorie der Dreilinien-Coordinaten, auf die ich mich im Folgenden öfters zu beziehen genöthigt sein werde, wobei ich zugleich bemerke, dass ich — wenn nicht etwas Anderes besonders bemerkt wird — hier überall ganz dieselben Zeichen wie in der genannten Abhandlung gebrauchen, und mich daher hier einer Erklärung dieser Zeichen ganz enthalten werde, indem ich vielmehr ein für alle Mal in dieser Beziehung auf jene Abhandlung verweise.

§. 2.

Die Coordinaten des Brennpunkts des Kegelschnitts seien $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ — wobei ich bemerke, dass diese Zeichen in der Ab-

handlung Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. S. 399. eine andere Bedeutung haben — und

$$1) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad Ap_0+Bp_1+Cp_2=0$$

sei die Gleichung der Directrix *). Ist nun $(p_0p_1p_2)$ jetzt ein beliebiger Punkt des Kegelschnitts, so ist nach Thl. XXXVIII. S. 433. das Quadrat der Entfernung dieses Punktes von der Directrix:

$$\frac{(Ap_0+Bp_1+Cp_2)^2}{A^2+B^2+C^2+2AB\cos w_{01}+2BC\cos w_{12}+2CA\cos w_{20}}.$$

Ferner ist nach Thl. XXXVIII. S. 426. das Quadrat der Entfernung des Punktes $(p_0p_1p_2)$ des Kegelschnitts von dem Brennpunkte $(\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2)$:

$$-\left\{\frac{(p_0-\overline{\omega}_0)^2\cos w_{12}}{\sin w_{01}\sin w_{20}}+\frac{(p_1-\overline{\omega}_1)^2\cos w_{20}}{\sin w_{12}\sin w_{01}}+\frac{(p_2-\overline{\omega}_2)^2\cos w_{01}}{\sin w_{20}\sin w_{12}}\right\}.$$

Bezeichnen wir nun wie gewöhnlich die Charakteristik des Kegelschnitts **) durch n, und erinnern uns, dass nach Thl. XXXI. Nr. XIII. bei einem jeden Kegelschnitte die Entfernung eines jeden Punktes desselben von dem Brennpunkte erhalten wird, wenn man die Entfernung dieses Punktes des Kegelschnitts von der Directrix mit der Charakteristik multiplicirt; so ist klar, dass:

$$2)\;.\;.\;.\;\frac{n^2(Ap_0+Bp_1+Cp_2)^2}{A^2+B^2+C^2+2AB\cos w_{01}+2BC\cos w_{12}+2CA\cos w_{20}}$$
$$=-\left\{\frac{(p_0-\overline{\omega}_0)^2\cos w_{12}}{\sin w_{01}\sin w_{20}}+\frac{(p_1-\overline{\omega}_1)^2\cos w_{20}}{\sin w_{12}\sin w_{01}}+\frac{(p_2-\overline{\omega}_2)^2\cos w_{01}}{\sin w_{20}\sin w_{12}}\right\}$$

die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte ist.

Setzen wir nun wie in Thl. XXXVIII. S. 406.:

$$3)\;.\;.\;.\;J=\frac{4\Delta^2}{s_0s_1s_2}=\overline{\omega}_0\sin w_{12}+\overline{\omega}_1\sin w_{20}+\overline{\omega}_2\sin w_{01}$$
$$=p_0\sin w_{12}+p_1\sin w_{20}+p_2\sin w_{01}$$

und der Kürze wegen:

---

*) M. s. meine Theorie der Kegelschnitte nach einer neuen Methode analytisch entwickelt in Thl. XXXI. Nr. XIII.

**) Thl. XXXI. S. 68.

$$4) \ldots G^2 = \frac{n^2 J^2}{A^2 + B^2 + C^2 + 2AB\cos w_{01} + 2BC\cos w_{12} + 2CA\cos w_{20}},$$

so können wir die vorstehende allgemeine Gleichung der Kegelschnitte auch auf den folgenden Ausdruck bringen:

$$5) \ldots \left.\begin{array}{l} G^2(Ap_0 + Bp_1 + Cp_2)^2 \\ + J^2\left\{\dfrac{(p_0-\overline{\omega}_0)^2\cos w_{12}}{\sin w_{01}\sin w_{20}} + \dfrac{(p_1-\overline{\omega}_1)^2\cos w_{20}}{\sin w_{12}\sin w_{01}} \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{(p_2-\overline{\omega}_2)^2\cos w_{01}}{\sin w_{20}\sin w_{12}}\right\} \end{array}\right\} = 0.$$

Es ist nun:

$$J^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \left\{\frac{(p_0-\overline{\omega}_0)^2\cos w_{12}}{\sin w_{01}\sin w_{20}} + \frac{(p_1-\overline{\omega}_1)^2\cos w_{20}}{\sin w_{12}\sin w_{01}} + \frac{(p_2-\overline{\omega}_2)^2\cos w_{01}}{\sin w_{20}\sin w_{12}}\right\}$$

$$= J^2 \left\{\begin{array}{l} (p_0-\overline{\omega}_0)^2 \sin w_{12}\cos w_{12} \\ + (p_1-\overline{\omega}_1)^2 \sin w_{20}\cos w_{20} \\ + (p_2-\overline{\omega}_2)^2 \sin w_{01}\cos w_{01} \end{array}\right\}$$

$$= J^2(p_0^2 \sin w_{12}\cos w_{12} + p_1^2 \sin w_{20}\cos w_{20} + p_2^2 \sin w_{01}\cos w_{01})$$
$$- 2J(p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01})$$
$$\times (p_0\overline{\omega}_0 \sin w_{12}\cos w_{12} + p_1\overline{\omega}_1 \sin w_{20}\cos w_{20} + p_2\overline{\omega}_2 \sin w_{01}\cos w_{01})$$
$$+ (p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01})^2$$
$$\times (\overline{\omega}_0^2 \sin w_{12}\cos w_{12} + \overline{\omega}_1^2 \sin w_{20}\cos w_{20} + \overline{\omega}_2^2 \sin w_{01}\cos w_{01}).$$

Denkt man sich diesen Ausdruck gehörig entwickelt, so überzeugt man sich auf der Stelle, dass der Coefficient von p_0^2 der folgende ist:

$$J^2 \sin w_{12}\cos w_{12} - 2J\overline{\omega}_0 \sin w_{12}^2 \cos w_{12}$$
$$+ (\overline{\omega}_0^2 \sin w_{12}\cos w_{12} + \overline{\omega}_1^2 \sin w_{20}\cos w_{20} + \overline{\omega}_2^2 \sin w_{01}\cos w_{01})\sin w_{12}^2$$
$$= (J - \overline{\omega}_0 \sin w_{12})^2 \sin w_{12}\cos w_{12}$$
$$+ (\overline{\omega}_1^2 \sin w_{20}\cos w_{20} + \overline{\omega}_2^2 \sin w_{01}\cos w_{01})\sin w_{12}^2$$
$$= (\overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01})^2 \sin w_{12}\cos w_{12}$$
$$+ (\overline{\omega}_1^2 \sin w_{20}\cos w_{20} + \overline{\omega}_2^2 \sin w_{01}\cos w_{01})\sin w_{12}^2$$

$$= \quad \overline{\omega}_1{}^2 \sin w_{12} \sin w_{20} (\sin w_{12} \cos w_{20} + \cos w_{12} \sin w_{20})$$

$$+ \overline{\omega}_2{}^2 \sin w_{01} \sin w_{12} (\sin w_{01} \cos w_{12} + \cos w_{01} \sin w_{12})$$

$$+ 2\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{12}$$

$$= \quad \overline{\omega}_1{}^2 \sin w_{12} \sin w_{20} \sin (w_{12} + w_{20})$$

$$+ \overline{\omega}_2{}^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin (w_{01} + w_{12})$$

$$+ 2\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{12}$$

$$= -\overline{\omega}_1{}^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20}$$

$$- \overline{\omega}_2{}^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20}$$

$$+ 2\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{12} \text{ *)}$$

$$= -(\overline{\omega}_1{}^2 - 2\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2 \cos w_{12} + \overline{\omega}_2{}^2) \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20}.$$

Ganz auf dieselbe Art sind also überhaupt die Coefficienten von

$$p_0{}^2, \quad p_1{}^2, \quad p_2{}^2$$

in dem obigen Ausdrucke beziehungsweise:

$$-(\overline{\omega}_1{}^2 - 2\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2 \cos w_{12} + \overline{\omega}_2{}^2) \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20},$$

$$-(\overline{\omega}_2{}^2 - 2\overline{\omega}_2 \overline{\omega}_0 \cos w_{20} + \overline{\omega}_0{}^2) \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20},$$

$$-(\overline{\omega}_0{}^2 - 2\overline{\omega}_0 \overline{\omega}_1 \cos w_{01} + \overline{\omega}_1{}^2) \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20}.$$

Der Coefficient von $2p_0 p_1$ in dem obigen Ausdrucke ist offenbar:

$$-J(\overline{\omega}_1 \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{20} + \overline{\omega}_0 \sin w_{20} \sin w_{12} \cos w_{12})$$

$$+ \sin w_{12} \sin w_{20} (\overline{\omega}_0{}^2 \sin w_{12} \cos w_{12} + \overline{\omega}_1{}^2 \sin w_{20} \cos w_{20}$$
$$+ \overline{\omega}_2{}^2 \sin w_{01} \cos w_{01})$$

$$= -(\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01})$$

$$\times (\overline{\omega}_1 \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{20} + \overline{\omega}_0 \sin w_{20} \sin w_{12} \cos w_{12})$$

$$+ \sin w_{12} \sin w_{20} (\overline{\omega}_0{}^2 \sin w_{12} \cos w_{12} + \overline{\omega}_1{}^2 \sin w_{20} \cos w_{20}$$
$$+ \overline{\omega}_2{}^2 \sin w_{01} \cos w_{01})$$

---

*) Thl. XXXVIII. S. 403.

$$
\begin{aligned}
= \quad & \bar{\omega}_0^2 (\sin w_{12}^2 \cos w_{12} \sin w_{20} - \sin w_{12}^2 \cos w_{12} \sin w_{20}) \\
& + \bar{\omega}_1^2 (\sin w_{20}^2 \sin w_{12} \cos w_{20} - \sin w_{20}^2 \sin w_{12} \cos w_{20}) \\
& + \bar{\omega}_2^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{01} \\
& - \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_1 (\sin w_{12}^2 \sin w_{20} \cos w_{20} + \sin w_{20}^2 \sin w_{12} \cos w_{12}) \\
& - \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{20} \\
& - \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_0 \sin w_{01} \sin w_{12} \cos w_{20} \cos w_{12} \\
= \quad & \bar{\omega}_2^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{01} \\
& - \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_1 \sin w_{12} \sin w_{20} (\sin w_{12} \cos w_{20} + \cos w_{12} \sin w_{20}) \\
& - \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{20} \\
& - \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_0 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{12} \\
= \quad & \bar{\omega}_2^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{01} \\
& - \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_1 \sin w_{12} \sin w_{20} \sin (w_{12} + w_{20}) \\
& - \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{20} \\
& - \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_0 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{12} \\
= \quad & \bar{\omega}_2^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{01} \\
& + \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_1 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \\
& - \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{20} \\
& - \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_0 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{12} \\
= \; & \{\bar{\omega}_0 \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 (\bar{\omega}_0 \cos w_{12} + \bar{\omega}_1 \cos w_{20} - \bar{\omega}_2 \cos w_{01})\} \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \\
= \; & \left\{ \begin{array}{c} \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 (\bar{\omega}_0 \cos w_{12} + \bar{\omega}_1 \cos w_{20}) \\ + \bar{\omega}_2^2 \cos (w_{12} + w_{20}) \end{array} \right\} \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \\
= \; & \left\{ \begin{array}{c} \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 (\bar{\omega}_0 \cos w_{12} + \bar{\omega}_1 \cos w_{20}) \\ + \bar{\omega}_2^2 \cos w_{12} \cos w_{20} - \bar{\omega}_2^2 \sin w_{12} \sin w_{20} \end{array} \right\} \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} \\
= \; & \{(\bar{\omega}_0 - \bar{\omega}_2 \cos w_{20})(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 \cos w_{12}) - \bar{\omega}_2^2 \sin w_{12} \sin w_{20}\} \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20}.
\end{aligned}
$$

Also ist überhaupt der Coefficient von $2p_0p_1$, $2p_1p_2$, $2p_2p_0$ in dem obigen Ausdrucke beziehungsweise:

$$\{\bar{\omega}_0 \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 (\bar{\omega}_0 \cos w_{12} + \bar{\omega}_1 \cos w_{20} - \bar{\omega}_2 \cos w_{01})\} \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20},$$

$$\{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_0 (- \bar{\omega}_0 \cos w_{12} + \bar{\omega}_1 \cos w_{20} + \bar{\omega}_2 \cos w_{01})\} \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20},$$

$$\{\bar{\omega}_2 \bar{\omega}_0 - \bar{\omega}_1 (\bar{\omega}_0 \cos w_{12} - \bar{\omega}_1 \cos w_{20} + \bar{\omega}_2 \cos w_{01})\} \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20}$$

oder:

$$\{(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_2\cos w_{20})(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2\cos w_{12})-\overline{\omega}_2{}^2\sin w_{12}\sin w_{20}\}\sin w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20},$$

$$\{(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_0\cos w_{01})(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_0\cos w_{20})-\overline{\omega}_0{}^2\sin w_{20}\sin w_{01}\}\sin w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20},$$

$$\{(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1\cos w_{12})(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_1\cos w_{01})-\overline{\omega}_1{}^2\sin w_{01}\sin w_{12}\}\sin w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}.$$

Nach gehöriger Substitution und Division durch

$$\sin w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}$$

erhält man den folgenden Ausdruck:

$$6) \quad J^2\left\{\frac{(p_0-\overline{\omega}_0)^2\cos w_{12}}{\sin w_{01}\sin w_{20}}+\frac{(p_1-\overline{\omega}_1)^2\cos w_{20}}{\sin w_{12}\sin w_{01}}+\frac{(p_2-\overline{\omega}_2)^2\cos w_{01}}{\sin w_{20}\sin w_{12}}\right\}$$

$$\begin{aligned}
=&-(\overline{\omega}_1{}^2-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}+\overline{\omega}_2{}^2)p_0{}^2\\
&-(\overline{\omega}_2{}^2-2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20}+\overline{\omega}_0{}^2)p_1{}^2\\
&-(\overline{\omega}_0{}^2-2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01}+\overline{\omega}_1{}^2)p_2{}^2\\
&+2\{\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2(\overline{\omega}_0\cos w_{12}+\overline{\omega}_1\cos w_{20}-\overline{\omega}_2\cos w_{01})\}p_0p_1\\
&+2\{\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_0(-\overline{\omega}_0\cos w_{12}+\overline{\omega}_1\cos w_{20}+\overline{\omega}_2\cos w_{01})\}p_1p_2\\
&+2\{\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_1(\overline{\omega}_0\cos w_{12}-\overline{\omega}_1\cos w_{20}+\overline{\omega}_2\cos w_{01})\}p_2p_0
\end{aligned}$$

oder:

$$7) \quad J^2\left\{\frac{(p_0-\overline{\omega}_0)^2\cos w_{12}}{\sin w_{01}\sin w_{20}}+\frac{(p_1-\overline{\omega}_1)^2\cos w_{20}}{\sin w_{12}\sin w_{01}}+\frac{(p_2-\overline{\omega}_2)^2\cos w_{01}}{\sin w_{20}\sin w_{12}}\right\}$$

$$\begin{aligned}
=&-(\overline{\omega}_1{}^2-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}+\overline{\omega}_2{}^2)p_0{}^2\\
&-(\overline{\omega}_2{}^2-2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20}+\overline{\omega}_0{}^2)p_1{}^2\\
&-(\overline{\omega}_0{}^2-2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01}+\overline{\omega}_1{}^2)p_2{}^2\\
&+2\{(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_2\cos w_{20})(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2\cos w_{12})-\overline{\omega}_2{}^2\sin w_{12}\sin w_{20}\}p_0p_1\\
&+2\{(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_0\cos w_{01})(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_0\cos w_{20})-\overline{\omega}_0{}^2\sin w_{20}\sin w_{01}\}p_1p_2\\
&+2\{(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1\cos w_{12})(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_1\cos w_{01})-\overline{\omega}_1{}^2\sin w_{01}\sin w_{12}\}p_2p_0
\end{aligned}$$

Nach 5) ist folglich die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte:

$$8) \ldots\ldots\ldots G^2(Ap_0+Bp_1+Cp_2)^2$$
$$-(\overline{\omega}_1^2-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}+\overline{\omega}_2^2)p_0^2$$
$$-(\overline{\omega}_2^2-2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20}+\overline{\omega}_0^2)p_1^2$$
$$-(\overline{\omega}_0^2-2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01}+\overline{\omega}_1^2)p_2^2$$
$$+2\{\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2(\overline{\omega}_0\cos w_{12}+\overline{\omega}_1\cos w_{20}-\overline{\omega}_2\cos w_{01})\}p_0p_1$$
$$+2\{\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_0(-\overline{\omega}_0\cos w_{12}+\overline{\omega}_1\cos w_{20}+\overline{\omega}_2\cos w_{01})\}p_1p_2$$
$$+2\{\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_1(\overline{\omega}_0\cos w_{12}-\overline{\omega}_1\cos w_{20}+\overline{\omega}_2\cos w_{01})\}p_2p_0$$
$$=0,$$

oder:

$$9) \ldots\ldots\ldots G^2(Ap_0+Bp_1+Cp_2)^2$$
$$-(\overline{\omega}_1^2-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}+\overline{\omega}_2^2)p_0^2$$
$$-(\overline{\omega}_2^2-2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20}+\overline{\omega}_0^2)p_1^2$$
$$-(\overline{\omega}_0^2-2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01}+\overline{\omega}_1^2)p_2^2$$
$$+2\{(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_2\cos w_{20})(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2\cos w_{12})-\overline{\omega}_2^2\sin w_{12}\sin w_{20}\}p_0p_1$$
$$+2\{(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_0\cos w_{01})(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_0\cos w_{20})-\overline{\omega}_0^2\sin w_{20}\sin w_{01}\}p_1p_2$$
$$+2\{(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1\cos w_{12})(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_1\cos w_{01})-\overline{\omega}_1^2\sin w_{01}\sin w_{12}\}p_2p_0$$
$$=0.$$

Setzen wir aber der Kürze wegen:

10)

$$A'=\quad\overline{\omega}_1^2-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}+\overline{\omega}_2^2-G^2A^2,$$
$$B'=\quad\overline{\omega}_2^2-2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20}+\overline{\omega}_0^2-G^2B^2,$$
$$C'=\quad\overline{\omega}_0^2-2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01}+\overline{\omega}_1^2-G^2C^2,$$
$$D'=-2\{\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2(\overline{\omega}_0\cos w_{12}+\overline{\omega}_1\cos w_{20}-\overline{\omega}_2\cos w_{01})+G^2AB\}$$
$$=-2\{(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_2\cos w_{20})(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2\cos w_{12})-\overline{\omega}_2^2\sin w_{12}\sin w_{20}+G^2AB\},$$
$$E'=-2\{\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_0(-\overline{\omega}_0\cos w_{12}+\overline{\omega}_1\cos w_{20}+\overline{\omega}_2\cos w_{01})+G^2BC\}$$
$$=-2\{(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_0\cos w_{01})(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_0\cos w_{20})-\overline{\omega}_0^2\sin w_{20}\sin w_{01}+G^2BC\},$$
$$F'=-2\{\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_1(\overline{\omega}_0\cos w_{12}-\overline{\omega}_1\cos w_{20}+\overline{\omega}_2\cos w_{01})+G^2CA\}$$
$$=-2\{(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1\cos w_{12})(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_1\cos w_{01})-\overline{\omega}_1^2\sin w_{01}\sin w_{12}+G^2CA\};$$

so ist die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte:

11)

$$A'p_0^2 + B'p_1^2 + C'p_2^2 + D'p_0p_1 + E'p_1p_2 + F'p_2p_0 = 0.$$

§. 3.

Es ist nun auch leicht, die allgemeine Gleichung des Kreises zu finden. Bezeichnet nämlich r den Halbmesser des Kreises, so ist nach Thl. XXXVIII. S. 426., wenn jetzt $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ die Coordinaten des Mittelpunkts des Kreises bezeichnen:

$$r^2 + \frac{(p_0-\overline{\omega}_0)^2\cos w_{12}}{\sin w_{01}\sin w_{20}} + \frac{(p_1-\overline{\omega}_1)^2\cos w_{20}}{\sin w_{12}\sin w_{01}} + \frac{(p_2-\overline{\omega}_2)^2\cos w_{01}}{\sin w_{20}\sin w_{12}} = 0$$

oder:

$$J^2r^2 + J^2\left\{\frac{(p_0-\overline{\omega}_0)^2\cos w_{12}}{\sin w_{01}\sin w_{20}} + \frac{(p_1-\overline{\omega}_1)^2\cos w_{20}}{\sin w_{12}\sin w_{01}} + \frac{(p_2-\overline{\omega}_2)^2\cos w_{01}}{\sin w_{20}\sin w_{12}}\right\} = 0,$$

also nach 3), 6) oder 3), 7):

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{matrix} p_0^2\sin w_{12}^2 + p_1^2\sin w_{20}^2 + p_2^2\sin w_{01}^2 \\ + 2p_0p_1\sin w_{12}\sin w_{20} + 2p_1p_2\sin w_{20}\sin w_{01} + 2p_2p_0\sin w_{01}\sin w_{12}\end{matrix}\right\} r^2 \\
&-(\overline{\omega}_1^2 - 2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12} + \overline{\omega}_2^2)p_0^2 \\
&-(\overline{\omega}_2^2 - 2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20} + \overline{\omega}_0^2)p_1^2 \\
&-(\overline{\omega}_0^2 - 2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos \overline{\omega}_{01} + \overline{\omega}_1^2)p_2^2 \\
&+2\{\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2(\overline{\omega}_0\cos w_{12} + \overline{\omega}_1\cos w_{20} - \overline{\omega}_2\cos w_{01})\}p_0p_1 \\
&+2\{\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_0(-\overline{\omega}_0\cos w_{12} + \overline{\omega}_1\cos w_{20} + \overline{\omega}_2\cos w_{01})\}p_1p_2 \\
&+2\{\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0 - \overline{\omega}_1(\overline{\omega}_0\cos w_{12} - \overline{\omega}_1\cos w_{20} + \overline{\omega}_2\cos w_{01})\}p_2p_0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{matrix} p_0^2\sin w_{12}^2 + p_1^2\sin w_{20}^2 + p_2^2\sin w_{01}^2 \\ + 2p_0p_1\sin w_{12}\sin w_{20} + 2p_1p_2\sin w_{20}\sin w_{01} + 2p_2p_0\sin w_{01}\sin w_{12}\end{matrix}\right\} r^2 \\
&-(\overline{\omega}_1^2 - 2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12} + \overline{\omega}_2^2)p_0^2 \\
&-(\overline{\omega}_2^2 - 2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20} + \overline{\omega}_0^2)p_1^2 \\
&-(\overline{\omega}_0^2 - 2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01} + \overline{\omega}_1^2)p_2^2
\end{aligned}$$

$$+2\{(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_2\cos w_{20})(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2\cos w_{12})-\overline{\omega}_2{}^2\sin w_{12}\sin w_{20}\}p_0p_1$$
$$+2\{(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_0\cos w_{01})(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_0\cos w_{20})-\overline{\omega}_0{}^2\sin w_{20}\sin w_{01}\}p_1p_2$$
$$+2\{(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1\cos w_{12})(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_1\cos w_{01})-\overline{\omega}_1{}^2\sin w_{01}\sin w_{12}\}p_2p_0$$

die Gleichung des Kreises, welche Gleichungen man aber auf der Stelle auf die folgende Form bringt:

12)

$$\begin{aligned}
&(\overline{\omega}_1{}^2-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}+\overline{\omega}_2{}^2-r^2\sin w_{12}{}^2)p_0{}^2\\
&+(\overline{\omega}_2{}^2-2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20}+\overline{\omega}_0{}^2-r^2\sin w_{20}{}^2)p_1{}^2\\
&+(\overline{\omega}_0{}^2-2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01}+\overline{\omega}_1{}^2-r^2\sin w_{01}{}^2)p_2{}^2\\
&-2\{\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2(\overline{\omega}_0\cos w_{12}+\overline{\omega}_1\cos w_{20}-\overline{\omega}_2\cos w_{01})+r^2\sin w_{12}\sin w_{20}\}p_0p_1\\
&-2\{\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_0(-\overline{\omega}_0\cos w_{12}+\overline{\omega}_1\cos w_{20}+\overline{\omega}_2\cos w_{01})+r^2\sin w_{20}\sin w_{01}\}p_1p_2\\
&-2\{\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_1(\overline{\omega}_0\cos w_{12}-\overline{\omega}_1\cos w_{20}+\overline{\omega}_2\cos w_{01})+r^2\sin w_{01}\sin w_{12}\}p_2p_0\\
&=0,
\end{aligned}$$

oder:

13)

$$\begin{aligned}
&(\overline{\omega}_1{}^2-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}+\overline{\omega}_2{}^2-r^2\sin w_{12}{}^2)p_0{}^2\\
&+(\overline{\omega}_2{}^2-2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20}+\overline{\omega}_0{}^2-r^2\sin w_{20}{}^2)p_1{}^2\\
&+(\overline{\omega}_0{}^2-2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01}+\overline{\omega}_1{}^2-r^2\sin w_{01}{}^2)p_2{}^2\\
&-2\{(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_2\cos w_{20})(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2\cos w_{12})-(\overline{\omega}_2{}^2-r^2)\sin w_{12}\sin w_{20}\}p_0p_1\\
&-2\{(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_0\cos w_{01})(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_0\cos w_{20})-(\overline{\omega}_0{}^2-r^2)\sin w_{20}\sin w_{01}\}p_1p_2\\
&-2\{(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1\cos w_{12})(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_1\cos w_{01})-(\overline{\omega}_1{}^2-r^2)\sin w_{01}\sin w_{12}\}p_2p_0\\
&=0.
\end{aligned}$$

Setzt man der Kürze wegen:

14)

$$\begin{aligned}
A_1&=\overline{\omega}_1{}^2-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}+\overline{\omega}_2{}^2-r^2\sin w_{12}{}^2,\\
B_1&=\overline{\omega}_2{}^2-2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20}+\overline{\omega}_0{}^2-r^2\sin w_{20}{}^2,\\
C_1&=\overline{\omega}_0{}^2-2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01}+\overline{\omega}_1{}^2-r^2\sin w_{01}{}^2,
\end{aligned}$$

$$D_1=-2\{\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2(\overline{\omega}_0\cos w_{12}+\overline{\omega}_1\cos w_{20}-\overline{\omega}_2\cos w_{01})+r^2\sin w_{12}\sin w_{20}\}$$
$$=-2\{(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_2\cos w_{20})(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2\cos w_{12})-(\overline{\omega}_2{}^2-r^2)\sin w_{12}\sin w_{20}\},$$

$$E_1=-2\{\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_0(-\overline{\omega}_0\cos w_{12}+\overline{\omega}_1\cos w_{20}+\overline{\omega}_2\cos w_{01})+r^2\sin w_{20}\sin w_{01}\}$$
$$=-2\{(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_0\cos w_{01})(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_0\cos w_{20})-(\overline{\omega}_0{}^2-r^2)\sin w_{20}\sin w_{01}\},$$

$$F_1=-2\{\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_1(\overline{\omega}_0\cos w_{12}-\overline{\omega}_1\cos w_{20}+\overline{\omega}_2\cos w_{01})+r^2\sin w_{01}\sin w_{12}\}$$
$$=-2\{(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1\cos w_{12})(\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_1\cos w_{01})-(\overline{\omega}_1{}^2-r^2)\sin w_{01}\sin w_{12}\};$$

so ist:

15)

$$A_1p_0{}^2+B_1p_1{}^2+C_1p_2{}^2+D_1p_0p_1+E_1p_1p_2+F_1p_2p_0=0$$

die Gleichung des Kreises.

§. 4.

Nach §. 2. und §. 3. ist die Gleichung eines jeden Kegelschnitts, mit Einschluss des Kreises, zwischen Dreilinien-Coordinaten oder sogenannten trimetrischen Coordinaten, von der allgemeinen Form:

$$\mathrm{A}p_0{}^2+\mathrm{B}p_1{}^2+\mathrm{C}p_2{}^2+\mathrm{D}p_0p_1+\mathrm{E}p_1p_2+\mathrm{F}p_2p_0=0.$$

Umgekehrt kann aber, weil, wie die Formeln in Thl. XXXVIII. S. 399. oder S. 404. zeigen, die Coordinaten p_0, p_1, p_2 durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y immer in linearer Form ausgedrückt werden, jede Gleichung von der Form

$$\mathrm{A}p_0{}^2+\mathrm{B}p_1{}^2+\mathrm{C}p_2{}^2+\mathrm{D}p_0p_1+\mathrm{E}p_1p_2+\mathrm{F}p_2p_0=0$$

auf eine Gleichung von der Form

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$$

zwischen rechtwinkligen Coordinaten oder cartesischen Coordinaten überhaupt gebracht werden, und die durch die erstere Gleichung charakterisirten Curven können also von den Curven, welche durch die letztere Gleichung charakterisirt werden, nicht verschieden sein.

§. 5.

Zwischen den Grössen

$$A', \quad B', \quad C', \quad D', \quad E', \quad F'$$

in §. 2. 10) und

$$A_1, \quad B_1, \quad C_1, \quad D_1, \quad E_1, \quad F_1$$

in §. 3. 14) finden verschiedene Relationen Statt, von denen wir jetzt einige entwickeln wollen.

Zuerst erhalten wir leicht:

$$A' + B' + C' + D' \cos w_{01} + E' \cos w_{12} + F' \cos w_{20}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \overline{\omega}_1{}^2 - 2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 \cos w_{12} + \overline{\omega}_2{}^2 \\
& + \overline{\omega}_2{}^2 - 2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0 \cos w_{20} + \overline{\omega}_0{}^2 \\
& + \overline{\omega}_0{}^2 - 2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1 \cos w_{01} + \overline{\omega}_1{}^2 \\
& - 2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1 \cos w_{01} - 2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 \cos w_{12} - 2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0 \cos w_{20} \\
& + 2\overline{\omega}_2(\overline{\omega}_0 \cos w_{12} + \overline{\omega}_1 \cos w_{20} - \overline{\omega}_2 \cos w_{01}) \cos w_{01} \\
& + 2\overline{\omega}_0(-\overline{\omega}_0 \cos w_{12} + \overline{\omega}_1 \cos w_{20} + \overline{\omega}_2 \cos w_{01}) \cos w_{12} \\
& + 2\overline{\omega}_1(\overline{\omega}_0 \cos w_{12} - \overline{\omega}_1 \cos w_{20} + \overline{\omega}_2 \cos w_{01}) \cos w_{20} \\
& - G^2(A^2 + B^2 + C^2 + 2AB \cos w_{01} + 2BC \cos w_{12} + 2CA \cos w_{20}) \\
= \quad & 2\overline{\omega}_0{}^2(1 - \cos w_{12}{}^2) + 2\overline{\omega}_1{}^2(1 - \cos w_{20}{}^2) + 2\overline{\omega}_2{}^2(1 - \cos w_{01}{}^2) \\
& - 4\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1(\cos w_{01} - \cos w_{12} \cos w_{20}) \\
& - 4\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2(\cos w_{12} - \cos w_{20} \cos w_{01}) \\
& - 4\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0(\cos w_{20} - \cos w_{01} \cos w_{12}) \\
& - G^2(A^2 + B^2 + C^2 + 2AB \cos w_{01} + 2BC \cos w_{12} + 2CA \cos w_{20}),
\end{aligned}$$

also, weil

$$\cos w_{01} = \cos(w_{12} + w_{20}) = \cos w_{12} \cos w_{20} - \sin w_{12} \sin w_{20},$$

$$\cos w_{12} = \cos(w_{20} + w_{01}) = \cos w_{20} \cos w_{01} - \sin w_{20} \sin w_{01},$$

$$\cos w_{20} = \cos(w_{01} + w_{12}) = \cos w_{01} \cos w_{12} - \sin w_{01} \sin w_{12}$$

ist:

$$A' + B' + C' + D' \cos w_{01} + E' \cos w_{12} + F' \cos w_{20}$$

$$= 2\left\{\begin{array}{c} \overline{\omega}_0{}^2 \sin w_{12}{}^2 + \overline{\omega}_1{}^2 \sin w_{20}{}^2 + \overline{\omega}_2{}^2 \sin w_{01}{}^2 \\ + 2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1 \sin w_{12} \sin w_{20} + 2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 \sin w_{20} \sin w_{01} + 2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0 \sin w_{01} \sin w_{12} \end{array}\right\}$$

$$-G^2(A^2+B^2+C^2+2AB\cos w_{01}+2BC\cos w_{12}+2CA\cos w_{20})$$

$$=\quad 2(\overline{\omega}_0\sin w_{12}+\overline{\omega}_1\sin w_{20}+\overline{\omega}_2\sin w_{01})^2$$

$$-G^2(A^2+B^2+C^2+2AB\cos w_{01}+2BC\cos w_{12}+2CA\cos w_{20}),$$

folglich nach 3) und 4):

16)

$$A'+B'+C'+D'\cos w_{01}+E'\cos w_{12}+F'\cos w_{20}=-(n^2-2)J^2$$
$$=(2-n^2)J^2,$$

oder:

17)

$$A'+B'+C'+D'\cos w_{01}+E'\cos w_{12}+F'\cos w_{20}$$
$$=J^2+(1-n^2)J^2.$$

Für die

Ellipse, Parabel, Hyperbel

ist bekanntlich beziehungsweise

$$n<1,\quad n=1,\quad n>1;$$

also ist für die

Ellipse, Parabel, Hyperbel

nach 16) immer:

18) . . . $A'+B'+C'+D'\cos w_{01}+E'\cos w_{12}+F'\cos w_{20}<2J^2$

und nach 17) beziehungsweise:

$$A'+B'+C'+D'\cos w_{01}+E'\cos w_{12}+F'\cos w_{20}>J^2,$$
$$A'+B'+C'+D'\cos w_{01}+E'\cos w_{12}+F'\cos w_{20}=J^2,$$
$$A'+B'+C'+D'\cos w_{01}+E'\cos w_{12}+F'\cos w_{20}<J^2.$$

Aus 16) erhält man die Formel:

19) . . . $n^2=\dfrac{2J^2-(A'+B'+C'+D'\cos w_{01}+E'\cos w_{12}+F'\cos w_{20})}{J^2}.$

Bei der Hyperbel, wo $n>1$ ist, ist für

$$n<\sqrt{2},\quad n=\sqrt{2},\quad n>\sqrt{2}$$

respective:

$$A'+B'+C'+D'\cos w_{01}+E'\cos w_{12}+F'\cos w_{20}>0,$$
$$A'+B'+C'+D'\cos w_{01}+E'\cos w_{12}+F'\cos w_{20}=0,$$
$$A'+B'+C'+D'\cos w_{01}+E'\cos w_{12}+F'\cos w_{20}<0.$$

Ferner erhält man leicht:

$$\begin{aligned}
& A_1+B_1+C_1+D_1\cos w_{01}+E_1\cos w_{12}+F_1\cos w_{20}\\
= \; & \overline{\omega}_1^2-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}+\overline{\omega}_2^2\\
& +\overline{\omega}_2^2-2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20}+\overline{\omega}_0^2\\
& +\overline{\omega}_0^2-2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01}+\overline{\omega}_1^2\\
& -2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01}-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}-2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20}\\
& +2\overline{\omega}_2(\overline{\omega}_0\cos w_{12}+\overline{\omega}_1\cos w_{20}-\overline{\omega}_2\cos w_{01})\cos w_{01}\\
& +2\overline{\omega}_0(-\overline{\omega}_0\cos w_{12}+\overline{\omega}_1\cos w_{20}-\overline{\omega}_2\cos w_{01})\cos w_{12}\\
& +2\overline{\omega}_1(\overline{\omega}_0\cos w_{12}-\overline{\omega}_1\cos w_{20}+\overline{\omega}_2\cos w_{01})\cos w_{20}\\
& -r^2\left\{\begin{array}{l}
\sin w_{01}^2+\sin w_{12}^2+\sin w_{20}^2\\
+2\cos w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}\\
+2\sin w_{01}\cos w_{12}\sin w_{20}\\
+2\sin w_{01}\sin w_{12}\cos w_{20}
\end{array}\right\},
\end{aligned}$$

also ganz wie vorher:

$$\begin{aligned}
& A_1+B_1+C_1+D_1\cos w_{01}+E_1\cos w_{12}+F_1\cos w_{20}\\
= \; & 2J^2-r^2\left\{\begin{array}{l}
\sin w_{01}^2+\sin w_{12}^2+\sin w_{20}^2\\
+2\cos w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}\\
+2\sin w_{01}\cos w_{12}\sin w_{20}\\
+2\sin w_{01}\sin w_{12}\cos w_{20}
\end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned}
& \sin w_{01}^2+\sin w_{12}^2+\sin w_{20}^2\\
= \; & \sin w_{01}^2+\sin w_{12}^2+\sin(w_{01}+w_{12})^2\\
= \; & \sin w_{01}^2+\sin w_{12}^2+\sin w_{01}^2\cos w_{12}^2+\cos w_{01}^2\sin w_{12}^2\\
& +2\sin w_{01}\cos w_{01}\sin w_{12}\cos w_{12}
\end{aligned}$$

$$= 1-\cos w_{01}{}^2\cos w_{12}{}^2+1-\cos w_{01}{}^2\cos w_{12}{}^2$$
$$+2\sin w_{01}\cos w_{01}\sin w_{12}\cos w_{12}$$
$$= 2-2\cos w_{01}\cos w_{12}(\cos w_{01}\cos w_{12}-\sin w_{01}\sin w_{12})$$
$$= 2-2\cos w_{01}\cos w_{12}\cos(w_{01}+w_{12})$$
$$= 2(1-\cos w_{01}\cos w_{12}\cos w_{20});$$

und ferner:

$$\cos w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}$$
$$+\sin w_{01}\cos w_{12}\sin w_{20}$$
$$+\sin w_{01}\sin w_{12}\cos w_{20}$$
$$=-\sin(w_{01}+w_{12})^2+\sin w_{01}\sin w_{12}\cos(w_{01}+w_{12})$$
$$=-1+\cos(w_{01}+w_{12})\{\cos(w_{01}+w_{12})+\sin w_{01}\sin w_{12}\}$$
$$=-1+\cos(w_{01}+w_{12})\cos w_{01}\cos w_{12}$$
$$=-1+\cos w_{01}\cos w_{12}\cos w_{20}=-(1-\cos w_{01}\cos w_{12}\cos w_{20})\ ^{*});$$

also ist:

20)

$$\sin w_{01}{}^2+\sin w_{12}{}^2+\sin w_{20}{}^2=(1-\cos w_{01}\cos w_{12}\cos w_{20}),$$
$$\cos w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}$$
$$+\sin w_{01}\cos w_{12}\sin w_{20}$$
$$+\sin w_{01}\sin w_{12}\cos w_{20}$$
$$=-(1-\cos w_{01}\cos w_{12}\cos w_{20}),$$

---

*) Beiläufig mag hierbei bemerkt werden, dass, wovon man sich durch eine einfache Betrachtung aller möglichen Fälle leicht überzeugt, jenachdem das Fundamental-Dreieck

spitzwinklig, rechtwinklig, stumpfwinklig

ist, das Product

$$\cos w_{01}\cos w_{12}\cos w_{20}$$

beziehungsweise

negativ, null, positiv

ist; dagegen ist das Product

$$\sin w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}$$

immer positiv.

$$\left.\begin{array}{l}\sin w_{01}{}^2+\sin w_{12}{}^2+\sin w_{20}{}^2\\+2\cos w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}\\+2\sin w_{01}\cos w_{12}\sin w_{20}\\+2\sin w_{01}\sin w_{12}\cos w_{20}\end{array}\right\}=0.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

21) . . . $A_1+B_1+C_1+D_1\cos w_{01}+E_1\cos w_{12}+F_1\cos w_{20}=2J^2.$

Bezeichnet man nun die Grössen

$$A',\quad B',\quad C',\quad D',\quad E',\quad F';$$
$$A_1,\quad B_1,\quad C_1,\quad D_1,\quad E_1,\quad F_1$$

insgesammt durch

$$\mathrm{A},\quad \mathrm{B},\quad \mathrm{C},\quad \mathrm{D},\quad \mathrm{E},\quad \mathrm{F};$$

so ergiebt sich aus dem Obigen Folgendes:

Für die drei Kegelschnitte im engeren Sinne, also für die

Ellipse, Parabel, Hyperbel

ist:

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}\cos w_{01}+\mathrm{E}\cos w_{12}+\mathrm{F}\cos w_{20}<2J^2;$$

dagegen ist für den Kreis.

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}\cos w_{01}+\mathrm{E}\cos w_{12}+\mathrm{F}\cos w_{20}=2J^2.$$

Für die

Ellipse, Parabel, Hyperbel

ist beziehungsweise:

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}\cos w_{01}+\mathrm{E}\cos w_{12}+\mathrm{F}\cos w_{20}>J^2,$$
$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}\cos w_{01}+\mathrm{E}\cos w_{12}+\mathrm{F}\cos w_{20}=J^2,$$
$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}\cos w_{01}+\mathrm{E}\cos w_{12}+\mathrm{F}\cos w_{20}<J^2.$$

Im Falle der Hyperbel ist für

$$n<\sqrt{2},\quad n=\sqrt{2},\quad n>\sqrt{2}$$

beziehungsweise:

$$A+B+C+D\cos w_{01}+E\cos w_{12}+F\cos w_{20}>0,$$
$$A+B+C+D\cos w_{01}+E\cos w_{12}+F\cos w_{20}=0,$$
$$A+B+C+D\cos w_{01}+E\cos w_{12}+F\cos w_{20}<0.$$

Dass hier im Falle der drei Kegelschnitte im engeren Sinne die Grössen

$$A',\quad B',\quad C',\quad D',\quad E',\quad F';$$

im Falle des Kreises die Grössen

$$A_1,\quad B_1,\quad C_1,\quad D_1,\quad E_1,\quad F_1$$

durch die Zeichen

$$\mathrm{A},\quad \mathrm{B},\quad \mathrm{C},\quad \mathrm{D},\quad \mathrm{E},\quad \mathrm{F}$$

repräsentirt werden, versteht sich nach dem Obigen von selbst.

§. 6.

Wenn man mittelst der drei ersten der Gleichungen 14) die Grössen $\overline{\omega}_0^2$, $\overline{\omega}_1^2$, $\overline{\omega}_2^2$ bestimmt, so erhält man ohne Schwierigkeit:

$$\begin{aligned}
2\overline{\omega}_0^2 = &\ \ 2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01}-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}+2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20}\\
&+r^2(\sin w_{01}{}^2-\sin w_{12}{}^2+\sin w_{20}{}^2)+(-A_1+B_1+C_1),\\
2\overline{\omega}_1^2 = &\ \ 2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01}+2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}-2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20}\\
&+r^2(\sin w_{01}{}^2+\sin w_{12}{}^2-\sin w_{20}{}^2)+(A_1-B_1+C_1),\\
2\overline{\omega}_2^2 = &-2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01}+2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}+2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20}\\
&+r^2(-\sin w_{01}{}^2+\sin w_{12}{}^2+\sin w_{20}{}^2)+(A_1+B_1-C_1).
\end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned}
&-\sin w_{01}{}^2+\sin w_{12}{}^2+\sin w_{20}{}^2=\sin w_{12}{}^2+\sin w_{20}{}^2-\sin(w_{12}+w_{20})^2\\
= &\ \ \sin w_{12}{}^2+\sin w_{20}{}^2-\sin w_{12}{}^2\cos w_{20}{}^2-\cos w_{12}{}^2\sin w_{20}{}^2\\
&\qquad\qquad -2\sin w_{12}\cos w_{12}\sin w_{20}\cos w_{20}\\
= &\ \ 2\sin w_{12}\sin w_{20}(\sin w_{12}\sin w_{20}-\cos w_{12}\cos w_{20})\\
= &-2\sin w_{12}\sin w_{20}\cos(w_{12}+w_{20})=-2\cos w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20},
\end{aligned}$$

also überhaupt:

$$-\sin w_{01}^2+\sin w_{12}^2+\sin w_{20}^2=-2\cos w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20},$$

$$\sin w_{01}^2-\sin w_{12}^2+\sin w_{20}^2=-2\sin w_{01}\cos w_{12}\sin w_{20},$$

$$\sin w_{01}^2+\sin w_{12}^2-\sin w_{20}^2=-2\sin w_{01}\sin w_{12}\cos w_{20};$$

folglich, wenn man die obigen Gleichungen zugleich mit

$$\cos w_{12},\quad \cos w_{20},\quad \cos w_{01}$$

multiplicirt:

$$\begin{aligned}2\overline{\omega}_0^2\cos w_{12}= {} & 2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01}\cos w_{12}-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}^2\\ & +2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{12}\cos_{20}\\ & -2r^2\sin w_{01}\cos w_{12}^2\sin w_{20}+(-A_1+B_1+C_1)\cos w_{12},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\overline{\omega}_1^2\cos w_{20}= {} & 2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{20}\cos w_{01}+2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{12}\cos w_{20}\\ & -2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20}^2\\ & -2r^2\sin w_{01}\sin w_{12}\cos w_{20}^2+(A_1-B_1+C_1)\cos w_{20},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\overline{\omega}_2^2\cos w_{01}= {} & -2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{01}^2+2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{01}\cos w_{12}\\ & +2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{20}\cos w_{01}\\ & -2r^2\cos w_{01}^2\sin w_{12}\sin w_{20}+(A_1+B_1-C_1)\cos w_{01}.\end{aligned}$$

Wegen der drei letzten der Gleichungen 14) ist:

$$\begin{aligned}-2\overline{\omega}_0^2\cos w_{12}= {} & -2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{20}+2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2-2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{01}\\ & +2r^2\sin w_{20}\sin w_{01}+E_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2\overline{\omega}_1^2\cos w_{20}= {} & -2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\cos w_{12}-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{01}+2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\\ & +2r^2\sin w_{01}\sin w_{12}+F_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2\overline{\omega}_2^2\cos w_{01}= {} & 2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1-2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cos w_{20}-2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0\cos w_{12}\\ & +2r^2\sin w_{12}\sin w_{20}+D_1.\end{aligned}$$

Verbindet man nun diese zwei Gruppen dreier Gleichungen durch Addition mit einander, so erhält man, weil:

$$\begin{aligned}\cos w_{01}\cos w_{12}-\cos w_{20} &= \cos w_{01}\cos w_{12}-\cos(w_{01}+w_{12})\\ &= \sin w_{01}\sin w_{12},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos w_{12}\cos w_{20}-\cos w_{01} &= \cos w_{12}\cos w_{20}-\cos(w_{12}+w_{20})\\ &= \sin w_{12}\sin w_{20},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos w_{20}\cos w_{01}-\cos w_{12} &= \cos w_{20}\cos w_{01}-\cos(w_{20}+w_{01})\\ &= \sin w_{20}\sin w_{01}\end{aligned}$$

ist, ohne Schwierigkeit die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 = \;& 2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1 \sin w_{01} \sin w_{12} \\
& + 2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 \sin w_{12} \sin w_{12} \\
& + 2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0 \sin w_{12} \sin w_{20} \\
& + 2r^2 \sin w_{01} \sin w_{12}{}^2 \sin w_{20} \\
& + (-A_1 + B_1 + C_1) \cos w_{12} + E_1, \\
0 = \;& 2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1 \sin w_{20} \sin w_{01} \\
& + 2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 \sin w_{12} \sin w_{20} \\
& + 2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0 \sin w_{20} \sin w_{20} \\
& + 2r^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20}{}^2 \\
& + (A_1 - B_1 + C_1) \cos w_{20} + F_1, \\
0 = \;& 2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1 \sin w_{01} \sin w_{01} \\
& + 2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \\
& + 2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0 \sin w_{20} \sin w_{01} \\
& + 2r^2 \sin w_{01}{}^2 \sin w_{12} \sin w_{20} \\
& + (A_1 + B_1 - C_1) \cos w_{01} + D_1;
\end{aligned}$$

also:

22)

$$\begin{aligned}
& (-A_1 + B_1 + C_1) \cos w_{12} + E_1 \\
= & -2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1 \sin w_{01} . \sin w_{12} \\
& -2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 \sin w_{12} . \sin w_{12} \\
& -2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0 \sin w_{20} . \sin w_{12} \\
& -2r^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} . \sin w_{12}, \\
& (A_1 - B_1 + C_1) \cos w_{20} + F_1 \\
= & -2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1 \sin w_{01} . \sin w_{20} \\
& -2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 \sin w_{12} . \sin w_{20} \\
& -2\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0 \sin w_{20} . \sin w_{20} \\
& -2r^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} . \sin w_{20},
\end{aligned}$$

$$(A_1 + B_1 - C_1)\cos w_{01} + D_1$$
$$= -2\bar{\omega}_0\bar{\omega}_1 \sin w_{01} . \sin w_{01}$$
$$-2\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2 \sin w_{12} . \sin w_{01}$$
$$-2\bar{\omega}_2\bar{\omega}_0 \sin w_{20} . \sin w_{01}$$
$$-2r^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} . \sin w_{01}.$$

Daher ist:

23)
$$\frac{(A_1 + B_1 - C_1)\cos w_{01} + D_1}{\sin w_{01}}$$
$$= \frac{(-A_1 + B_1 + C_1)\cos w_{12} + E_1}{\sin w_{12}}$$
$$= \frac{(A_1 - B_1 + C_1)\cos w_{20} + F_1}{\sin w_{20}}$$
$$= -2\bar{\omega}_0\bar{\omega}_1 \sin w_{01} - 2\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2 \sin w_{12} - 2\bar{\omega}_2\bar{\omega}_0 \sin w_{20}$$
$$- 2r^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20}.$$

Aehnliche oft sehr bemerkenswerthe Relationen giebt es noch sehr viele, bei deren weiterer Entwickelung ich mich aber jetzt nicht aufhalten will, da schon das Vorhergehende deutlich genug zeigt, wie dergleichen Relationen, an denen ja die Mathematik überhaupt so unendlich reich ist, in grösserer Anzahl leicht gefunden werden können.

XXVIII.

Allgemeine Discussion der Gleichung der Linien des zweiten Grades.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

Der Gegenstand dieser Abhandlung ist schon oft — auch von mir selbst in früheren Theilen des Archivs und anderwärts — behandelt worden, und nicht selten auf besonders elegante Weise. Wenn ich denselben in dieser Abhandlung einer neuen Behandlung unterwerfe, so beabsichtige ich dabei hauptsächlich, vollständig entwickelte ganz allgemeine Formeln anzugeben, mittelst welcher alle die betreffende Linie des zweiten Grades bestimmenden Elemente unmittelbar und ganz ohne Weiteres aus den Coefficienten der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

für jedes ganz beliebige Coordinatensystem berechnet, und also auch die Axengleichungen der Kegelschnitte sogleich und ohne alle Mühe aufgestellt werden können. Wenn nun auch diese Abhandlung einiges Bekannte enthalten wird, was bei einem schon so oft behandelten Gegenstande nicht anders sein kann: so glaube ich doch, dass der vorher angegebene nächste und Hauptzweck der folgenden Untersuchungen — wenigstens theilweise — noch nicht so vollständig und mittelst so leicht und ganz unmittelbar anwendbarer Formeln, die gar keine Zweideutigkeit in den beabsichtigten Bestimmungen zulassen, erreicht worden ist, als es — nach meiner Absicht wenigstens — hier

geschehen ist, weshalb ich dieselben, vielen von mehreren Seiten her gegen mich geäusserten Wünschen nachgebend, hier veröffentlicht, und zugleich auf einige Beispiele angewandt habe.

Ganz vorzüglich bemerke ich aber noch, dass ich bei der Publication dieser Abhandlung noch den besonderen Zweck habe, dass mir dieselbe zur Grundlage für eine vollständige Discussion der Gleichung des zweiten Grades zwischen Dreilinien-Coordinaten oder sogenannten trimetrischen Coordinaten dienen soll, welche ich in der unmittelbar der vorliegenden sich anschliessenden folgenden Abhandlung in einer Vollständigkeit zu geben hoffe, wie dies noch nicht geschehen sein dürfte. Dazu war es mir nöthig, die Discussion der Gleichung des zweiten Grades zwischen cartesischen Coordinaten gerade in der Vollständigkeit und Durchführung im Einzelnen vor mir zu haben, wie dieselbe in dieser Abhandlung vorliegt, indem frühere Arbeiten über diesen Gegenstand mir für den in Rede stehenden Zweck nicht im Entferntesten die erforderliche Grundlage, wie mir dieselbe wünschenswerth und nothwendig war, zu liefern geeignet waren.

---

§. 1.

Die allgemeine Gleichung der Linien des zweiten Grades für ein beliebiges Coordinatensystem der xy, dessen Coordinatenwinkel wir durch α bezeichnen, sei:

$$1) \ldots \quad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Durch einen beliebigen Punkt, dessen primitive Coordinaten f, g sein mögen, als Anfang legen wir ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem der x_1, y_1. Den von dem positiven Theile der Axe der x_1 mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an durch den Coordinatenwinkel α hindurch, also nach dem positiven Theile der Axe der y hin, von 0 bis 360° zählen, bezeichnen wir durch ξ, und den positiven Theil der Axe der y_1 nehmen wir so an, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x_1 an durch den Coordinatenwinkel $(x_1 y_1)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_1 zu gelangen, in demselben Sinne bewegen muss, in welchem man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel α hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen. Unter diesen Voraussetzungen haben

wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

2)

$$x = f + \frac{x_1 \sin(\alpha - \xi) - y_1 \cos(\alpha - \xi)}{\sin\alpha},$$

$$y = g + \frac{x_1 \sin\xi + y_1 \cos\xi}{\sin\alpha}.$$

Führen wir diese Ausdrücke für x, y in die Gleichung 1) ein, so erhalten wir die Gleichung:

3)

$$\left\{ A\frac{\sin(\alpha-\xi)^2}{\sin\alpha^2} + B\frac{\sin\xi^2}{\sin\alpha^2} + 2C\frac{\sin(\alpha-\xi)\sin\xi}{\sin\alpha^2} \right\} x_1^2$$

$$+ \left\{ A\frac{\cos(\alpha-\xi)^2}{\sin\alpha^2} + B\frac{\cos\xi^2}{\sin\alpha^2} - 2C\frac{\cos(\alpha-\xi)\cos\xi}{\sin\alpha^2} \right\} y_1^2$$

$$- \left\{ A\frac{\sin 2(\alpha-\xi)}{\sin\alpha^2} - B\frac{\sin 2\xi}{\sin\alpha^2} - 2C\frac{\sin(\alpha-2\xi)}{\sin\alpha^2} \right\} x_1 y_1$$

$$+ 2\left\{ (Af + Cg + D)\frac{\sin(\alpha-\xi)}{\sin\alpha} + (Cf + Bg + E)\frac{\sin\xi}{\sin\alpha} \right\} x_1$$

$$- 2\left\{ (Af + Cg + D)\frac{\cos(\alpha-\xi)}{\sin\alpha} - (Cf + Bg + E)\frac{\cos\xi}{\sin\alpha} \right\} y_1$$

$$+ Af^2 + Bg^2 + 2Cfg + 2Df + 2Eg + F$$

$$= 0,$$

welche die hauptsächlichste Grundlage aller folgenden Untersuchungen bildet, die lediglich auf Transformationen und möglichste Vereinfachungen dieser Gleichung zurückkommen.

§. 2.

Weil der Punkt (fg) und der Winkel ξ unserer freien Disposition anheim gestellt sind, so wollen wir diese Grössen so zu bestimmen suchen, dass die x_1, y_1 und $x_1 y_1$ enthaltenden Glieder unserer obigen Gleichung verschwinden, und daher aus der Gleichung wegfallen. Dieser Zweck wird erreicht, wenn wir f, g aus den beiden Gleichungen:

$$4) \quad \begin{cases} Af + Cg + D = 0, \\ Cf + Bg + E = 0; \end{cases}$$

den Winkel ξ mittelst der Gleichung:

$$5) \quad A\sin 2(\alpha - \xi) - B\sin 2\xi - 2C\sin(\alpha - 2\xi) = 0$$

bestimmen.

Eliminiren wir aus den beiden Gleichungen 4) zuerst g, dann f; so erhalten wir:

$$(C^2 - AB)f + CE - BD = 0,$$

$$(C^2 - AB)g + CD - AE = 0;$$

woraus sich:

$$6) \quad f = \frac{BD - CE}{C^2 - AB}, \quad g = \frac{AE - CD}{C^2 - AB}$$

ergiebt, zugleich aber auch erhellet, dass die Bestimmung der Coordinaten f, g in endlichen, völlig bestimmten reellen Werthen nur dann möglich ist, wenn der Nenner der beiden vorstehenden Brüche nicht verschwindet, also nur dann, wenn

$$C^2 - AB \lessgtr 0$$

ist, welche Bedingung wir also für jetzt als erfüllt voraussetzen müssen.

Die Gleichung 5) bringt man leicht auf die Form:

$$(A\sin 2\alpha - 2C\sin\alpha)\cos 2\xi - (A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B)\sin 2\xi = 0,$$

woraus sich:

$$7) \quad \tang 2\xi = \frac{A\sin 2\alpha - 2C\sin\alpha}{A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B},$$

oder:

$$8) \quad \tang 2\xi = \frac{2(A\cos\alpha - C)\sin\alpha}{A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B}$$

ergiebt, mittelst welcher Formeln ξ immer bestimmt werden kann, wenn nur Zähler und Nenner der vorstehenden Brüche nicht beide zugleich verschwinden, welchen letzteren Fall wir daher für jetzt ausschliessen wollen. Leicht erhält man hieraus auch den folgenden Ausdruck:

$$8^*) \quad \ldots \quad \operatorname{tang} 2(\alpha-\xi)=\frac{B\sin 2\alpha-2C\sin\alpha}{A-2C\cos\alpha+B\cos 2\alpha}.$$

Bestimmen wir $\sin 2\xi$, $\cos 2\xi$ mittelst der Gleichung 7) auf bekannte Weise, so erhalten wir mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander die folgenden Ausdrücke:

9)

$$\sin 2\xi=\pm\frac{A\sin 2\alpha-2C\sin\alpha}{\sqrt{(A\sin 2\alpha-2C\sin\alpha)^2+(A\cos 2\alpha-2C\cos\alpha+B)^2}},$$

$$\cos 2\xi=\pm\frac{A\cos 2\alpha-2C\cos\alpha+B}{\sqrt{(A\sin 2\alpha-2C\sin\alpha)^2+(A\cos 2\alpha-2C\cos\alpha+B)^2}};$$

oder, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

10)

$$\sin 2\xi=\pm\frac{2(A\cos\alpha-C)\sin\alpha}{\sqrt{(A+B-2C\cos\alpha)^2+4(C^2-AB)\sin\alpha^2}},$$

$$\cos 2\xi=\pm\frac{A\cos 2\alpha-2C\cos\alpha+B}{\sqrt{(A+B-2C\cos\alpha)^2+4(C^2-AB)\sin\alpha^2}};$$

oder

11)

$$\sin 2\xi=\pm\frac{2(A\cos\alpha-C)\sin\alpha}{\sqrt{(A-B)^2+4(C-A\cos\alpha)(C-B\cos\alpha)}},$$

$$\cos 2\xi=\pm\frac{A\cos 2\alpha-2C\cos\alpha+B}{\sqrt{(A-B)^2+4(C-A\cos\alpha)(C-B\cos\alpha)}};$$

oder:

12)

$$\sin 2\xi=\pm\frac{2(A\cos\alpha-C)\sin\alpha}{\sqrt{(A-B)^2\sin\alpha^2+\{2C-(A+B)\cos\alpha\}^2}},$$

$$\cos 2\xi=\pm\frac{A\cos 2\alpha-2C\cos\alpha+B}{\sqrt{(A-B)^2\sin\alpha^2+\{2C-(A+B)\cos\alpha\}^2}}.$$

Setzen wir der Kürze wegen:

13)

$$P\sin\alpha^2=A\sin(\alpha-\xi)^2+B\sin\xi^2+2C\sin(\alpha-\xi)\sin\xi,$$

$$Q\sin\alpha^2=A\cos(\alpha-\xi)^2+B\cos\xi^2-2C\cos(\alpha-\xi)\cos\xi:$$

so ist:

$$(P+Q)\sin\alpha^2 = A+B-2C\cos\alpha,$$

$$(P-Q)\sin\alpha^2 = -A\cos 2(\alpha-\xi) - B\cos 2\xi + 2C\cos(\alpha-2\xi)$$

$$= -(A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B)\cos 2\xi - (A\sin 2\alpha - 2C\sin\alpha)\sin 2\xi$$

$$= \mp\sqrt{(A\sin 2\alpha - 2C\sin\alpha)^2 + (A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B)^2};$$

folglich:

14)

$$2P\sin\alpha^2 = A+B-2C\cos\alpha \mp\sqrt{(A\sin 2\alpha - 2C\sin\alpha)^2 + (A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B)^2},$$

$$2Q\sin\alpha^2 = A+B-2C\cos\alpha \pm\sqrt{(A\sin 2\alpha - 2C\sin\alpha)^2 + (A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B)^2};$$

oder:

15)

$$2P\sin\alpha^2 = A+B-2C\cos\alpha \mp\sqrt{(A+B-2C\cos\alpha)^2 + 4(C^2-AB)\sin\alpha^2},$$

$$2Q\sin\alpha^2 = A+B-2C\cos\alpha \pm\sqrt{(A+B-2C\cos\alpha)^2 + 4(C^2-AB)\sin\alpha^2};$$

oder:

16)

$$2P\sin\alpha^2 = A+B-2C\cos\alpha \mp\sqrt{(A-B)^2 + 4(C-A\cos\alpha)(C-B\cos\alpha)},$$

$$2Q\sin\alpha^2 = A+B-2C\cos\alpha \pm\sqrt{(A-B)^2 + 4(C-A\cos\alpha)(C-B\cos\alpha)};$$

oder:

17)

$$2P\sin\alpha^2 = A+B-2C\cos\alpha \mp\sqrt{(A-B)^2\sin\alpha^2 + \{2C-(A+B)\cos\alpha\}^2},$$

$$2Q\sin\alpha^2 = A+B-2C\cos\alpha \pm\sqrt{(A-B)^2\sin\alpha^2 + \{2C-(A+B)\cos\alpha\}^2}.$$

Aus den Gleichungen 15) ergiebt sich auf der Stelle die wichtige Gleichung:

18) . . . . . . $PQ\sin\alpha^2 = -(C^2 - AB)$.

Führen wir die Ausdrücke 6) von f, g in die Grösse

$$Af^2 + Bg^2 + 2Cfg + 2Df + 2Eg + F$$

ein, wobei wir bemerken, dass diese Grösse auf die Form

$$(Af + Cg + D)f + (Cf + Bg + E)g + Df + Eg + F$$

gebracht werden kann, und daher nach 4)

$$Df + Eg + F$$

ist; so erhalten wir für dieselbe mittelst leichter Rechnung den Ausdruck:

$$\frac{AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE}{C^2 - AB},$$

welche Grösse wir im Folgenden durch Ω bezeichnen, also:

19) . . . $\Omega = \dfrac{AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE}{C^2 - AB}$

setzen wollen, so dass also

20) . . . $Af^2 + Bg^2 + 2Cfg + 2Df + 2Eg + F = \Omega$

ist.

Rücksichtlich des Zählers der Grösse Ω bemerken wir noch die folgenden Relationen:

20*)

$$A(AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE)$$
$$= (AE - CD)^2 - (C^2 - AB)(D^2 - AF),$$
$$B(AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE)$$
$$= (BD - EC)^2 - (E^2 - BF)(C^2 - BA),$$
$$F(AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE)$$
$$= (FC - DE)^2 - (D^2 - FA)(E^2 - FB).$$

In Folge aller dieser Bestimmungen erhält nun die Gleichung 3) nach gehöriger Substitution die folgende Form:

21) . . . . $Px_1{}^2 + Qy_1{}^2 + \Omega = 0,$

oder, wenn die Grösse Ω nicht verschwindet, die Form:

$$22) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{P}{\Omega}x_1^2 + \frac{Q}{\Omega}y_1^2 + 1 = 0.$$

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

I. $C^2 - AB < 0$.

Es ist hier zuvörderst zu bemerken, dass die Grösse

$$A + B - 2C\cos\alpha$$

in diesem Falle mit der Grösse $A + B$ immer gleiches Vorzeichen hat, was auf folgende Art bewiesen werden kann. Es ist:

$$(A - B)^2 \overline{>} 0,$$

also:

$$(A + B)^2 - 4AB \overline{>} 0, \quad (A + B)^2 \overline{>} 4AB;$$

folglich um so mehr:

$$(A + B)^2 \overline{>} 4AB\cos\alpha^2,$$

also, weil nach der Voraussetzung $C^2 < AB$ ist:

$$(A + B)^2 > 4C^2\cos\alpha^2$$

oder:

$$(A + B)^2 - 4C^2\cos\alpha^2 > 0.$$

Daher ist der absolute Werth von $A + B$ grösser als der absolute Werth von $2C\cos\alpha$, woraus das zu Beweisende unmittelbar folgt. Auch könnte man auf folgende Art schliessen. Nach dem Vorstehenden ist:

$$(A + B - 2C\cos\alpha)(A + B + 2C\cos\alpha) > 0,$$

und die beiden Factoren dieses Products haben also gleiche Vorzeichen. Ist nun $A + B$ positiv und $2C\cos\alpha$ positiv, so ist $A + B + 2C\cos\alpha$ offenbar positiv, also auch $A + B - 2C\cos\alpha$ positiv. Ist $A + B$ positiv und $2C\cos\alpha$ negativ, so ist $A + B - 2C\cos\alpha$ offenbar positiv. Ist $A + B$ negativ und $2C\cos\alpha$ positiv, so ist $A + B - 2C\cos\alpha$ offenbar negativ. Ist $A + B$ negativ und $2C\cos\alpha$ negativ, so ist $A + B + 2C\cos\alpha$ offenbar negativ, also auch $A + B - 2C\cos\alpha$ negativ. Also hat $A + B - 2C\cos\alpha$ mit $A + B$ immer gleiches Vorzeichen.

Aus den Gleichungen 15) ergiebt s[...] P, Q gleiche Vor-
wichtige Gleichung: [...]ssen A, B nicht beide

18) . . . . . . $PQ \sin\alpha^2$ [...]zeichen, so dass also auch

Führen wir die A[...] [...]d die Grössen P, Q nach ihren

Af[...] $A+B-2C\cos\alpha$ positiv ist, offenbar

ein, wobei wi[...]

(A[...] $AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE>0$

gebrac[...] und folglich $\Omega<0$, so kann man die Gleichung 22) auf die reelle Form:

is[...]

$$\left(\sqrt{-\frac{P}{\Omega}\cdot x_1}\right)^2+\left(\sqrt{-\frac{Q}{\Omega}\cdot y_1}\right)^2=1$$

bringen. Ist

$$AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE<0$$

und folglich $\Omega>0$, so kann man die Gleichung 22) nur auf die folgende imaginäre Form:

$$\left(\sqrt{\frac{P}{\Omega}\cdot x_1}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{Q}{\Omega}\cdot y_1}\right)^2=-1$$

bringen. Ist

$$AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE=0$$

und folglich $\Omega=0$, so ist die Gleichung 21):

$$Px_1{}^2+Qy_1{}^2=0,$$

und repräsentirt also, weil P, Q gleiche Vorzeichen haben, im Allgemeinen nur den Punkt ($x_1=0$, $y_1=0$), nämlich den Anfang des Systems der x_1y_1, oder den durch die primitiven Coordinaten f, g bestimmten Punkt (fg).

Wenn $A+B<0$ ist, so sind die Grössen P, Q nach ihren obigen Ausdrücken, weil auch $A+B-2C\cos\alpha$ negativ ist, offenbar negativ. Ist nun

$$AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE>0$$

und folglich $\Omega<0$, so kann man die Gleichung 22) nur auf die folgende imaginäre Form bringen:

$$\left(\sqrt{\frac{P}{\Omega}\cdot x_1}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{Q}{\Omega}\cdot y_1}\right)^2=-1.$$

Ist

$$AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE<0$$

und folglich $\Omega>0$, so kann man die Gleichung 22) auf die folgende reelle Form:

$$\left(\sqrt{-\frac{P}{\Omega}}\cdot x_1\right)^2+\left(\sqrt{-\frac{Q}{\Omega}}\cdot y_1\right)^2=1$$

bringen. Ist

$$AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE=0$$

und folglich $\Omega=0$, so ist die Gleichung 21):

$$Px_1^2+Qy_1^2=0,$$

und repräsentirt also, weil P, Q gleiche Vorzeichen haben, im Allgemeinen nur den Punkt ($x_1=0$, $y_1=0$), nämlich den Anfang des Systems der x_1y_1, oder den durch die primitiven Coordinaten f, g bestimmten Punkt (fg).

Anmerkung.

Die Bedingung $P=Q$ oder $P-Q=0$ ist nach 17) nur erfüllt, wenn

$$(A-B)^2\sin\alpha^2+\{2C-(A+B)\cos\alpha\}^2=0,$$

also wenn

$$A-B=0,\quad 2C-(A+B)\cos\alpha=0;$$

oder wenn

$$A=B,\quad 2C=(A+B)\cos\alpha;$$

oder wenn

$$A=B,\quad C=A\cos\alpha=B\cos\alpha$$

ist.

II. $C^2-AB>0$.

Nach 18) haben wegen II. die Grössen P, Q ungleiche Vorzeichen, und die oben gegebenen Ausdrücke liefern daher offenbar für P, Q immer negative, positive oder positive, negative Werthe, jenachdem man in denselben die oberen oder unteren Zeichen nimmt. Ist

$$AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE>0,$$

also $\Omega > 0$; so kann man die Gleichung 22) auf die folgende reelle Form bringen:

$$\mp\left(\sqrt{\mp\frac{P}{\Omega}}\cdot x_1\right)^2 \pm \left(\sqrt{\pm\frac{Q}{\Omega}}\cdot y_1\right)^2 = -1,$$

oder:

$$\pm\left(\sqrt{\mp\frac{P}{\Omega}}\cdot x_1\right)^2 \mp \left(\sqrt{\pm\frac{Q}{\Omega}}\cdot y_1\right)^2 = 1.$$

Ist

$$AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE < 0,$$

also $\Omega < 0$; so kann man die Gleichung 22) auf die folgende reelle Form bringen:

$$\pm\left(\sqrt{\pm\frac{P}{\Omega}}\cdot x_1\right)^2 \mp \left(\sqrt{\mp\frac{Q}{\Omega}}\cdot y_1\right)^2 = -1,$$

oder:

$$\mp\left(\sqrt{\pm\frac{P}{\Omega}}\cdot x_1\right)^2 \pm \left(\sqrt{\mp\frac{Q}{\Omega}}\cdot y_1\right)^2 = 1.$$

Ist

$$AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE = 0,$$

also $\Omega = 0$, so ist die Gleichung 21):

$$Px_1^2 + Qy_1^2 = 0,$$

und repräsentirt also, weil P, Q ungleiche Vorzeichen haben, zwei durch die reelle Gleichung:

$$y_1 = \pm x_1\sqrt{-\frac{P}{\Omega}},$$

wo keine Beziehung der Vorzeichen zu den früheren Statt findet, charakterisirte, durch den Punkt (fg) gehende, also sich schneidende Gerade.

Anmerkung.

Die Bedingung $P = -Q$ oder $P + Q = 0$ ist nach 17) nur erfüllt, wenn

$$A + B - 2C\cos\alpha = 0$$

oder

$$A + B = 2C\cos\alpha$$

ist.

Wir haben oben den Fall, wenn Zähler und Nenner des Ausdrucks 7) von $\tang 2\xi$ zugleich verschwinden, wenn nämlich zugleich

$$A\sin 2\alpha - 2C\sin\alpha = 0, \quad A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B = 0$$

ist, vorläufig ausgeschlossen, und kommen jetzt auf denselben zurück. Es ist aber klar, dass in diesem Falle die Gleichung

$$(A\sin 2\alpha - 2C\sin\alpha)\cos 2\xi - (A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B)\sin 2\xi = 0$$

oder:

$$A\sin 2(\alpha-\xi) - B\sin 2\xi - 2C\sin(\alpha - 2\xi) = 0,$$

auf deren Erfüllung hier Alles ankommt, für jedes ξ, oder unabhängig von bestimmten Werthen von ξ, erfüllt ist. Die Gleichung 3) wird also für jedes ξ die Form

$$Px_1^2 + Qy_1^2 + \Omega = 0$$

haben, so dass also in diesem Falle in unseren Schlüssen nichts geändert wird. Weil nach dem Obigen in diesem Falle

$$2P\sin\alpha^2 = A + B - 2C\cos\alpha, \quad 2Q\sin\alpha^2 = A + B - 2C\cos\alpha$$

ist, so ist die Gleichung:

$$\frac{A+B-2C\cos\alpha}{2\sin\alpha^2}(x_1^2 + y_1^2) + \Omega = 0$$

oder:

$$x_1^2 + y_1^2 = -\frac{2\Omega\sin\alpha^2}{A+B-2C\cos\alpha}.$$

Aus den beiden Gleichungen:

$$A\sin 2\alpha - 2C\sin\alpha = 0, \quad A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B = 0$$

folgt aber:

$$C = A\cos\alpha, \quad B = A(2\cos\alpha^2 - \cos 2\alpha) = A;$$

$$A + B - 2C\cos\alpha = 2A(1-\cos\alpha^2) = 2A\sin\alpha^2,$$

$$\frac{A+B-2C\cos\alpha}{2\sin\alpha^2} = A;$$

wodurch die obige Gleichung die Form:

$$A(x_1^2 + y_1^2) + \Omega = 0$$

oder:

$$x_1^2 + y_1^2 = -\frac{\Omega}{A}$$

erhält. Aus den obigen Ausdrücken von B, C durch A erhellet, dass in diesem Falle die Grössen A, B, C nur **zugleich** verschwinden können, wo dann die Gleichung 1) die Form

$$2Dx+2Ey+F=0$$

erhält, und also eine gerade Linie darstellt.

Wir fragen uns jetzt nur noch, was in den im Vorstehenden betrachteten Fällen I. und II. der durch die primitiven Coordinaten:

$$f=\frac{BD-CE}{C^2-AB},\quad g=\frac{AE-CD}{C^2-AB}$$

bestimmte Punkt (fg) für eine geometrische Bedeutung hat.

Unter dem **Mittelpunkte** der durch die Gleichung

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$$

charakterisirten Linie des zweiten Grades versteht man den Punkt, welcher **alle** durch ihn gelegten Chorden dieser Curve halbirt, insofern es einen solchen Punkt giebt. Indem wir versuchen, diesen Punkt zu bestimmen, sei (uv) ein ganz beliebiger Punkt, und

$$y-v=G(x-u)$$

die Gleichung einer beliebigen, durch denselben gelegten Geraden. Führen wir, um die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Linie des zweiten Grades zu bestimmen, den aus der vorstehenden Gleichung sich ergebenden Ausdruck von y in die Gleichung 1) ein, so erhalten wir zur Bestimmung von x eine Gleichung des zweiten Grades, und für x also im Allgemeinen zwei (reelle oder imaginäre) Werthe, denen dann auch zwei bestimmte Werthe von y entsprechen, woraus sich ergiebt, dass eine Gerade eine Linie des zweiten Grades höchstens in zwei Punkten treffen kann. Bezeichnen wir daher die Durchschnittspunkte unserer obigen Geraden mit der Linie des zweiten Grades, insofern es solche Durchschnittspunkte giebt, durch (x_1y_1) und (x_2y_2), so haben wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$Ax_1^2+By_1^2+2Cx_1y_1+2Dx_1+2Ey_1+F=0,$$

$$Ax_2^2+By_2^2+2Cx_2y_2+2Dx_2+2Ey_2+F=0;$$

aus denen durch Subtraction sich die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{r}A(x_1^2-x_2^2)+B(y_1^2-y_2^2)+2C(x_1y_1-x_2y_2)\\ +2D(x_1-x_2)\\ +2E(y_1-y_2)\end{array}\right\}=0$$

oder:

$$\left.\begin{array}{r}A(x_1-x_2)(x_1+x_2)+B(y_1-y_2)(y_1+y_2)+2C(x_1y_1-x_2y_2)\\ +2D(x_1-x_2)\\ +2E(y_1-y_2)\end{array}\right\}=0$$

ergiebt. Setzen wir nun:

$$\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)=p,\quad \tfrac{1}{2}(y_1+y_2)=q;$$

$$\tfrac{1}{2}(x_1-x_2)=p_1,\quad \tfrac{1}{2}(y_1-y_2)=q_1;$$

so ist, wie man leicht findet:

$$x_1=p+p_1,\quad y_1=q+q_1;$$

$$x_2=p-p_1,\quad y_2=q-q_1;$$

und:

$$x_1y_1-x_2y_2=2(pq_1+qp_1);$$

also die obige Gleichung:

$$App_1+Bqq_1+C(pq_1+qp_1)+Dp_1+Eq_1=0.$$

Nun ist aber auch:

$$y_1-v=G(x_1-u),$$

$$y_2-v=G(x_2-u);$$

also:

$$y_1-y_2=G(x_1-x_2) \quad \text{oder} \quad q_1=Gp_1;$$

folglich:

$$App_1+BGqp_1+C(q+Gp)p_1+Dp_1+EGp_1=0,$$

also:

$$Ap+BGq+C(q+Gp)+D+EG=0$$

oder:

$$Ap+Cq+D+(Cp+Bq+E)G=0,$$

wobei man zu bemerken hat, dass offenbar p_1 nicht verschwinden kann, weil, wenn dies der Fall wäre, nach dem Obigen $x_1-x_2=0$, folglich auch $y_1-y_2=0$, daher $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ sein würde, die Punkte (x_1y_1) und (x_2y_2) also identisch sein oder zusammenfallen würden. Soll nun (uv) der Mittelpunkt der Linie des zweiten

Grades sein, so muss unabhängig von bestimmten Werthen von G:

$$u = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = p,$$

$$v = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) = q$$

und:

$$Ap + Cq + D + (Cp + Bq + E)\,G = 0,$$

also:

$$Au + Cv + D + (Cu + Bv + E)\,G = 0$$

sein; es müssen also abgesondert die beiden Gleichungen:

$$Au + Cv + D = 0,$$

$$Cu + Bv + E = 0$$

bestehen. Diese beiden Gleichungen sind aber identisch mit den beiden Gleichungen 4), nämlich mit den beiden Gleichungen:

$$Af + Cg + D = 0,$$

$$Cf + Bg + E = 0;$$

aus denen die Grössen:

$$f = \frac{BD - CE}{C^2 - AB}, \quad g = \frac{AE - CD}{C^2 - AB}$$

bestimmt wurden; also ist

$$f = u, \quad g = v$$

und der durch die vorstehenden Formeln bestimmte Punkt (fg) ist folglich der Mittelpunkt der Linie des zweiten Grades, den es aber, wie hieraus zugleich erhellet, nur in den beiden Fällen I. und II., wenn nämlich die Grösse $C^2 - AB$ nicht verschwindet, giebt.

§. 3.

Wir wollen jetzt zu der Betrachtung des Falles:

$$\text{III.} \quad C^2 - AB = 0$$

übergehen.

Weil $C^2 = AB$ ist, so haben in diesem Falle A, B, insofern keine dieser Grössen verschwindet, gleiche Vorzeichen, und wir können uns daher der Einfachheit wegen die Gleichung 1), nöthigenfalls durch Umsetzung aller Glieder, immer so dargestellt

denken, dass A, B beide positiv, also $\sqrt{A}$ und $\sqrt{B}$ reelle Grössen sind, was aber natürlich auch dann gilt, wenn die Voraussetzung, dass keine der beiden Grössen A, B verschwindet, nicht erfüllt ist. Ferner können wir

$$C = \sqrt{A}.\sqrt{B}$$

setzen, wenn wir uns nur im Folgenden stets an die Regel halten, dass

$$\sqrt{A} \quad \text{und} \quad \sqrt{B}$$

mit gleichen oder ungleichen Vorzeichen zu nehmen sind, jenachdem die Grösse C positiv oder negativ ist. Unter diesen Voraussetzungen können wir also die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

unter der Form:

23)

$$(x\sqrt{A} + y\sqrt{B})^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

darstellen, was jedenfalls auch dann noch gilt, wenn eine der Grössen A, B, und demzufolge auch die Grösse C, verschwindet, wo man die Wurzel aus der anderen der beiden Grössen A, B mit beliebigem Vorzeichen nehmen kann.

Wir wollen nun wieder, ohne jedoch den Coordinatenanfang zu verändern, zu einem neuen rechtwinkligen Coordinatensysteme der x_1, y_1 übergehen, wo wir also nach 2) die folgenden Gleichungen haben:

$$24) \ldots \left\{ \begin{array}{l} x\sin\alpha = x_1 \sin(\alpha-\xi) - y_1\cos(\alpha-\xi), \\ y\sin\alpha = x_1\sin\xi + y_1\cos\xi; \end{array} \right.$$

aus denen sich mittelst einfacher Elimination sogleich:

$$25) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \quad x\cos\xi + y\cos(\alpha-\xi), \\ y_1 = -x\sin\xi + y\sin(\alpha-\xi) \end{array} \right.$$

ergiebt. Setzen wir nun, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$26) \ldots \quad \sin\xi = -G\sqrt{A}, \qquad \sin(\alpha-\xi) = G\sqrt{B};$$

so ist:

$$27) \ldots y_1 = -x\sin\xi + y\sin(\alpha-\xi) = G(x\sqrt{A} + y\sqrt{B}).$$

Aus den Gleichungen 26) ergiebt sich:

$$\frac{\sin(\alpha-\xi)}{\sin\xi}=\sin\alpha\cot\xi-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}};$$

woraus man sogleich:

$$28)\ldots\cot\xi=\frac{\cos\alpha\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\sin\alpha\sqrt{A}},\quad \tang\xi=\frac{\sin\alpha\sqrt{A}}{\cos\alpha\sqrt{A}-\sqrt{B}}$$

erhält; und hieraus ergiebt sich mittelst der Formeln:

$$\sin\xi^2=\frac{\tang\xi^2}{1+\tang\xi^2},\quad \cos\xi=\sin\xi\cot\xi$$

ferner leicht:

$$29)\ldots\begin{cases}\sin\xi=\pm\dfrac{\sin\alpha\sqrt{A}}{\sqrt{A-2\cos\alpha\sqrt{A}.\sqrt{B}+B}},\\[2ex] \cos\xi=\pm\dfrac{\cos\alpha\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\sqrt{A-2\cos\alpha\sqrt{A}.\sqrt{B}+B}};\end{cases}$$

oder:

$$30)\ldots\ldots\begin{cases}\sin\xi=\pm\dfrac{\sin\alpha\sqrt{A}}{\sqrt{A-2C\cos\alpha+B}},\\[2ex] \cos\xi=\pm\dfrac{\cos\alpha\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\sqrt{A-2C\cos\alpha+B}};\end{cases}$$

wo, wie immer, die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen, was auch für alles Folgende gilt. Weiter führen diese Formeln mittelst der Gleichungen:

$$\sin(\alpha-\xi)=\sin\alpha\cos\xi-\cos\alpha\sin\xi,$$

$$\cos(\alpha-\xi)=\cos\alpha\cos\xi+\sin\alpha\sin\xi$$

zu den folgenden Ausdrücken:

$$31)\ldots\ldots\begin{cases}\sin(\alpha-\xi)=\mp\dfrac{\sin\alpha\sqrt{B}}{\sqrt{A-2\cos\alpha\sqrt{A}.\sqrt{B}+B}},\\[2ex] \cos(\alpha-\xi)=\pm\dfrac{\sqrt{A}-\cos\alpha\sqrt{B}}{\sqrt{A-2\cos\alpha\sqrt{A}.\sqrt{B}+B}};\end{cases}$$

oder:

$$32)\ldots\begin{cases}\sin(\alpha-\xi)=\mp\dfrac{\sin\alpha\sqrt{B}}{\sqrt{A-2C\cos\alpha+B}},\\[2ex] \cos(\alpha-\xi)=\pm\dfrac{\sqrt{A}-\cos\alpha\sqrt{B}}{\sqrt{A-2C\cos\alpha+B}}.\end{cases}$$

Endlich erhält man mittelst der Formeln 26) und der vorhergehenden Ausdrücke:

$$33) \ldots \quad G = \mp \frac{\sin\alpha}{\sqrt{A - 2\cos\alpha\sqrt{A}.\sqrt{B} + B}},$$

oder:

$$34) \ldots \quad G = \mp \frac{\sin\alpha}{\sqrt{A - 2C\cos\alpha + B}}.$$

Sollte der Nenner dieser Brüche verschwinden können, sollte nämlich

$$A - 2\cos\alpha\sqrt{A}.\sqrt{B} + B = 0$$

sein; so wäre:

$$A + B = 2\cos\alpha\sqrt{A}.\sqrt{B},$$

also:

$$(A + B)^2 = 4AB\cos\alpha^2 = 4AB - 4AB\sin\alpha^2,$$

folglich:

$$(A + B)^2 - 4AB = -4AB\sin\alpha^2 = -4C^2\sin\alpha^2$$

oder:

$$(A - B)^2 = -4C^2\sin\alpha^2,$$

was offenbar nur dann Statt finden könnte, wenn $C = 0$ und demzufolge auch $A - B = 0$, also $A = B$ wäre; verschwänden dann aber die einander gleichen Grössen A und B nicht, so würde wegen der Gleichung $C^2 = AB$ auch C nicht verschwinden, wie doch vorausgesetzt wurde. Daher könnte die obige Gleichung nur dann Statt finden, wenn gleichzeitig $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ wäre. Dann hätte aber die Gleichung 1) die Form

$$35) \ldots \quad 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

und würde also eine Gerade repräsentiren. Wenn wir diesen Fall ausschliessen, so hat nach dem Obigen G immer einen endlichen, völlig bestimmten, nicht verschwindenden reellen Werth.

Nach 24) und 27) hat nun die Gleichung 23) die Form:

$$\frac{y_1^2}{G^2} + 2D\frac{x_1\sin(\alpha-\xi) - y_1\cos(\alpha-\xi)}{\sin\alpha} + 2E\frac{x_1\sin\xi + y_1\cos\xi}{\sin\alpha} + F = 0,$$

und wird, wenn wir die aus dem Obigen sich von selbst ergebenden Ausdrücke:

$$\sin(\alpha-\xi)=G\sqrt{B},\quad \cos(\alpha-\xi)=-G\frac{\sqrt{A}-\cos\alpha\sqrt{B}}{\sin\alpha};$$

$$\sin\xi=-G\sqrt{A},\quad \cos\xi=-G\frac{\cos\alpha\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\sin\alpha}$$

einführen, ferner leicht auf die folgende Form gebracht:

36)

$$\begin{aligned}&\frac{y_1^2}{G^2}+2DG\frac{x_1\sin\alpha\sqrt{B}+y_1(\sqrt{A}-\cos\alpha\sqrt{B})}{\sin\alpha^2}\\&-2EG\frac{x_1\sin\alpha\sqrt{A}+y_1(\cos\alpha\sqrt{A}-\sqrt{B})}{\sin\alpha^2}\\&+F=0,\end{aligned}$$

oder:

37)

$$\begin{aligned}&y_1^2+\frac{2G^3(D\sqrt{B}-E\sqrt{A})}{\sin\alpha}x_1\\&+\frac{2G^3\{D(\sqrt{A}-\cos\alpha\sqrt{B})+E(\sqrt{B}-\cos\alpha\sqrt{A})\}}{\sin\alpha^2}y_1\\&+G^2F=0,\end{aligned}$$

oder:

38)

$$\begin{aligned}&y_1^2+\frac{2G^3(D\sqrt{B}-E\sqrt{A})}{\sin\alpha}x_1\\&+\frac{2G^2\{(D\sqrt{A}+E\sqrt{B})-(D\sqrt{B}+E\sqrt{A})\cos\alpha\}}{\sin\alpha^2}y_1\\&+G^2F=0.\end{aligned}$$

Setzen wir der Kürze wegen:

39)

$$\begin{aligned}&A_1=\frac{G^3(D\sqrt{B}-E\sqrt{A})}{\sin\alpha},\\&B_1=\frac{G^3\{(D\sqrt{A}+E\sqrt{B})-(D\sqrt{B}+E\sqrt{A})\cos\alpha\}}{\sin\alpha^2},\\&F_1=G^2F;\end{aligned}$$

so wird die vorstehende Gleichung:

40) . . . . . . $y_1^2+2A_1x_1+2B_1y_1+F_1=0.$

Wir wollen nun das Coordinatensystem der x_1y_1 parallel mit

sich selbst verschieben, dabei seinen Anfangspunkt in einen gewissen Punkt $(f_1 g_1)$ verlegen, und die Coordinaten in diesem neuen Systeme durch x_2, y_2 bezeichnen, wo wir also die Gleichungen:

$$41) \quad \ldots\ldots \quad x_1 = f_1 + x_2, \quad y_1 = g_1 + y_2$$

haben, und durch Substitution dieser Grössen in die Gleichung 40) leicht die Gleichung:

$$41) \ldots y_2^2 + 2A_1 x_2 + 2(g_1 + B_1) y_2 + g_1^2 + 2A_1 f_1 + 2B_1 g_1 + F_1 = 0$$

erhalten, in welcher wir nun über die Coordinaten des neuen Anfangspunkts $(f_1 g_1)$ so disponiren, dass:

$$42) \quad \ldots \quad g_1 + B_1 = 0, \quad g_1^2 + 2A_1 f_1 + 2B_1 g_1 + F_1 = 0$$

ist. Lösen wir diese Gleichungen auf, was nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegt, so erhalten wir:

$$43) \quad \ldots\ldots \quad f_1 = \frac{B_1^2 - F_1}{2A_1}, \quad g_1 = -B_1;$$

woraus, weil

$$g_1^2 + 2A_1 f_1 + 2B_1 g_1 + F_1 = 0$$

ist, nach 40) zugleich erhellet, dass der Punkt $(f_1 g_1)$ ein Punkt unserer Linie des zweiten Grades ist. Auf diese Weise ist nun die Gleichung 41) auf die Form:

$$44) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y_2^2 = -2A_1 x_2$$

gebracht.

Wenn aber $A_1 = 0$ ist, so ist f_1 mittelst der ersten der beiden Formeln 43) nicht zu bestimmen, und dieser Fall muss daher nun noch besonders betrachtet werden. Die Grösse A_1 kann, wie aus ihrem Ausdrucke in 39) unmittelbar hervorgeht und vorher auch schon bemerkt worden ist, weil nach 33) oder 34) offenbar G nicht verschwindet, nur verschwinden, wenn

$$D\sqrt{B} - E\sqrt{A} = 0$$

ist. Da wir nun den Fall, wenn $A = 0$, $B = 0$ ist, schon oben erledigt haben, so sind wir hier vorauszusetzen berechtigt, dass eine der beiden Grössen A, B nicht verschwindet.

Wenn nun A nicht verschwindet, also $A > 0$ ist, so wollen wir

$$D = \mu\sqrt{A}, \quad \mu = \frac{D}{\sqrt{A}}$$

setzen; dann ist, wegen unserer vorausgesetzten Gleichung:

$$D\sqrt{B}-E\sqrt{A}=(\mu\sqrt{B}-E)\sqrt{A}=0,$$

also, weil A nicht verschwindet:

$$\mu\sqrt{B}-E=0,\quad E=\mu\sqrt{B};$$

und die Gleichung 23) hat also die Form:

$$45)\ldots\ldots(x\sqrt{A}+y\sqrt{B})^2+2\mu(x\sqrt{A}+y\sqrt{B})+F=0.$$

Löst man diese Gleichung in Bezug auf

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{B}$$

als unbekannte Grösse auf, so erhält man:

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{B}=-\mu\pm\sqrt{\mu^2-F},$$

also, weil

$$\mu=\frac{D}{\sqrt{A}}$$

ist:

$$46)\ldots\ldots x\sqrt{A}+y\sqrt{B}=\frac{-D\pm\sqrt{D^2-AF}}{\sqrt{A}},$$

und, jenachdem

$$D^2-AF>0,\quad D^2-AF=0,\quad D^2-AF<0$$

ist, repräsentirt diese Gleichung zwei einander parallele Gerade, eine Gerade, oder ist imaginär; wenn $B=0$ ist, sind die durch unsere Gleichung repräsentirten Geraden der Axe der y parallel.

Wenn B nicht verschwindet, also $B>0$ ist, können wir in gleicher Weise

$$E=\mu\sqrt{B},\quad \mu=\frac{E}{\sqrt{B}}$$

setzen; dann ist wegen unserer vorausgesetzten Gleichung:

$$D\sqrt{B}-E\sqrt{A}=(D-\mu\sqrt{A})\sqrt{B}=0,$$

also, weil B nicht verschwindet,

$$D-\mu\sqrt{A}=0,\quad D=\mu\sqrt{A};$$

und die Gleichung 23) hat also wieder die Form:

$$45^*)\ldots\ldots(x\sqrt{A}+y\sqrt{B})^2+2\mu(x\sqrt{A}+y\sqrt{B})+F=0,$$

woraus sich durch Auflösung in Bezug auf

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{B}$$

als unbekannte Grösse wie oben:

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{B}=-\mu\pm\sqrt{\mu^2-F},$$

also, weil

$$\mu=\frac{E}{\sqrt{B}}$$

ist:

47) . . . . . $x\sqrt{A}+y\sqrt{B}=\frac{-E\pm\sqrt{E^2-BF}}{\sqrt{B}}$

ergiebt; jenachdem

$$E^2-BF>0,\quad E^2-BF=0,\quad E^2-BF<0$$

ist, repräsentirt diese Gleichung zwei einander parallele Gerade, eine Gerade, oder ist imaginär; wenn $A=0$ ist, so sind die durch unsere Gleichungen repräsentirten Geraden der Axe der x parallel.

Zu bemerken ist nun noch, dass die Gleichung

$$D\sqrt{B}-E\sqrt{A}=0$$

immer durch eine der beiden Gleichungen:

$$AE-CD=0,\quad BD-CE=0$$

vollständig ersetzt werden kann.

Aus

$$D\sqrt{B}-E\sqrt{A}=0$$

folgt durch Multiplication:

$$D\sqrt{B}.\sqrt{A}-E\sqrt{A}.\sqrt{A}=0,\quad D\sqrt{B}.\sqrt{B}-E\sqrt{A}.\sqrt{B}=0;$$

also, weil

$$\sqrt{A}.\sqrt{A}=A,\quad \sqrt{B}.\sqrt{B}=B,\quad \sqrt{A}.\sqrt{B}=C$$

ist:

$$DC-EA=0,\quad DB-EC=0$$

oder:

$$AE-CD=0,\quad BD-CE=0.$$

Umgekehrt folgt aus

$$AE-CD=0 \quad \text{oder} \quad BD-CE=0$$

durch Zerlegung der Grössen A, B, C in Factoren:

$$E\sqrt{A}.\sqrt{A}-D\sqrt{A}.\sqrt{B}=0 \text{ oder } D\sqrt{B}.\sqrt{B}-E\sqrt{A}.\sqrt{B}=0,$$

also, wenn A oder B nicht verschwindet, beziehungsweise:

$$E\sqrt{A}-D\sqrt{B}=0 \text{ oder } D\sqrt{B}-E\sqrt{A}=0,$$

folglich in jedem Falle:

$$D\sqrt{B}-E\sqrt{A}=0.$$

Wenn A, B beide verschwinden, und folglich auch C verschwindet, bestehen natürlich die drei Gleichungen:

$$D\sqrt{B}-E\sqrt{A}=0,\quad AE-CD=0,\quad BD-CE=0$$

immer zusammen, und es ergiebt sich also aus dem Vorhergehenden Folgendes:

Wenn A nicht verschwindet, kann die Gleichung

$$D\sqrt{B}-E\sqrt{A}=0$$

durch die Gleichung

$$AE-CD=0$$

vollständig ersetzt werden.

Wenn B nicht verschwindet, kann die Gleichung

$$D\sqrt{B}-E\sqrt{A}=0$$

durch die Gleichung

$$BD-CE=0$$

vollständig ersetzt werden.

Wenn A, B beide verschwinden, oder beide nicht verschwinden, kann die Gleichung

$$D\sqrt{B}-E\sqrt{A}=0$$

durch jede der beiden Gleichungen

$$AE-CD=0,\quad BD-CE=0$$

vollständig ersetzt werden.

Es ist leicht zu zeigen, dass in dem Falle, wenn A, B beide nicht verschwinden, sowohl die Grössen:

$$\frac{-D\pm\sqrt{D^2-AF}}{\sqrt{A}} \text{ und } \frac{-E\pm\sqrt{E^2-BF}}{\sqrt{B}},$$

als auch die Bedingungen:

$$D^2-AF>0,\quad D^2-AF=0,\quad D^2-AF<0$$

und beziehungsweise

$$E^2-BF>0,\quad E^2-BF=0,\quad E^2-BF<0$$

identisch sind.

Für A_1 erhält man nach 34) und 39) leicht den folgenden vollständig entwickelten Ausdruck:

48)

$$A_1=\mp\frac{(D\sqrt{B}-E\sqrt{A})\sin\alpha^2}{(A-2C\cos\alpha+B)\sqrt{A-2C\cos\alpha+B}};$$

und für f_1, g_1 ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

49)

$$f_1=\mp\frac{\{(D\sqrt{A}+E\sqrt{B})-(D\sqrt{B}+E\sqrt{A})\cos\alpha\}^2-F(A-2C\cos\alpha+B)^2}{2(D\sqrt{B}-E\sqrt{A})(A-2C\cos\alpha+B)\sqrt{A-2C\cos\alpha+B}},$$

$$g_1=\pm\frac{\{(D\sqrt{A}+E\sqrt{B})-(D\sqrt{B}+E\sqrt{A})\cos\alpha\}\sin\alpha}{(A-2C\cos\alpha+B)\sqrt{A-2C\cos\alpha+B}}.$$

Zur Berechnung der primitiven Coordinaten f, g des Punktes $(f_1 g_1)$ hat man aber nach 24) die folgenden Formeln:

$$\mathfrak{f}\sin\alpha=f_1\sin(\alpha-\xi)-g_1\cos(\alpha-\xi),$$

$$\mathfrak{g}\sin\alpha=f_1\sin\xi+g_1\cos\xi;$$

also nach dem Obigen:

$$\mathfrak{f}\sin\alpha=\quad G(f_1\sqrt{B}+g_1\frac{\sqrt{A}-\cos\alpha\sqrt{B}}{\sin\alpha}),$$

$$\mathfrak{g}\sin\alpha=-G(f_1\sqrt{A}-g_1\frac{\sqrt{B}-\cos\alpha\sqrt{A}}{\sin\alpha});$$

oder:

$$\mathfrak{f}=\quad G\frac{f_1\sin\alpha\sqrt{B}+g_1(\sqrt{A}-\cos\alpha\sqrt{B})}{\sin\alpha^2},$$

$$\mathfrak{g}=-G\frac{f_1\sin\alpha\sqrt{A}-g_1(\sqrt{B}-\cos\alpha\sqrt{A})}{\sin\alpha^2};$$

folglich nach 34):

50)

$$\mathfrak{f} = \mp \frac{f_1 \sin\alpha\sqrt{B} + g_1(\sqrt{A} - \cos\alpha\sqrt{B})}{\sin\alpha\sqrt{A - 2C\cos\alpha + B}},$$

$$\mathfrak{g} = \pm \frac{f_1 \sin\alpha\sqrt{A} - g_1(\sqrt{B} - \cos\alpha\sqrt{A})}{\sin\alpha\sqrt{A - 2C\cos\alpha + B}}.$$

Mittelst der Formeln 49) und 50) kann man f, g unmittelbar aus den Coefficienten der Gleichung 1) berechnen, eben so wie A_1 mittelst der Formel 48).

§. 4.

Aus den im Vorhergehenden angestellten Untersuchungen ergiebt sich das wichtige Resultat, dass durch die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

im Allgemeinen nur drei wesentlich von einander verschiedene, durch Gleichungen von den allgemeinen Formen:

$$\mathfrak{A}^2x^2 + \mathfrak{B}^2y^2 = 1, \quad \pm\mathfrak{A}^2x^2 \mp \mathfrak{B}^2y^2 = 1, \quad \mathfrak{A}y^2 = \mathfrak{B}x;$$

welche den drei Fällen:

$$C^2 - AB < 0, \quad C^2 - AB > 0, \quad C^2 - AB = 0$$

entsprechen, charakterisirte Curven repräsentirt werden. Nur in einigen besonderen Fällen, die als Ausnahmefälle zu betrachten sind, degeneriren diese Curven in gerade Linien, Systeme von geraden Linien, in Punkte, oder werden imaginär, so dass durch die obige allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen gar kein geometrisches Gebilde repräsentirt wird. Was uns in dieser Beziehung die im Obigen angestellte Untersuchung ergeben hat, wollen wir jetzt in der Kürze zusammenstellen, indem wir bemerken, dass die drei im Vorhergehenden näher bezeichneten Curven beziehungsweise

Ellipse, Hyperbel, Parabel

genannt werden.

Bei der folgenden Zusammenstellung wollen wir der Kürze wegen für's Erste den Coefficienten A als positiv annehmen, wozu wir offenbar berechtigt sind, weil in der Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

der Coefficient A entweder schon positiv ist, oder dieser Gleichung, indem man alle ihre Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens bringt, sogleich eine solche Form gegeben werden kann, dass der in Rede stehende Coefficient positiv ist. In dem Falle, $C^2 - AB < 0$, — und natürlich auch in dem Falle $C^2 - AB = 0$, worauf es aber hier weiter nicht ankommt, — wo A, B gleiche Vorzeichen haben, ist dann auch $A + B$ positiv, und eine Betrachtung eines anderen Falls nicht weiter nöthig. Unter diesen Voraussetzungen sind nun die folgenden Fälle zu unterscheiden:

I. $C^2 - AB < 0$.

1. . . . . $AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE > 0$

Ellipse.

2. . . . . $AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE < 0$

Imaginär.

3 . . . . $AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE = 0$

Ein Punkt.

II. $C^2 - AB > 0$.

1. . . . $AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE \gtrless 0$

Hyperbel.

2. . . . . $AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE = 0$.

Zwei sich schneidende Gerade.

III. $C^2 - AB = 0$.

Parabel
im Allgemeinen,

mit den folgenden Ausnahmefällen, die in allen Fällen zuerst untersucht werden müssen, indem nur erst dann, wenn keiner dieser Ausnahmefälle Statt findet, sicher auf eine Parabel geschlossen werden kann.

1. A und B verschwinden beide.

Eine Gerade.

2. A und B verschwinden nicht beide und es findet die Gleichung

$$D\sqrt{B}-E\sqrt{A}=0$$

Statt, welche ersetzt wird durch die Gleichung

$$AE-CD=0 \quad \text{oder} \quad BD-CE=0,$$

jenachdem A oder B nicht verschwindet, oder durch diese beiden Gleichungen, wenn A und B beide nicht verschwinden.

a. . . . . $A>0,\quad D^2-AF>0$

Zwei einander parallele Gerade.

b. . . . . $A>0,\quad D^2-AF=0$

Eine Gerade.

c. . . . . $A>0,\quad D^2-AF<0$

Imaginär.

Wenn $B=0$ ist, sind die Geraden der Axe der y parallel.

d. . . . . . $A=0,\quad B>0,\quad E^2-BF>0$

Zwei einander parallele Gerade.

e. . . . . . $A=0,\quad B>0,\quad E^2-BF=0$

Eine Gerade.

f. . . . . . $A=0,\quad B>0,\quad E^2-BF<0$

Imaginär.

Die Geraden sind der Axe der x parallel.

Wenn man nun aber nur überlegt, dass bei der Umstellung aller Glieder einer Gleichung, wenn man nämlich alle Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens bringt, oder auch, was dasselbe ist, wenn man die Gleichung mit -1 multiplicirt, alle Coefficienten der Gleichung ihre Vorzeichen mit den entgegengesetzten vertauschen; so überzeugt man sich sehr leicht, dass man bei der Aufstellung der obigen Bedingungen von der bis jetzt festgehaltenen einschränkenden Bedingung, dass A positiv sein soll, sich auch ganz unabhängig machen und die obigen Bedingungen in völliger Allgemeinheit auch auf folgende Art aufstellen kann:

I. $C^2-AB<0.$

1. . . . . $A>0,\quad B>0$

a. . . . $AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE>0$

Ellipse.

b. . . . $AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE<0$

Imaginär.

c. . . . $AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE=0$

Ein Punkt.

2. . . . . $A<0,\quad B<0$

a. . . . $AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE<0$

Ellipse.

b. . . . $AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE>0$

Imaginär.

c. . . . $AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE=0$

Ein Punkt.

II. $C^2-AB>0$.

1. . . . . $AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE \gtrless 0$

Hyperbel.

2. . . . . $AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE=0$

Zwei sich schneidende Gerade.

III. $C^2-AB=0$.

Parabel
im Allgemeinen,

mit den folgenden Ausnahmefällen, die in allen Fällen zuerst untersucht werden müssen, indem nur erst dann, wenn keiner dieser Ausnahmefälle Statt findet, sicher auf eine Parabel geschlossen werden kann.

1. A und B verschwinden beide.

Eine Gerade.

2. A und B verschwinden nicht beide.

a. . . . . $A\gtrless 0,\quad AE-CD=0.$

aa. . . . . $D^2-AF>0$

Zwei einander parallele Gerade.

bb. . . . . $D^2-AF=0$

Eine Gerade.

cc. . . . . $D^2-AF<0$

Imaginär.

Wenn $B=0$ ist, sind die Geraden der Axe der y parallel.

b. . . . . $A=0,\quad B \gtrless 0,\quad BD-CE=0.$

aa. . . . . $E^2-BF>0$

Zwei einander parallele Gerade.

bb. . . . . $E^2-BF=0$

Eine Gerade.

cc. . . . . $E^2-BF<0$

Imaginär.

Die Geraden sind der Axe der x parallel.

Wenn nun aber $A=0$, $B\gtrless 0$ ist, so wird die Gleichung

$$BD-CE=0,$$

weil auch $C=0$ ist, nur erfüllt für $D=0$, und man kann also endlich die obigen Bedingungen auch auf folgenden Ausdruck bringen:

I. $C^2-AB<0.$

1. . . . . $A>0,\quad B>0$

a. . . . $AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE>0$

Ellipse.

b. . . . $AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE<0$

Imaginär.

c. . . . $AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE=0$

Ein Punkt.

2. . . . . $A < 0, \quad B < 0$

a. . . . $AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE < 0$

Ellipse.

b. . . . $AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE > 0$

Imaginär.

c. . . . $AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE = 0$

Ein Punkt.

II. $C^2 - AB > 0.$

1. . . . . $AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE \gtrless 0$

Hyperbel.

2. . . . . $AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE = 0$

Zwei sich schneidende Gerade.

III. $C^2 - AB = 0.$

Parabel
im Allgemeinen,

mit den folgenden Ausnahmefällen, die in allen Fällen zuerst untersucht werden müssen, indem nur erst dann, wenn keiner dieser Ausnahmefälle Statt findet, sicher auf eine Parabel geschlossen werden kann.

1. A und B verschwinden beide.

Eine Gerade.

2. A und B verschwinden nicht beide.

a. . . . . $A \gtrless 0, \quad AE - CD = 0.$

aa. . . . . $D^2 - AF > 0$

Zwei einander parallele Gerade.

bb. . . . . $D^2 - AF = 0$

Eine Gerade.

cc. . . . . $D^2 - AF < 0$

Imaginär.

Wenn $B = 0$ ist, sind die Geraden der Axe der y parallel.

b. . . . . $A = 0, \quad B \gtrless 0, \quad D = 0.$

aa. . . . . $E^2 - BF > 0$

Zwei einander parallele Gerade.

bb. . . . . $E^2 - BF = 0$

Eine Gerade.

cc. . . . . $E^2 - BF < 0$

Imaginär.

Die Geraden sind der Axe der x parallel.

Man kann noch nach den Bedingungen fragen, welche erfüllt sein müssen, wenn in den Fällen, wo die Curve eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, die erstere in einen Kreis, die letztere in eine gleichseitige Hyperbel übergehen soll.

Wenn die Curve eine Ellipse ist, und also die Bedingungen I. 1. a. oder I. 2. a. erfüllt sind, so ist, wegen der in §. 2. aus der Gleichung 22) in dem Falle I., wenn nämlich

$$C^2 - AB < 0$$

ist, abgeleiteten Gleichungen, die Bedingung, dass die Ellipse in einen Kreis übergeht, offenbar

$$P = Q \quad \text{oder} \quad P - Q = 0,$$

also nach 17):

$$\sqrt{(A-B)^2 \sin\alpha^2 + \{2C - (A+B)\cos\alpha\}^2} = 0,$$

oder:

$$(A-B)^2 \sin\alpha^2 + \{2C - (A+B)\cos\alpha\}^2 = 0,$$

welche Gleichung nothwendig in die beiden Gleichungen:

$$A - B = 0, \quad 2C - (A+B)\cos\alpha = 0;$$

oder:

$$A = B, \quad C = A\cos\alpha = B\cos\alpha$$

zerfällt. Für das rechtwinklige Coordinatensystem sind diese Gleichungen:

$$(A-B)^2 + 4C^2 = 0,$$

oder, in zwei Gleichungen zerlegt:

$$A = B, \quad C = 0.$$

Es ist in diesem Falle:

$$C^2 - AB = -A^2 \sin\alpha^2 = -B^2 \sin\alpha^2;$$

für das rechtwinklige Coordinatensystem ist also:

$$C^2 - AB = -A^2 = -B^2.$$

Sogleich übersieht man, dass hier:

$$AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE$$

$$= A(D^2 + E^2 - AF\sin\alpha^2 - 2DE\cos\alpha)$$

ist, und sich also die den beiden Fällen

$$A > 0, \quad B > 0 \quad \text{und} \quad A < 0, \quad B < 0$$

nach dem Obigen entsprechenden Bedingungen

$$AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE > 0$$

und

$$AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE < 0,$$

auf die eine Bedingung

$$D^2 + E^2 - AF\sin\alpha^2 - 2DE\cos\alpha > 0,$$

in dem Falle des rechtwinkligen Coordinatensystems daher auf die eine Bedingung

$$D^2 + E^2 - AF > 0$$

reduciren.

Wenn die Curve eine Hyperbel ist, und also die Bedingung II. 1. erfüllt ist, so ist, wegen der in §. 2. aus der Gleichung 22) in dem Falle II., wenn nämlich

$$C^2 - AB > 0$$

ist, abgeleiteten Gleichungen, die Bedingung, dass die Hyperbel eine gleichseitige Hyperbel ist, offenbar

$$P = -Q \quad \text{oder} \quad P + Q = 0,$$

also nach 17):

$$A + B - 2C\cos\alpha = 0$$

oder

$$A+B=2C\cos\alpha,$$

folglich für das rechtwinklige Coordinatensystem:

$$A+B=0 \quad \text{oder} \quad B=-A.$$

Natürlich wird hierbei vorausgesetzt, dass die Bedingungen, welche nach dem Obigen erfüllt sein müssen, wenn die Curve eine Hyperbel überhaupt sein soll, erfüllt sind.

§. 5.

Wir wenden diese Bedingungen auf eine grössere Anzahl von Beispielen an, indem wir der Kürze wegen

$$\Theta=AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE$$

setzen.

(1) . . . . . $-2x^2-y^2+2xy-2x+2y=0.$

$$A=-2,\quad B=-1,\quad C=1,\quad D=-1,\quad E=1,\quad F=0;$$

$$C^2-AB=-1,\quad \Theta=-1;$$

$$A<0,\quad B<0,\quad C^2-AB<0,\quad \Theta<0;$$

Ellipse.

(2) . . . . $-2x^2-y^2+2xy+2x=0.$

$$A=-2,\quad B=-1,\quad C=1,\quad D=1,\quad E=0,\quad F=0;$$

$$C^2-AB=-1,\quad \Theta=-1;$$

$$A<0,\quad B<0,\quad C^2-AB<0,\quad \Theta<0;$$

Ellipse.

(3) . . . . . $-2x^2-y^2+2xy-x-2y-3=0.$

$$A=-2,\quad B=-1,\quad C=1,\quad D=-\tfrac{1}{2},\quad E=-1,\quad F=-3;$$

$$C^2-AB=-1,\quad \Theta=-\tfrac{1}{4};$$

$$A<0,\quad B<0,\quad C^2-AB<0,\quad \Theta<0;$$

Ellipse.

(4) . . . . $x^2+y^2+xy+\tfrac{1}{2}x+y+1=0.$

$$A=1,\quad B=1,\quad C=\tfrac{1}{2},\quad D=\tfrac{1}{4},\quad E=\tfrac{1}{2},\quad F=1;$$

$$C^2-AB=-\tfrac{3}{4},\quad \Theta=-\tfrac{9}{16};$$

$$A>0,\quad B>0,\quad C^2-AB<0,\quad \Theta<0;$$

Imaginär.

(5) . . . . $x^2+y^2+2x+2=0.$

$$A=1,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=1,\quad E=0,\quad F=2;$$

$$C^2-AB=-1,\quad \Theta=-1;$$

$$A>0,\quad B>0,\quad C^2-AB<0,\quad \Theta<0;$$

Imaginär.

Hätte man diese Gleichung geschrieben:

$$-x^2-y^2-2x-2=0;$$

also:

$$A=-1,\quad B=-1,\quad C=0,\quad D=-1,\quad E=0,\quad F=-2;$$

so wäre:

$$C^2-AB=-1,\quad \Theta=1;$$

$$A<0,\quad B<0,\quad C^2-AB<0,\quad \Theta>0;$$

Imaginär.

(6) . . . . $x^2+y^2-2x+1=0.$

$$A=1,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=-1,\quad E=0,\quad F=1;$$

$$C^2-AB=-1,\quad \Theta=0;$$

$$A>0,\quad B>0,\quad C^2-AB<0,\quad \Theta=0;$$

Ein Punkt.

(7) . . . . . $-x^2+y^2-2xy+2x-2y+3=0.$

$$A=-1,\quad B=1,\quad C=-1,\quad D=1,\quad E=-1,\quad F=3;$$

$$C^2-AB=2,\quad \Theta=4;$$

$$C^2-AB>0,\quad \Theta>0;$$

Hyperbel.

(8) . . . . . $x^2-y^2-2xy-2x-2y+1=0.$

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=-1,\quad D=-1,\quad E=-1,\quad F=1;$$

$$C^2-AB=2,\quad \Theta=4;$$

$$C^2-AB>0,\quad \Theta>0;$$

Hyperbel.

(9) . . . . $-x^2+y^2-2xy+2=0.$

$$A=-1,\quad B=1,\quad C=-1,\quad D=0,\quad E=0,\quad F=2;$$

$$C^2-AB=2,\quad \Theta=4;$$

$$C^2-AB>0,\quad \Theta>0;$$

Hyperbel.

(10) . . . . . . $x^2-y^2-2x+2y-1=0.$

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=0,\quad D=-1,\quad E=1,\quad F=-1;$$

$$C^2-AB=1,\quad \Theta=-1;$$

$$C^2-AB>0,\quad \Theta<0;$$

Hyperbel.

(11) . . . . $-2x^2+y^2+6x-2y-3=0.$

$$A=-2,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=3,\quad E=-1,\quad F=-3;$$

$$C^2-AB=2,\quad \Theta=1;$$

$$C^2-AB>0,\quad \Theta>0;$$

Hyperbel.

(12) . . . . $-x^2+y^2-2xy-2=0.$

$$A=-1,\quad B=1,\quad C=-1,\quad D=0,\quad E=0,\quad F=-2;$$

$$C^2-AB=2,\quad \Theta=-4;$$

$$C^2-AB>0,\quad \Theta<0;$$

Hyperbel.

(13) . . . . $-2x^2+y^2+2y+1=0.$

$$A=-2,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=0,\quad E=1,\quad F=1;$$

$$C^2-AB=2,\quad \Theta=0;$$

$$C^2-AB>0,\quad \Theta=0;$$

Zwei sich schneidende Gerade.

(14) . . . . $-x^2+y^2=0$

$$A=-1,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=0,\quad E=0,\quad F=0;$$

$$C^2-AB=1,\quad \Theta=0;$$

$$C^2-AB>0,\quad \Theta=0;$$

Zwei sich schneidende Gerade.

(15) . . . . $2x^2 - y^2 - xy - 3x + 1 = 0.$

$$A = 2,\quad B = -1,\quad C = -\tfrac{1}{2},\quad D = -\tfrac{3}{2},\quad E = 0,\quad F = 1;$$

$$C^2 - AB = \tfrac{9}{4},\quad \Theta = 0;$$

$$C^2 - AB > 0,\quad \Theta = 0;$$

Zwei sich schneidende Gerade.

(16) . . . . . . $x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0.$

$$A = 1,\quad B = -1,\quad C = -1,\quad D = -1,\quad E = -1,\quad F = 1;$$

$$C^2 - AB = 2,\quad \Theta = 4;$$

$$C^2 - AB > 0,\quad \Theta > 0;$$

Hyperbel.

(17) . . . . $x^2 - y^2 + 2xy + 2x + 2 = 0.$

$$A = 1,\quad B = -1,\quad C = 1,\quad D = 1,\quad E = 0,\quad F = 2;$$

$$C^2 - AB = 2,\quad \Theta = 3;$$

$$C^2 - AB > 0,\quad \Theta > 0;$$

Hyperbel.

(18) . . . . . $-x^2 - y^2 + 2xy - 2y - 1 = 0.$

$$A = -1,\quad B = -1,\quad C = 1,\quad D = 0,\quad E = -1,\quad F = -1;$$

$$C^2 - AB = 0;$$

$$A = -1,\quad AE - CD = 1;$$

Parabel.

(19) . . . . $-y^2 - x + 2y = 0.$

$$A = 0,\quad B = -1,\quad C = 0,\quad D = -\tfrac{1}{2},\quad E = 1,\quad F = 0;$$

$$C^2 - AB = 0;$$

$$A = 0,\quad B = -1,\quad D = -\tfrac{1}{2};$$

Parabel.

(20) . . . . $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0.$

$$A = 1,\quad B = 1,\quad C = 0,\quad D = -1,\quad E = 0,\quad F = 1;$$

$$C^2 - AB = -1,\quad \Theta = 0;$$

$$A > 0,\quad B > 0,\quad C^2 - AB < 0,\quad \Theta = 0;$$

Ein Punkt.

$$(21) \quad \ldots \quad 80x^2+4y^2-32xy+40x-24y+85=0.$$

$$A=80,\quad B=4,\quad C=-16,\quad D=20,\quad E=-12,\quad F=85;$$

$$C^2-AB=-64,\quad \Theta=0;$$

$$A>0,\quad B>0,\quad C^2-AB<0,\quad \Theta=0;$$

Ein Punkt.

$$(22) \quad \ldots\ldots \quad 13x^2+2y^2+10xy+1=0.$$

$$A=13,\quad B=2,\quad C=5,\quad D=0,\quad E=0,\quad F=1;$$

$$C^2-AB=-1,\quad \Theta=-1;$$

$$A>0,\quad B>0,\quad C^2-AB<0,\quad \Theta<0;$$

Imaginär.

$$(23) \quad \ldots\ldots \quad x^2+y^2+2xy+1=0.$$

$$A=1,\quad B=1,\quad C=1,\quad D=0,\quad E=0,\quad F=1;$$

$$C^2-AB=0;$$

$$A=1,\quad AE-CD=0,\quad D^2-AF=-1;$$

$$A>0,\quad AE-CD=0,\quad D^2-AF<0;$$

Imaginär.

$$(24) \quad \ldots\ldots \quad 2x^2-y^2-2y-1=0.$$

$$A=2,\quad B=-1,\quad C=0,\quad D=0,\quad E=-1,\quad F=-1;$$

$$C^2-AB=2,\quad \Theta=0;$$

$$C^2-AB>0,\quad \Theta=0;$$

Zwei sich schneidende Gerade.

$$(25) \quad \ldots \quad x^2+y^2-2xy-2x+2y+1=0.$$

$$A=1,\quad B=1,\quad C=-1,\quad D=-1,\quad E=1,\quad F=1:$$

$$C^2-AB=0;$$

$$A=1,\quad AE-CD=0,\quad D^2-AF=0;$$

$$A>0,\quad AE-CD=0,\quad D^2-AF=0;$$

Eine Gerade.

(26) . . . . $-x^2-y^2+2xy+1=0.$

$$A=-1,\quad B=-1,\quad C=1,\quad D=0,\quad E=0,\quad F=1;$$

$$C^2-AB=0;$$

$$A=-1,\quad AE-CD=0,\quad D^2-AF=1;$$

$$A<0,\quad AE-CD=0,\quad D^2-AF>0;$$

Zwei einander parallele Gerade.

(27) . . . . $-4x^2-y^2-4xy+4=0.$

$$A=-4,\quad B=-1,\quad C=-2,\quad D=0,\quad E=0,\quad F=4.$$

$$C^2-AB=0.$$

$$A=-4,\quad AE-CD=0,\quad D^2-AF=16;$$

$$A<0,\quad AE-CD=0,\quad D^2-AF>0.$$

Zwei einander parallele Gerade.

(28) . . . . $4x^2+y^2-4xy=0.$

$$A=4,\quad B=1,\quad C=-2,\quad D=0,\quad E=0,\quad F=0;$$

$$C^2-AB=0;$$

$$A=4,\quad AE-CD=0,\quad D^2-AF=0;$$

$$A>0,\quad AE-CD=0,\quad D^2-AF=0;$$

Eine Gerade.

(29) . . . . $y^2+y+1=0.$

$$A=0,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=0,\quad E=\tfrac{1}{2},\quad F=1;$$

$$C^2-AB=0;$$

$$A=0,\quad B=1,\quad D=0,\quad E^2-BF=-\tfrac{3}{4},$$

$$A=0,\quad B>0,\quad D=0,\quad E^2-BF<0;$$

Imaginär.

(30) . . . . $x^2+y^2-2xy+x=0.$

$$A=1,\quad B=1,\quad C=-1,\quad D=\tfrac{1}{2},\quad E=0,\quad F=0;$$

$$C^2-AB=0;$$

$$A=1,\quad AE-CD=\tfrac{1}{2};$$

Parabel.

$$(31) \ldots\ldots\ldots x^2+y^2-2xy+2y=0.$$

$$A=1,\quad B=1,\quad C=-1,\quad D=0,\quad E=1,\quad F=0;$$

$$C^2-AB=0;$$

$$A=1,\quad AE-CD=1;$$

Parabel.

$$(32) \ldots\ldots\ldots x^2+y^2-2xy-2y-1=0.$$

$$A=1,\quad B=1,\quad C=-1,\quad D=0,\quad E=-1,\quad F=-1;$$

$$C^2-AB=0;$$

$$A=1,\quad AE-CD=-1;$$

Parabel.

$$(33) \ldots\ldots\ldots x^2+y^2-2xy-2x-2y=0.$$

$$A=1,\quad B=1,\quad C=-1,\quad D=-1,\quad E=-1,\quad F=0;$$

$$C^2-AB=0;$$

$$A=1,\quad AE-CD=-2;$$

Parabel.

§. 6.

Wir müssen nun noch einmal zu den in §. 2. in den Fällen I. II., in §. 3. in dem Falle III. gegebenen allgemeinen Entwickelungen zurückkehren, um feste und sichere Bestimmungen zu geben, wie in den dort entwickelten allgemeinen Formeln die in denselben vorkommenden doppelten Vorzeichen zu nehmen sind, wobei wir kaum noch wiederholt darauf besonders aufmerksam zu machen brauchen, dass in allen dortigen Formeln, wenn nicht etwas Anderes als eine Ausnahme besonders bemerkt worden ist, die oberen und unteren Vorzeichen in bestimmter Beziehung zu einander stehen.

In den Fällen I. II. haben wir nach 8) und 10) die folgenden Formeln gefunden:

$$51) \ldots\ldots \operatorname{tang} 2\xi=\frac{2(A\cos\alpha-C)\sin\alpha}{A\cos 2\alpha-2C\cos\alpha+B}$$

und:

$$52) \ldots \begin{cases} \sin 2\xi = \pm \dfrac{2(A\cos\alpha - C)\sin\alpha}{\sqrt{(A+B-2C\cos\alpha)^2 + 4(C^2 - AB)\sin\alpha^2}}, \\ \cos 2\xi = \pm \dfrac{A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B}{\sqrt{(A+B-2C\cos\alpha)^2 + 4(C^2 - AB)\sin\alpha^2}}, \end{cases}$$

und zu den, sich selbst auf einander beziehenden, oberen und unteren Vorzeichen stehen die oberen und unteren Vorzeichen in allen in §. 2. entwickelten Formeln, wenn nicht etwa etwas Anderes besonders bemerkt worden ist, in fester und unveränderlicher Beziehung.

Weil bekanntlich

$$0 < \xi < 2\pi$$

ist, so ist

$$0 < 2\xi < 4\pi.$$

Bezeichnen wir nun den zwischen 0 und π liegenden Werth von 2ξ, welchen die Formel 51) allemal liefert, durch ω, wo also

$$0 < \omega < \pi$$

ist; so kann offenbar 2ξ die vier folgenden, 4π nicht übersteigenden positiven Werthe:

$$2\xi = \begin{cases} \omega \\ \omega + \pi \\ \omega + 2\pi \\ \omega + 3\pi \end{cases}$$

also ξ die vier folgenden, wie es erforderlich ist, 2π nicht übersteigenden positiven Werthe:

$$\xi = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega \\ \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{2}\omega + \frac{2}{2}\pi \\ \frac{1}{2}\omega + \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

haben. Jedenfalls reicht es aber hin:

$$\xi = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega \\ \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\pi \end{cases}$$

zu setzen, weil, wenn man

$$\xi = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega + \frac{2}{2}\pi \\ \frac{1}{2}\omega + \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

setzte, dies bloss heissen würde, dass der positive Theil der Axe der x_1 den durch die beiden ersten Werthe von ξ bestimmten Lagen des positiven Theils der Axe der x_1 direct entgegengesetzt angenommen worden sei, was einen wesentlichen Unterschied natürlich nicht bedingen kann, weil dadurch nur die positiven und negativen Coordinaten gegen einander vertauscht werden würden.

Wenn die Grössen

$$A\cos\alpha - C,\quad A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B$$

gleiche Vorzeichen haben, so ist $\tan 2\xi$ positiv, und $\sin 2\xi$, $\cos 2\xi$ haben gleiche Vorzeichen. Es ist also:

$$0 < \omega < \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\pi < \omega + \pi < \tfrac{3}{2}\pi.$$

Setzt man $\xi = \frac{1}{2}\omega$, $2\xi = \omega$, so sind $\sin 2\xi$, $\cos 2\xi$ respective positiv, positiv, und man muss also die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem

$$A\cos\alpha - C,\quad A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B$$

positiv oder negativ sind. Setzt man $\xi = \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\pi$, $2\xi = \omega + \pi$, so sind $\sin 2\xi$, $\cos 2\xi$ respective negativ, negativ, und man muss also die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem

$$A\cos\alpha - C,\quad A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B$$

negativ oder positiv sind.

Wenn die Grössen

$$A\cos\alpha - C,\quad A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B$$

ungleiche Vorzeichen haben, so ist $\tan 2\xi$ negativ, und $\sin 2\xi$, $\cos 2\xi$ haben ungleiche Vorzeichen. Es ist also:

$$\tfrac{1}{2}\pi < \omega < \pi,$$

$$\tfrac{3}{2}\pi < \omega + \pi < 2\pi.$$

Setzt man $\xi = \frac{1}{2}\omega$, $2\xi = \omega$, so sind $\sin 2\xi$, $\cos 2\xi$ respective positiv, negativ, und man muss also die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem

$$A\cos\alpha - C,\quad A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B$$

respective positiv, negativ oder negativ, positiv sind. Setzt man $\xi = \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\pi$, $2\xi = \omega + \pi$, so sind $\sin 2\xi$, $\cos 2\xi$ respective negativ, positiv, und man muss also die oberen oder unteren Vorzeichen nehmen, jenachdem

$$A\cos\alpha - C, \quad A\cos 2\alpha - 2C\cos\alpha + B$$

respective negativ, positiv oder positiv, negativ sind.

Die reciproken Werthe von

$$\sqrt{\pm\frac{P}{\Omega}}, \quad \sqrt{\pm\frac{Q}{\Omega}},$$

also die Grössen:

$$\sqrt{\pm\frac{\Omega}{P}}, \quad \sqrt{\pm\frac{\Omega}{Q}};$$

wo eine Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander jetzt nicht Statt finden soll, sondern die Zeichen nur so genommen werden sollen, dass die Grössen unter den Wurzelzeichen positiv werden, heissen die beiden Halbaxen der Ellipse und Hyperbel in den Fällen dieser Curven, und mögen hier beziehungsweise die erste und zweite Halbaxe genannt werden. Aus den in §. 2. gegebenen Ausdrücken 14), 15), 16), 17) von P, Q, mit Berücksichtigung des Ausdrucks 19) von Ω, erhellet nun rücksichtlich der Grösse der beiden Halbaxen unmittelbar Folgendes:

Wenn man in den Formeln des §. 2. die oberen Zeichen nehmen muss, so ist die

erste Halbaxe		zweite Halbaxe
	die	
$\left\{\begin{array}{c}\text{grössere}\\ \text{kleinere}\end{array}\right\}$		$\left\{\begin{array}{c}\text{kleinere}\\ \text{grössere}\end{array}\right\}$

wenn die Grösse $A + B - 2C\cos\alpha$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{array}\right\}$$

ist.

Wenn man in den Formeln des §. 2. die unteren Zeichen nehmen muss, so ist die

erste Halbaxe		zweite Halbaxe
	die	
$\left\{\begin{array}{c}\text{kleinere}\\ \text{grössere}\end{array}\right\}$		$\left\{\begin{array}{c}\text{grössere}\\ \text{kleinere}\end{array}\right\}$

wenn die Grösse $A+B-2C\cos\alpha$

$$\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$$

ist.

In dem Falle III. haben wir nach 28) und 30) die folgenden Formeln gefunden:

$$53) \ldots\ldots \quad \tan\!g\,\xi=\frac{\sin\alpha\sqrt{A}}{\cos\alpha\sqrt{A}-\sqrt{B}}$$

und:

$$54) \ldots \quad \left\{\begin{aligned}\sin\xi&=\pm\frac{\sin\alpha\sqrt{A}}{\sqrt{A-2C\cos\alpha+B}},\\ \cos\xi&=\pm\frac{\cos\alpha\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\sqrt{A-2C\cos\alpha+B}};\end{aligned}\right.$$

bei denen man sich zu erinnern hat, dass $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ nach §. 3. gleiche und ungleiche Vorzeichen haben können, und rücksichtlich der Vorzeichen ganz Dasselbe gilt, was vorher bei den Fällen I., II. bemerkt worden ist.

Bekanntlich ist wie früher auch hier

$$0<\xi<2\pi,$$

und bezeichnen wir nun den zwischen 0 und π liegenden Werth von ξ, welchen die Formel 53) allemal liefert, durch ω, so dass also

$$0<\omega<\pi$$

ist; so kann offenbar ξ nur die zwei folgenden, 2π nicht übersteigenden positiven Werthe haben:

$$\xi=\left\{\begin{matrix}\omega\\ \omega+\pi\end{matrix}\right.$$

wo es aber offenbar genügt,

$$\xi=\omega$$

zu setzen, weil, wenn man $\xi=\omega+\pi$ setzen wollte, dies nur eine Verlegung des positiven Theils der Axe der x_1 in eine direct entgegengesetzte Lage, also nur eine Vertauschung der positiven und negativen Coordinaten mit einander bedeuten würde.

Wenn die Grössen

$$\sqrt{A},\quad \cos\alpha\sqrt{A}-\sqrt{B}$$

gleiche Vorzeichen haben, so ist tang ξ positiv, und sin ξ, cos ξ haben gleiche Vorzeichen. Es ist also

$$0 < \omega < \tfrac{1}{2}\pi$$

und sin ξ, cos ξ sind respective positiv, positiv; also muss man die oberen oder unteren Vorzeichen nehmen, jenachdem

$$\sqrt{A},\quad \cos\alpha\sqrt{A}-\sqrt{B}$$

positiv oder negativ sind.

Wenn die Grössen

$$\sqrt{A},\quad \cos\alpha\sqrt{A}-\sqrt{B}$$

ungleiche Vorzeichen haben, so ist tang ξ negativ, und sin ξ, cos ξ haben ungleiche Vorzeichen. Es ist also

$$\tfrac{1}{2}\pi < \omega < \pi$$

und sin ξ, cos ξ sind respective positiv, negativ; also muss man die oberen oder unteren Vorzeichen nehmen, jenachdem

$$\sqrt{A},\quad \cos\alpha\sqrt{A}-\sqrt{B}$$

respective positiv, negativ oder negativ positiv sind.

In dem Falle der Parabel heisst der absolute Werth der Grösse A_1 in 48) der halbe Parameter, also der absolute Werth der Grösse $2A_1$ der Parameter der Parabel. *).

Mittelst der obigen Regeln wird man immer sicher entscheiden können, wie in §. 2. und §. 3. die Vorzeichen in den dortigen Formeln zu nehmen sind.

§. 7.

Um die sehr leichte Anwendung der in dieser Abhandlung entwickelten ganz allgemeinen Formeln noch an einem Beispiele zu zeigen, wollen wir mit Hülfe derselben eine Stelle erläutern,

---

*) Hiebei bemerke ich jedoch, dass mit Rücksicht auf die Gleichung 44), wo das Coordinatensystem der x_2, y_2 eben so wie das Coordinatensystem der x_1, y_1, welchem jenes parallel ist, ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist; daher ist in dem Obigen eigentlich nur von dem Parameter der Parabel in Bezug auf ihre Axe die Rede, welchen ich hier schlechthin den Parameter der Parabel genannt habe, indem das Weitere hierüber jetzt nicht hierher gehört.

welche sich in den „Werken von Gauss, Thl. II. S. 278.“ findet. Gauss sagt an dieser Stelle:

„Curva per aequationem inter coordinatas orthogonales p, q hancce

$$app + 2bpq + cqq = 1$$

expressa, est sectio conica, et quidem ellipsis, si a, c atque $ac - bb$ sunt quantitates positivae: area hac ellipsi circumscripta invenitur $= \frac{\pi}{\sqrt{(ac-bb)}}$. Valor quantitatis $app + 2bpq + cqq$ extra ellipsem ubique fit maior quam 1, intra ellipsem minor quam 1, negativus nullibi.“

Es ist also die zu discutirende Gleichung:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1,$$

unter der Voraussetzung, dass a, c und $ac - b^2$ positive Grössen sind, wobei wir übrigens nicht unbedingt voraussetzen wollen, dass die Coordinaten x, y rechtwinklige seien.

In unseren im Obigen überall gebrauchten Zeichen ist:

$$A = a,\quad B = c,\quad C = b,\quad D = 0,\quad E = 0,\quad F = -1;$$

und weil unter der von Gauss gemachten Voraussetzung

$$a > 0,\quad c > 0,\quad ac - b^2 > 0$$

ist, so ist in unseren Zeichen:

$$A > 0,\quad B > 0,\quad C^2 - AB < 0.$$

Leicht findet man:

$$AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE = AB - C^2,$$

so dass also

$$AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE > 0,$$

und folglich die Curve nach den in §. 4. gegebenen Kriterien, in dem letzten Ausdrucke derselben I. 1. a., eine Ellipse ist.

Weil nach 19)

$$\Omega = \frac{AE^2 + BD^2 + FC^2 - ABF - 2CDE}{C^2 - AB}$$

ist, so ist nach dem Vorstehenden offenbar $\Omega = -1$.

Wir wollen nun die Ellipse etwas näher bestimmen.

Die Coordinaten des Mittelpunkts sind nach den für dieselben im Obigen gegebenen allgemeinen Formeln in diesem Falle:

$$f=\frac{BD-CE}{C^2-AB}=0,\quad g=\frac{AE-CD}{C^2-AB}=0;$$

so dass also der Anfang der Coordinaten der Mittelpunkt der Ellipse ist.

Nach 8) ist:

$$\operatorname{tang}2\xi=\frac{2(a\cos\alpha-b)\sin\alpha}{a\cos 2\alpha-2b\cos\alpha+c},$$

und nach 16) hat man die Formeln:

$$2P\sin\alpha^2=\quad a+c-2b\cos\alpha \mp\sqrt{(a-c)^2+4(b-a\cos\alpha)(b-c\cos\alpha)},$$

$$2Q\sin\alpha^2=\quad a+c-2b\cos\alpha \pm\sqrt{(a-c)^2+4(b-a\cos\alpha)(b-c\cos\alpha)}.$$

Wie man sich bei der Bestimmung des Winkels ξ zu verhalten, und welche Regeln man bei der Bestimmung der Vorzeichen zu befolgen hat, ist in §. 6. ausführlich gezeigt worden.

Weil

$$A+B>0,$$

$$AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE>0$$

und $\Omega=-1$ ist, so sind nach §. 2. I. die beiden Halbaxen der Ellipse offenbar:

$$\sqrt{\frac{1}{P}},\quad \sqrt{\frac{1}{Q}};$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{\sin\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{\{a+c-2b\cos\alpha\mp\sqrt{(a-c)^2+4(b-a\cos\alpha)(b-c\cos\alpha)}\}}},$$

$$\frac{\sin\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{\{a+c-2b\cos\alpha\pm\sqrt{(a-c)^2+4(b-a\cos\alpha)(b-c\cos\alpha)}\}}}.$$

Das Product der beiden Halbaxen ist:

$$\frac{1}{\sqrt{PQ}},$$

also, weil nach 18):

$$PQ\sin\alpha^2 = AB - C^2 = ac - b^2$$

ist:

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{ac-b^2}},$$

und folglich nach einem allgemein bekannten Satze der Flächeninhalt der Ellipse:

$$\frac{\pi\sin\alpha}{\sqrt{ac-b^2}},$$

also für rechtwinklige Coordinaten oder $\alpha = 90^0$:

$$\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}},$$

ganz so wie **Gauss** a. a. O. angiebt.

Wenn jetzt (xy) ein ganz beliebiger Punkt in der Ebene unserer Ellipse ist, so wollen wir von dem Mittelpunkte der Ellipse aus, der nach dem Obigen zugleich der Anfang der Coordinaten ist, durch diesen Punkt (xy) eine Gerade ziehen, und deren Durchschnittspunkt mit der Ellipse durh $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ bezeichnen; dann ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\frac{y}{x} = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} \text{ oder } \frac{x}{\mathfrak{x}} = \frac{y}{\mathfrak{y}}.$$

Weil der Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ in der Ellipse liegt, so ist:

$$a\mathfrak{x}^2 + 2b\mathfrak{x}\mathfrak{y} + c\mathfrak{y}^2 = 1;$$

nach dem Vorhergehenden ist aber:

$$a\mathfrak{x}^2 + 2b\mathfrak{x}\mathfrak{y} + c\mathfrak{y}^2 = a\mathfrak{x}^2 + 2b\mathfrak{x}\,.\frac{y}{x}\mathfrak{x} + c\frac{y^2}{x^2}\mathfrak{x}^2$$

$$= (ax^2 + 2bxy + cy^2)\frac{\mathfrak{x}^2}{x^2};$$

also ist:

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)\frac{\mathfrak{x}^2}{x^2} = 1,$$

und folglich:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \frac{x^2}{\mathfrak{x}^2} = \frac{y^2}{\mathfrak{y}^2},$$

woraus zunächst erhellet, dass

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

stets positiv ist.

Jenachdem der Punkt (xy)

ausserhalb, in, innerhalb

der Ellipse liegt, ist offenbar:

$$x^2 > \mathfrak{x}^2, \qquad x^2 = \mathfrak{x}^2, \qquad x^2 < \mathfrak{x}^2;$$

$$y^2 > \mathfrak{y}^2, \qquad y^2 = \mathfrak{y}^2, \qquad y^2 < \mathfrak{y}^2;$$

also:

$$\left.\begin{matrix}\frac{x^2}{\mathfrak{x}^2}\\ \\ \frac{y^2}{\mathfrak{y}^2}\end{matrix}\right\} > 1, \qquad \left.\begin{matrix}\frac{x^2}{\mathfrak{x}^2}\\ \\ \frac{y^2}{\mathfrak{y}^2}\end{matrix}\right\} = 1, \qquad \left.\begin{matrix}\frac{x^2}{\mathfrak{x}^2}\\ \\ \frac{y^2}{\mathfrak{y}^2}\end{matrix}\right\} < 1;$$

folglich nach dem Obigen:

$$ax^2+2bxy+cy^2>1, \quad ax^2+2bxy+cy^2=1, \quad ax^2+2bxy+cy^2<1;$$

ganz so wie **Gauss** angiebt.

Dass unter den gemachten Voraussetzungen die Grösse

$$ax^2+2bxy+cy^2$$

stets positiv ist, kann man, ganz unabhängig von geometrischen Betrachtungen, auch auf folgende Art beweisen.

Weil nach der Voraussetzung a, c positiv sind, so kann man setzen:

$$ax^2+2bxy+cy^2=(x\sqrt{a})^2+2bxy+(y\sqrt{c})^2$$

$$=(x\sqrt{a})^2\pm 2xy\sqrt{ac}+(y\sqrt{c})^2\mp 2xy\sqrt{ac}+2bxy$$

$$=(x\sqrt{a}\pm y\sqrt{c})^2\mp 2(\sqrt{ac}\mp b)xy.$$

Da nach der Voraussetzung $ac-b^2>0$ ist, so ist $\sqrt{ac}$ grösser als der absolute Werth von b, und folglich offenbar $\sqrt{ac}\mp b$ stets positiv. Haben nun x, y gleiche Vorzeichen, so ist offenbar

$$(x\sqrt{a}-y\sqrt{c})^2+2(\sqrt{ac}+b)xy$$

positiv, und wenn x, y ungleiche Vorzeichen haben, so ist augenscheinlich

$$(x\sqrt{a}+y\sqrt{c})^2-2(\sqrt{ac}-b)xy$$

positiv; also ist offenbar nach dem Obigen

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

immer positiv, wie behauptet wurde.

Die ganz allgemeine Discussion der Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

nach den in dieser Abhandlung entwickelten Formeln und Principien empfehlen wir dem Leser recht sehr zur Uebung; uns genügt es hier, die vorhergehende Entwickelung an eine Stelle in einem der berühmtesten und wichtigsten Werke der neueren Zeit angeschlossen und zu deren Erläuterung benutzt zu haben.

Anhang.

Wenn man für den Kegelschnitt der neun Punkte, für welchen in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem die Werthe der Coefficienten

$$A,\quad B,\quad C,\quad D,\quad E,\quad F$$

in der Abhandlung Theil XLIII. Nr. VI. §. 8. 27), auf welche hier überhaupt verwiesen wird, sich angegeben finden, die Lage und Grösse der Axen durch allgemeine Formeln bestimmen will; so kommt es, wie aus den in der vorliegenden Abhandlung entwickelten Formeln, in denen überall $\alpha = 90^0$ zu setzen ist, unmittelbar erhellet, auf die folgenden Grössen an, deren nachstehende Werthe aus den in Rede stehenden Werthen der Coefficienten A, B, C, D, E, F leicht abgeleitet werden:

$$A-B = -2\{\varrho_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_3)\cos 2\alpha_1 + \varrho_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1)\cos 2\alpha_2 + \varrho_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\cos 2\alpha_3\};$$

$$A+B = \quad 2\{\varrho_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \varrho_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \varrho_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\},$$

$$C = -\{\varrho_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin 2\alpha_1 + \varrho_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1)\sin 2\alpha_2 + \varrho_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin 2\alpha_3\},$$

$$(A-B)^2 + 4C^2 = 4\left\{\begin{array}{l} \varrho_1{}^2\sin(\alpha_2-\alpha_3)^2 + \varrho_2{}^2\sin(\alpha_3-\alpha_1)^2 + \varrho_3{}^2\sin(\alpha_1-\alpha_2)^2 \\ + 2\varrho_1\varrho_2\cos 2(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1) \\ + 2\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos 2(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1) \\ + 2\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos 2(\alpha_3-\alpha_1) \end{array}\right\};$$

$$\tang 2\xi = \frac{\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin 2\alpha_1+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin 2\alpha_2+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin 2\alpha_3}{\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos 2\alpha_1+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\cos 2\alpha_2+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos 2\alpha_3};$$

$$P=\frac{A+B\mp\sqrt{(A-B)^2+4C^2}}{2},$$

$$Q=\frac{A+B\pm\sqrt{(A-B)^2+4C^2}}{2};$$

$$C^2-AB=-4\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)$$
$$\times\{\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)\};$$

$$f=\tfrac{1}{4}(\varrho_1\cos\alpha_1+\varrho_2\cos\alpha_2+\varrho_3\cos\alpha_3),$$
$$g=\tfrac{1}{4}(\varrho_1\sin\alpha_1+\varrho_2\sin\alpha_2+\varrho_3\sin\alpha_3);$$

$$\begin{aligned}\Omega= {} & Af^2+Bg^2+2Cfg+2Df+2Eg+F\\ = {} & \frac{1}{16}A(\varrho_1\cos\alpha_1+\varrho_2\cos\alpha_2+\varrho_3\cos\alpha_3)^2\\ & +\frac{1}{16}B(\varrho_1\sin\alpha_1+\varrho_2\sin\alpha_2+\varrho_3\sin\alpha_3)^2\\ & +\frac{1}{8}C(\varrho_1\cos\alpha_1+\varrho_2\cos\alpha_2+\varrho_3\cos\alpha_3)(\varrho_1\sin\alpha_1+\varrho_2\sin\alpha_2+\varrho_3\sin\alpha_3)\\ & +\frac{1}{2}D(\varrho_1\cos\alpha_1+\varrho_2\cos\alpha_2+\varrho_3\cos\alpha_3)\\ & +\frac{1}{2}E(\varrho_1\sin\alpha_1+\varrho_2\sin\alpha_2+\varrho_3\sin\alpha_3)\\ & +F,\end{aligned}$$

$$AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE=(C^2-AB)\Omega.$$

Für $\alpha=90^0$ ist

$$A\cos\alpha-C=-C,\quad A\cos 2\alpha-2C\cos\alpha+B=-(A-B).$$

In den obigen Ausdruck von Ω würden noch die a. a. O. angegebenen Werthe von

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F;$$

die deshalb hier nicht wiederholt werden, noch einzuführen sein. Allen hier gegebenen Formeln gebührt, ungeachtet ihrer von der Natur der Sache unzertrennlichen Weitläufigkeit, der Vorzug grosser Allgemeinheit und völliger Symmetrie.

XXIX.

Allgemeine Discussion der Gleichung des zweiten Grades

$$Ap_0^2 + Bp_1^2 + Cp_2^2 + Dp_0p_1 + Ep_1p_2 + Fp_2p_0 = 0$$

zwischen Dreilinien-Coordinaten oder sogenannten trimetrischen Coordinaten.

Von

dem Herausgeber.

(Figuren s. Taf. VII.)

§. 1.

Jeder Kegelschnitt mit Einschluss des Kreises wird in Dreilinien-Coordinaten oder sogenannten trimetrischen Coordinaten bekanntlich durch eine Gleichung von der Form

$$Ap_0^2 + Bp_1^2 + Cp_2^2 + Dp_0p_1 + Ep_1p_2 + Fp_2p_0 = 0$$

charakterisirt. (M. s. die Abhandlung Nr. XXVII.). Umgekehrt lässt sich nun aber auch fragen, welche Curven überhaupt durch die in Dreilinien-Coordinaten oder sogenannten trimetrischen Coordinaten ausgedrückte Gleichung

$$Ap_0^2 + Bp_1^2 + Cp_2^2 + Dp_0p_1 + Ep_1p_2 + Fp_2p_0 = 0,$$

wo A, B, C, D, E, F als beliebig gegebene Grössen zu betrachten sind, charakterisirt werden. Die Beantwortung dieser

Frage ist schon mehrfach versucht worden*); aber ich glaube nicht, dass dieselbe schon vollständig erledigt sei, und bin selbst der Meinung, dass manche der angegebenen Kriterien nicht allgemein genug, ja in einzelnen Fällen selbst nicht ganz richtig sind; auch sind die gegebenen Formeln nicht immer so vollständig entwickelt und durch die ursprünglich gegebenen Coefficienten A, B, C, D, E, F dargestellt worden, dass sie eine unmittelbare Anwendung gestatten, indem sie gewöhnlich die vorhergehende Berechnung nicht weniger Hülfsgrössen erfordern. Ich habe daher diesen Gegenstand einer neuen Untersuchung unterworfen, deren Ergebnisse ich im Folgenden mittheilen werde, indem ich mir über die bei dieser Untersuchung angewandte Methode die folgenden Vorbemerkungen erlaube. Man hat die Discussion der in Rede stehenden Gleichung nach verschiedenen Methoden anzustellen versucht; mir aber hat es immer am Zweckmässigsten geschienen, dieselbe ohne Weiteres auf die Discussion der Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen in cartesischen Coordinaten zurückzuführen und an dieselbe unmittelbar anzuschliessen; dies ist denn auch die von mir in dieser Abhandlung angewandte Methode, wobei ich mir zugleich ausdrücklich zu bemerken erlaube, dass ich für jetzt hier auch durchaus nur die nach dieser Methode sich ergebenden Resultate mitzutheilen beabsichtige, vorläufig ganz unbekümmert um Das, was sich durch die Anwendung anderer Methoden ergeben hat. Auch betrachte ich diese Untersuchung noch keineswegs als abgeschlossen, behalte mir vielmehr vor, noch öfter auf weitere Folgerungen zurückzukommen, welche sich aus den hier gewonnenen Resultaten ziehen lassen. Dass die hier entwickelten Kriterien ganz sicher und untrügerisch sind, auch den Gegenstand vollständig erschöpfen, scheint mir keinem Zweifel zu unterliegen; ob dieselben aber nicht noch mannigfacher Vereinfachung fähig sind und durch andere Kriterien ersetzt werden können, lasse ich für jetzt ganz dahin gestellt, und muss mir schliesslich erlauben den Wunsch auszusprechen, dass die hier gelieferte Untersuchung auch durchaus nur aus dem vorher angegebenen Gesichtspunkte betrachtet und beurtheilt werde, indem ich weitere Mittheilungen mir vorbehalte. — Den Inhalt meiner Abhandlung: „Das System der

---

*) U. A. s. m. ausser den betreffenden Stellen in „Analytische Geometrie der Kegelschnitte von G. Salmon, übersetzt von W. Fiedler. Leipzig. 1860.“ eine Abhandlung von O. Stolz in den „Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. LV. Band. II. Heft. Wien. 1867. S. 280.

Dreilinien-Coordinaten in allgemeiner analytischer Entwickelung" in **Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI.** setze ich als vollständig bekannt voraus, und werde mich öfters auf diese Abhandlung zu beziehen genöthigt sein, indem ich auch die dort gebrauchten Zeichen hier meistens ohne alle weitere Erläuterung anwenden werde.

§. 2.

Nach Thl. XXXVIII. S. 404. ist allgemein:

$$p_0 = \overline{\omega}_0 + y\cos\alpha_0 - x\cos\beta_0,$$

$$p_1 = \overline{\omega}_1 + y\cos\alpha_1 - x\cos\beta_1,$$

$$p_2 = \overline{\omega}_2 + y\cos\alpha_2 - x\cos\beta_2;$$

wo $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ die trilinearen Coordinaten des Anfangspunkts des rechtwinkligen Systems der xy bezeichnen. Nehmen wir nun den positiven Theil der Axe der x gleich gerichtet an mit der positiven Richtung der ersten Axe des trilinearen Systems, so ist offenbar $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 90^0$ und folglich $\cos\alpha_0 = 1$, $\cos\beta_0 = 0$; also sind die obigen Gleichungen:

$$p_0 = \overline{\omega}_0 + y,$$

$$p_1 = \overline{\omega}_1 + y\cos\alpha_1 - x\cos\beta_1,$$

$$p_2 = \overline{\omega}_2 + y\cos\alpha_2 - x\cos\beta_2.$$

Bezeichnen wir in den Figuren durch $O0$ und $O1$ die positiven Richtungen der ersten und zweiten Axe des trilinearen Systems, so ist offenbar:

in Fig. I.: $\alpha_1 = w_{01}$, $\beta_1 = 90^0 - w_{01}$;

$$\cos\alpha_1 = \cos w_{01},\quad \cos\beta_1 = \sin w_{01};$$

in Fig. II.: $\alpha_1 = -w_{01}$, $\beta_1 = 270^0 - (-w_{01}) = 270^0 + w_{01}$;

$$\cos\alpha_1 = \cos w_{01},\quad \cos\beta_1 = \sin w_{01};$$

in Fig. III.: $\alpha_1 = w_{01}$, $\beta_1 = w_{01} - 90^0$;

$$\cos\alpha_1 = \cos w_{01},\quad \cos\beta_1 = \sin w_{01};$$

in Fig. IV.: $\alpha_1 = -w_{01}$, $\beta_1 = 90^0 + (-w_{01}) = 90^0 - w_{01}$;

$$\cos\alpha_1 = \cos w_{01},\quad \cos\beta_1 = \sin w_{01};$$

also ist in allen Fällen:

$$\cos\alpha_1 = \cos w_{01}, \quad \cos\beta_1 = \sin w_{01}.$$

Auf ganz ähnliche Art ist allgemein:

$$\cos\alpha_2 = \cos w_{02}, \quad \cos\beta_2 = \sin w_{02};$$

weil aber $w_{02} = -w_{20}$ ist, so ist:

$$\cos\alpha_2 = \cos(-w_{20}), \quad \cos\beta_2 = \sin(-w_{20});$$

folglich allgemein:

$$\cos\alpha_2 = \cos w_{20}, \quad \cos\beta_2 = -\sin w_{20}.$$

Daher werden nun die obigen Gleichungen:

$$p_0 = \overline{\omega}_0 + y,$$
$$p_1 = \overline{\omega}_1 + y\cos w_{01} - x\sin w_{01},$$
$$p_2 = \overline{\omega}_2 + y\cos w_{20} + x\sin w_{20};$$

und die Gleichung

$$Ap_0{}^2 + Bp_1{}^2 + Cp_2{}^2 + Dp_0p_1 + Ep_1p_2 + Fp_2p_0 = 0$$

in Dreilinien Coordinaten wird also in rechtwinkligen Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} A(\overline{\omega}_0 + y)^2 \\ + B(\overline{\omega}_1 + y\cos w_{01} - x\sin w_{01})^2 \\ + C(\overline{\omega}_2 + y\cos w_{20} + x\sin w_{20})^2 \\ + D(\overline{\omega}_0 + y)(\overline{\omega}_1 + y\cos w_{01} - x\sin w_{01}) \\ + E(\overline{\omega}_1 + y\cos w_{01} - x\sin w_{01})(\overline{\omega}_2 + y\cos w_{20} + x\sin w_{20}) \\ + F(\overline{\omega}_0 + y)(\overline{\omega}_2 + y\cos w_{20} + x\sin w_{20}) \end{array}\right\} = 0.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so findet man Folgendes:

Der Coefficient von x^2 ist:

$$B\sin w_{01}{}^2 + C\sin w_{20}{}^2 - E\sin w_{01}\sin w_{20}.$$

Der Coefficient von y^2 ist:

$$A + B\cos w_{01}{}^2 + C\cos w_{20}{}^2 + D\cos w_{01} + E\cos w_{01}\cos w_{20} + F\cos w_{20}.$$

Der Coefficient von xy ist:

$$-2B\sin w_{01}\cos w_{01} + 2C\sin w_{20}\cos w_{20} - D\sin w_{01} + E\sin(w_{20} - w_{01}) + F\sin w_{20}.$$

Der Coefficient von x ist:

$$-2B\overline{\omega}_1 \sin w_{01} + 2C\overline{\omega}_2 \sin w_{20} - D\overline{\omega}_0 \sin w_{01}$$
$$+ E(\overline{\omega}_1 \sin w_{20} - \overline{\omega}_2 \sin w_{01}) + F\overline{\omega}_0 \sin w_{20}.$$

Der Coefficient von y ist:

$$2A\overline{\omega}_0 + 2B\overline{\omega}_1 \cos w_{01} + 2C\overline{\omega}_2 \cos w_{20} + D(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_0 \cos w_{01})$$
$$+ E(\overline{\omega}_1 \cos w_{20} + \overline{\omega}_2 \cos w_{01}) + F(\overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_0 \cos w_{20}).$$

Der von x und y unabhängige Theil ist:

$$A\overline{\omega}_0^2 + B\overline{\omega}_1^2 + C\overline{\omega}_2^2 + D\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1 + E\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 + F\overline{\omega}_2\overline{\omega}_0.$$

Legen wir nun aber den Anfang des rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y in den Durchschnittspunkt der ersten und dritten Axe des Dreilinien-Coordinatensystems der p_0, p_1, p_2; so ist $\overline{\omega}_0 = 0$, $\overline{\omega}_2 = 0$ zu setzen, und die Gleichung

$$Ap_0^2 + Bp_1^2 + Cp_2^2 + Dp_0p_1 + Ep_1p_2 + Fp_2p_0 = 0,$$

auf die rechtwinkligen Coordinaten x, y bezogen, wird also, wenn wir der Kürze wegen:

$$A' = B\sin w_{01}^2 + C\sin w_{20}^2 - E\sin w_{01} \sin w_{20},$$

$$B' = A + B\cos w_{01}^2 + C\cos w_{20}^2 + D\cos w_{01} + E\cos w_{01}\cos w_{20} + F\cos w_{20},$$

$$2C' = -2B\sin w_{01}\cos w_{01} + 2C\sin w_{20}\cos w_{20} - D\sin w_{01}$$
$$+ E\sin(w_{20} - w_{01}) + F\sin w_{20},$$

$$2D' = (-2B\sin w_{01} + E\sin w_{20})\overline{\omega}_1,$$

$$2E' = (\ \ 2B\cos w_{01} + D + E\cos w_{20})\overline{\omega}_1,$$

$$F' = B\overline{\omega}_1^2$$

setzen:

$$A'x^2 + B'y^2 + 2C'xy + 2D'x + 2E'y + F' = 0,$$

welche Gleichung wir nun nach den aus der Abhandlung Nr. XXVIII. §. 4. bekannten Regeln discutiren müssen.

§. 3.

Bei der Discussion der Gleichung

$$A'x^2 + B'y^2 + 2C'xy + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$

kommen bekanntlich hauptsächlich gewisse Grössen in Betracht, zu deren Entwickelung wir jetzt übergehen wollen. Bei allen diesen Entwickelungen hat man besonders die aus der Abhandlung Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. S. 403. bekannten Formeln:

$$\cos w_{01} = \cos(w_{12} + w_{20}),$$

$$\cos w_{12} = \cos(w_{20} + w_{01}),$$

$$\cos w_{20} = \cos(w_{01} + w_{12})$$

und

$$\sin w_{01} = - \sin(w_{12} + w_{20}),$$

$$\sin w_{12} = - \sin(w_{20} + w_{01}),$$

$$\sin w_{20} = - \sin(w_{01} + w_{12})$$

zu beachten; ausserdem hat man stets

$$\sin(w_{20} - w_{01}) = \sin w_{20} \cos w_{01} - \cos w_{20} \sin w_{01}$$

zu setzen.

Die erste der zu entwickelnden Grössen ist die Grösse

$$C'^2 - A'B'.$$

Weil aber

$$4(C'^2 - A'B') = (2C')^2 - 4A'B'$$

ist, so wollen wir diese letztere Grösse entwickeln.

Zuerst findet man sehr leicht, dass die Coefficienten von

$$B^2, \quad C^2, \quad BD, \quad BE, \quad CE, \quad CF$$

sämmtlich verschwinden.

Für den Coefficienten von D^2 erhält man:

$$\sin w_{01}{}^2.$$

Für den Coefficienten von E^2 erhält man:

$$(\sin w_{20} \cos w_{01} + \cos w_{20} \sin w_{01})^2 = \sin(w_{20} + w_{01})^2 = \sin w_{12}{}^2.$$

Für den Coefficienten von F^2 erhält man:

$$\sin w_{20}{}^2.$$

Für den Coefficienten von BC erhält man:

$$-4(\sin w_{20} \cos w_{01} + \cos w_{20} \sin w_{01})^2 = -4 \sin(w_{20} + w_{01})^2$$
$$= -4 \sin w_{12}{}^2.$$

Für den Coefficienten von BF erhält man:

$$-4 \sin w_{01} (\sin w_{20} \cos w_{01} + \cos w_{20} \sin w_{01}) = -4 \sin w_{01} \sin(w_{20} + w_{01})$$
$$= 4 \sin w_{01} \sin w_{12}.$$

Für den Coefficienten von CD erhält man:

$$-4\sin w_{20}(\sin w_{20}\cos w_{01}+\cos w_{20}\sin w_{01})=-4\sin w_{20}\sin(w_{20}+w_{01})$$
$$=\quad 4\sin w_{20}\sin w_{12}.$$

Für den Coefficienten von DE erhält man:

$$2\sin w_{01}(\sin w_{20}\cos w_{01}+\cos w_{20}\sin w_{01})=\quad 2\sin w_{01}\sin(w_{20}+w_{01})$$
$$=-2\sin w_{01}\sin w_{12}.$$

Für den Coefficienten von DF erhält man:

$$-2\sin w_{01}\sin w_{20}.$$

Für den Coefficienten von EF erhält man:

$$2\sin w_{20}(\sin w_{20}\cos w_{01}+\cos w_{20}\sin w_{01})=\quad 2\sin w_{20}\sin(w_{20}+w_{01})$$
$$=-2\sin w_{20}\sin w_{12}.$$

Für die Coefficienten von

$$AB,\quad AC,\quad AE$$

erhält man respective:

$$-4\sin w_{01}{}^2,\quad -4\sin w_{20}{}^2,\quad 4\sin w_{01}\sin w_{20}.$$

Also ist:

$$4(C'^2-A'B')$$
$$=\quad D^2\sin w_{01}{}^2+E^2\sin w_{12}{}^2+F^2\sin w_{20}{}^2$$
$$-4A(B\sin w_{01}{}^2+C\sin w_{20}{}^2-E\sin w_{01}\sin w_{20})$$
$$-4BC\sin w_{12}{}^2+4BF\sin w_{01}\sin w_{12}+4CD\sin w_{12}\sin w_{20}$$
$$-2DE\sin w_{01}\sin w_{12}-2DF\sin w_{01}\sin w_{20}-2EF\sin w_{12}\sin w_{20},$$

oder, wie man sogleich übersieht:

$$\begin{aligned}4(C'^2-A'B')= &\quad (D^2-4AB)\sin w_{01}{}^2\\ &+(E^2-4BC)\sin w_{12}{}^2\\ &+(F^2-4CA)\sin w_{20}{}^2\\ &-2(DE-2BF)\sin w_{01}\sin w_{12}\\ &-2(EF-2CD)\sin w_{12}\sin w_{20}\\ &-2(FD-2AE)\sin w_{20}\sin w_{01}.\end{aligned}$$

Weil es aber bei der Discussion unserer Gleichung bloss darauf ankommt, ob die Grösse

$$C'^2 - A'B'$$

kleiner als Null, gleich der Null oder grösser als Null ist, so kann man bei dieser Discussion statt der vorstehenden Grösse die Grösse

$$\begin{aligned}(D^2-4AB)\sin w_{01}{}^2 + (E^2-4BC)\sin w_{12}{}^2 + (F^2-4CA)\sin w_{20}{}^2 \\ -2(DE-2BF)\sin w_{01}\sin w_{12} \\ -2(EF-2CD)\sin w_{12}\sin w_{20} \\ -2(FD-2AE)\sin w_{20}\sin w_{01}\end{aligned}$$

setzen.

§. 4.

Wir müssen ferner die Grösse

$$D'^2 - A'F'$$

entwickeln. Weil aber

$$4(D'^2 - A'F') = (2D')^2 - 4A'F'$$

ist, so werden wir diese letztere Grösse entwickeln, indem wir hier zugleich bemerken, dass bei dieser Entwickelung im Folgenden der in allen Gliedern vorkommende stets positive und offenbar nicht verschwindende Factor $\overline{\omega}_1{}^2$ weggelassen worden ist, welches deshalb verstattet ist, weil es bloss darauf ankommt, zu wissen, ob die Grösse

$$D'^2 - A'F'$$

kleiner als Null, gleich der Null oder grösser als Null ist.

Man findet leicht, dass die Coefficienten von B^2 und BE verschwinden, und dass die Coefficienten von

$$E^2,\quad BC$$

respective

$$\sin w_{20}{}^2,\quad -4\sin w_{20}{}^2$$

sind; also ist mit Weglassung des Factors $\overline{\omega}_1{}^2$:

$$4(D'^2 - A'F') = (E^2 - 4BC)\sin w_{20}{}^2.$$

Weil es aber bloss darauf ankommt, zu wissen, ob die Grösse

$$D'^2 - A'F'$$

kleiner als Null, gleich der Null oder grösser als Null ist, so

kann man für diese Grösse, da offenbar $\sin w_{20}$ nicht verschwinden kann, die Grösse

$$E^2-4BC$$

setzen.

§. 5.

Ferner ist jetzt die Grösse

$$E'^2-B'F'$$

zu entwickeln, statt welcher wir die Grösse

$$4(E'^2-B'F')=(2E')^2-4B'F'$$

entwickeln, und dabei wieder aus denselben Gründen wie im vorhergehenden Parapraphen den in allen Gliedern vorkommenden Factor $\overline{\omega}_1{}^2$ weglassen.

Leicht finden wir, dass die Factoren von B^2, BD, BE sämmtlich verschwinden und dass die Coefficienten von

$$D^2,\quad E^2,\quad DE,\quad AB,\quad BC,\quad BF$$

respective

$$1,\quad \cos w_{20}{}^2,\quad 2\cos w_{20},\quad -4,\quad -4\cos w_{20}{}^2,\quad -4\cos w_{20}$$

sind. Also ist mit Weglassung des Factors $\overline{\omega}_1{}^2$:

$$4(E'^2-B'F')$$

$$=D^2-4AB+2(DE-2BF)\cos w_{20}+(E^2-4BC)\cos w_{20}{}^2,$$

wo man aber im Folgenden für die Grösse

$$E'^2-B'F'$$

aus bekannten Gründen die Grösse

$$D^2-4AB+2(DE-2BF)\cos w_{20}+(E^2-4BC)\cos w_{20}{}^2$$

setzen kann.

§. 6.

Wir gehen zur Entwickelung der Grösse

$$A'E'-C'D'$$

über, statt welcher wir aber die Grösse

$$4(A'E'-C'D')=2A'.2E'-2C'.2D'$$

entwickeln, indem wir dabei den in allen Gliedern vorkommenden nicht verschwindenden Factor ϖ_1 weglassen, welches deshalb verstattet ist, weil es hier bloss darauf ankommt, zu wissen, ob die Grösse

$$A'E'-C'D'$$

verschwindet oder nicht verschwindet.

Leicht finden wir, dass die Coefficienten von B^2, BD, BE, CE, DE sämmtlich verschwinden.

Als Coefficienten von BC erhalten wir:

$$4\sin w_{20}(\sin w_{20}\cos w_{01}+\cos w_{20}\sin w_{01})= \quad 4\sin w_{20}\sin(w_{20}+w_{01})$$
$$=-4\sin w_{20}\sin w_{12}.$$

Der Coefficient von CD ist

$$2\sin w_{20}{}^2.$$

Der Coefficient von BF ist

$$2\sin w_{01}\sin w_{20}.$$

Der Coefficient von EF ist

$$-\sin w_{20}{}^2.$$

Der Coefficient von E^2 ist

$$-\sin w_{20}(\sin w_{20}\cos w_{01}+\cos w_{20}\sin w_{01}=-\sin w_{20}\sin(w_{20}+w_{01})$$
$$=\quad \sin w_{20}\sin w_{12}.$$

Mit Weglassung des Factors ϖ_1 und des in allen Gliedern vorkommenden nicht verschwindenden Factors $\sin w_{20}$ ist also:

$$4(A'E'-C'D')$$

$$=2BF\sin w_{01}+(E^2-4BC)\sin w_{12}-(EF-2CD)\sin w_{20},$$

wo wir aber im Folgenden für die Grösse

$$A'E'-C'D'$$

aus bekannten Gründen die Grösse

$$2BF\sin w_{01}+(E^2-4BC)\sin w_{12}-(EF-2CD)\sin w_{20}$$

setzen.

§. 7.

Endlich kommt es nun noch auf die Entwickelung der Grösse

$$A'E'^2+B'D'^2+F'C'^2-A'B'F'-2C'D'E'$$

an, statt welcher wir die Grösse

$$4(A'E'^2+B'D'^2+F'C'^2-A'B'F'-2C'D'E')$$
$$=A'.(2E')^2+B'.(2D')^2+F'.(2C')^2-4A'B'F'$$
$$-2C'.2D'.2E'$$

entwickeln werden, wobei wir den in allen Gliedern vorkommenden positiven und nicht verschwindenden Factor $\overline{\omega}_1{}^2$ weglassen, wozu wir berechtigt sind, da es nur darauf ankommt, zu wissen, ob die Grösse

$$A'E'^2+B'D'^2+F'C'^2-A'B'F'-2C'D'E'$$

kleiner als Null, gleich der Null oder grösser als Null ist.

Durch eine zwar weitläufige, sonst aber nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegende Rechnung finden wir, dass, mit Ausnahme der

$$AE^2,\quad BF^2,\quad CD^2,\quad ABC,\quad DEF$$

enthaltenden Glieder, deren Coefficienten respective

$$\sin w_{20}{}^2,\quad \sin w_{20}{}^2,\quad \sin w_{20}{}^2,\quad -4\sin w_{20}{}^2,\quad -\sin w_{20}{}^2$$

sind, die Coefficienten sämmtlicher Glieder der Entwickelung verschwinden, und dass also, mit Weglassung des Factors $\overline{\omega}_1{}^2$:

$$4(A'E'^2+B'D'^2+F'C'^2-A'B'F'-2C'D'E')$$
$$=(AE^2+BF^2+CD^2-4ABC-DEF)\sin w_{20}{}^2$$

ist, so dass man also aus bekannten Gründen im Folgenden für die Grösse

$$A'E'^2+B'D'^2+F'C'^2-A'B'F'-2C'D'E'$$

die Grösse

$$AE^2+BF^2+CD^2-4ABC-DEF$$

setzen kann.

§. 8.

Wir wollen die folgenden Bezeichnungen einführen:

$$\mathrm{A}=B\sin w_{01}{}^2+C\sin w_{20}{}^2+E\sin w_{01}\sin w_{20},$$

$$\mathrm{B}=A+B\cos w_{01}{}^2+C\cos w_{20}{}^2+D\cos w_{01}+E\cos w_{01}\cos w_{20}+F\cos w_{20},$$

$$\mathrm{D}=2B\sin w_{01}-E\sin w_{20};$$

$$\mathrm{G} = (D^2-4AB)\sin w_{01}{}^2 + (E^2-4BC)\sin w_{12}{}^2 + (F^2-4CA)\sin w_{20}{}^2$$
$$-2(DE-2BF)\sin w_{01}\sin w_{12}$$
$$-2(EF-2CD)\sin w_{12}\sin w_{20}$$
$$-2(FD-2AE)\sin w_{20}\sin w_{01},$$

$$\mathrm{H} = AE^2+BF^2+CD^2-4ABC-DEF;$$

$$\mathrm{L} = 2BF\sin w_{01} + (E^2-4BC)\sin w_{12} - (EF-2CD)\sin w_{20},$$

$$\mathrm{M} = E^2-4BC,$$

$$\mathrm{N} = D^2-4AB+2(DE-2BF)\cos w_{20} + (E^2-4BC)\cos w_{20}{}^2.$$

Dann erhalten wir zur Discussion der Gleichung

$$Ap_0{}^2+Bp_1{}^2+Cp_2{}^2+Dp_0p_1+Ep_1p_2+Fp_2p_0=0$$

nach der Abhandlung Nr. XXVIII. §. 4. die folgenden Kriterien:

I. $\mathrm{G} < 0$.

1. . . . . $\mathrm{A} > 0$, $\mathrm{B} > 0$

a. . . . . $\mathrm{H} > 0$

Ellipse.

b. . . . . $\mathrm{H} < 0$

Imaginär.

c. . . . . $\mathrm{H} = 0$

Ein Punkt.

2. . . . . $\mathrm{A} < 0$, $\mathrm{B} < 0$

a. . . . . $\mathrm{H} < 0$

Ellipse.

b. . . . . $\mathrm{H} > 0$

Imaginär.

c. . . . . $\mathrm{H} = 0$

Ein Punkt.

II. $\mathrm{G} > 0$

1 . . . . $\mathrm{H} \gtrless 0$

Hyperbel.

2. . . . . $H = 0$

Zwei sich schneidende Gerade.

III. $G = 0$

Parabel
im Allgemeinen,

mit den folgenden Ausnahmefällen, die in allen Fällen zuerst untersucht werden müssen, indem nur erst dann, wenn keiner dieser Ausnahmefälle Statt findet, sicher auf eine Parabel geschlossen werden kann.

1. A und B verschwinden beide.

Eine Gerade.

2. A und B verschwinden nicht beide.

a. . . . . $A \gtrless 0,\quad L = 0$

aa. . . . . $M > 0$

Zwei einander parallele Gerade.

bb. . . . . $M = 0$

Eine Gerade.

cc. . . . . $M < 0$

Imaginär.

Wenn $B = 0$ ist, stehen die Geraden auf der ersten Axe des trilinearen Systems senkrecht.

b. . . . . $A = 0,\quad B \gtrless 0,\quad D = 0$

aa. . . . . $N > 0$

Zwei einander parallele Gerade.

bb. . . . . $N = 0$

Eine Gerade.

cc. . . . . $N < 0$

Imaginär.

Die Geraden sind der ersten Axe des trilinearen Systems parallel.

Anmerkung.

Es ist hier für jetzt keineswegs meine Absicht, diesen Gegenstand weiter auszuführen, viel weniger denselben vollständig zu erschöpfen; jedoch will ich nicht unterlassen, zu bemerken, dass verschiedene der obigen Bedingungen sich auf andere Ausdrücke bringen lassen, was nur durch das folgende Beispiel erläutert werden mag.

Wenn

$$\mathrm{G} = 4(C'^2 - A'B') = 4(C'^2 - \mathrm{AB}) < 0$$

ist, so kann nur entweder

$$\mathrm{A} > 0,\quad \mathrm{B} > 0 \quad \text{oder} \quad \mathrm{A} < 0,\quad \mathrm{B} < 0$$

sein. Wenn nun

$$\mathrm{A} > 0,\quad \mathrm{B} > 0 \quad \text{oder} \quad \mathrm{A} < 0,\quad \mathrm{B} < 0$$

ist, so ist beziehungsweise

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} > 0 \quad \text{oder} \quad \mathrm{A} + \mathrm{B} < 0;$$

und weil in diesem Falle nur

$$\mathrm{A} > 0,\quad \mathrm{B} > 0 \quad \text{oder} \quad \mathrm{A} < 0,\quad \mathrm{B} < 0$$

sein kann, so ist auch umgekehrt, wenn

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} > 0 \quad \text{oder} \quad \mathrm{A} + \mathrm{B} < 0$$

ist, beziehungsweise

$$\mathrm{A} > 0,\quad \mathrm{B} > 0 \quad \text{oder} \quad \mathrm{A} < 0,\quad \mathrm{B} < 0.$$

Daher kann man die obigen Bedingungen:

I. 1. . . . . $\mathrm{G} < 0,\quad \mathrm{A} > 0,\quad \mathrm{B} > 0;$

I. 2. . . . . $\mathrm{G} < 0,\quad \mathrm{A} < 0,\quad \mathrm{B} < 0$

auch beziehungsweise auf folgende Art ausdrücken:

I. 1. . . . . $\mathrm{G} < 0,\quad \mathrm{A} + \mathrm{B} > 0;$

I. 2. . . . . $\mathrm{G} < 0,\quad \mathrm{A} + \mathrm{B} < 0;$

wo, wie man leicht findet:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = A + B + C + D\cos w_{01} + E\cos w_{12} + F\cos w_{20}$$

ist.

Statt der Winkel w_{01}, w_{12}, w_{20} kann man auch andere Elemente des dem Coordinatensysteme zu Grunde gelegten Dreiecks*) einführen; jedoch scheint mir der Gebrauch dieser Winkel, auch der in den folgenden Paragraphen noch zu entwickelnden Formeln wegen, sich besonders zu empfehlen.

Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes behalte ich mir für spätere Abhandlungen vor.

---

§. 9.

Nehmen wir, um ein Beispiel zu betrachten, an, dass

$$B=0,\quad D=0,\quad E=0,\quad F=0$$

sei, so ist nach dem Obigen:

$$\mathrm{A}=C\sin w_{20}{}^2,$$

$$\mathrm{B}=A+C\cos w_{20}{}^2,$$

$$\mathrm{D}=0;$$

$$\mathrm{G}=-4CA\sin w_{20}{}^2,$$

$$\mathrm{H}=0;$$

$$\mathrm{L}=0,\quad \mathrm{M}=0,\quad \mathrm{N}=0.$$

Nehmen wir nun an, dass A und C nicht verschwinden und entgegengesetzte Vorzeichen haben, so ist

$$\mathrm{G}>0.$$

Also haben wir den Fall

$$\mathrm{G}>0,\quad \mathrm{H}=0,$$

nämlich den Fall II. 2., und nach dem Obigen stellt also die Gleichung

$$Ap_0{}^2+Bp_1{}^2+Cp_2{}^2+Dp_0p_1+Ep_1p_2+Fp_2p_0=0$$

zwei sich schneidende Gerade dar.

Unter den gemachten Voraussetzungen wird aber diese Gleichung:

$$Ap_0{}^2+Cp_2{}^2=0,$$

*) Triangle of reference. — Triangle de référence.

und da nun A und C nicht verschwinden, so können wir setzen:

$$p_2^2 = -\frac{A}{C}p_0^2,$$

also:

$$p_2^2 = \frac{-A}{C}p_0^2 \quad \text{oder} \quad p_2^2 = \frac{A}{-C}p_0^2,$$

$$p_2 = \pm\frac{\sqrt{-A}}{\sqrt{C}}p_0 \quad \text{oder} \quad p_2 = \pm\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{-C}}p_0,$$

$$\sqrt{-A}.p_0 \mp \sqrt{C}.p_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \sqrt{A}.p_0 \mp \sqrt{-C}.p_2 = 0,$$

jenachdem A oder C negativ ist, welche Gleichungen in beiden Fällen zwei sich schneidenden Geraden entsprechen, wie wir oben aus unseren allgemeinen Kriterien ableiteten.

Um einen anderen besonderen Fall zu betrachten, wollen wir annehmen, dass

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0$$

sei. Dann ist nach dem Obigen:

$$\mathrm{A} = -E\sin w_{01}\sin w_{20},$$

$$\mathrm{B} = (E\cos w_{01} + F)\cos w_{20};$$

$$\mathrm{G} = (E\sin w_{12} - F\sin w_{20})^2,$$

$$\mathrm{H} = 0;$$

$$\mathrm{L} = E(E\sin w_{12} - F\sin w_{20}),$$

$$\mathrm{M} = E^2,$$

$$\mathrm{N} = E^2\cos w_{20}^2.$$

Wenn nun die Grösse

$$E\sin w_{12} - F\sin w_{20}$$

nicht verschwindet, so ist:

$$\mathrm{G} > 0, \quad \mathrm{H} = 0$$

und wir haben also wieder den Fall II. 2., nämlich den Fall zweier sich schneidender Geraden. Weil in diesem Falle die gegebene Gleichung die Form

$$Ep_1p_2 + Fp_2p_0 = 0 \quad \text{oder} \quad (Ep_1 + Fp_0)p_2 = 0$$

erhält, so stellt dieselbe wirklich die beiden durch die Gleichungen

$$Fp_0 + Ep_1 = 0 \quad \text{und} \quad p_2 = 0$$

charakterisirten Geraden vor.

Wenn die Grösse

$$E \sin w_{12} - F \sin w_{20}$$

verschwindet und E als nicht verschwindend angenommen wird, so ist nach dem Obigen offenbar:

$$G = 0, \quad A \gtrless 0, \quad L = 0, \quad M > 0;$$

welches der Fall III. 2. a. aa. ist, so dass also unsere Gleichung zwei einander parallele Gerade darstellt, welche durch die Gleichungen

$$Fp_0 + Ep_1 = 0, \quad p_2 = 0$$

charakterisirt werden, wo sich nun frägt, ob diese beiden Geraden einander wirklich parallel sind. Weil aber

$$E \sin w_{12} - F \sin w_{20} = 0$$

ist, so wird die erste der beiden vorstehenden Gleichungen, weil hieraus

$$F = \frac{\sin w_{12}}{\sin w_{20}} E$$

folgt und nach der Voraussetzung E nicht verschwindet, offenbar:

$$\frac{\sin w_{12}}{\sin w_{20}} p_0 + p_1 = 0,$$

also:

$$p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} = 0;$$

und da nun bekanntlich (Thl. XXXVIII. S. 406.):

$$p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01} = J$$

ist, so wird die Gleichung der ersten Geraden:

$$p_2 \sin w_{01} = J, \quad \text{also} \quad p_2 = \frac{J}{\sin w_{01}}.$$

Daher sind die Gleichungen unserer beiden Geraden:

$$p_2 = \frac{J}{\sin w_{01}}, \quad p_2 = 0;$$

und diese Geraden sind folglich beide mit der dritten Axe des trilinearen Systems, also auch in der That einander selbst parallel, wie wir oben schon fanden. Die zweite dieser beiden Parallelen ist natürlich die dritte Axe des trilinearen Systems selbst.

In ähnlicher Weise wird man mittelst unserer obigen Kriterien immer ganz sicher entscheiden können, welches die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$Ap_0^2+Bp_1^2+Cp_2^2+Dp_0p_1+Ep_1p_2+Fp_2p_0=0$$

ist.

§. 10.

Aus §. 2. erhält man auf der Stelle, wie auch schon in §. 8. Anmerkung. bemerkt worden ist:

$$A'+B'=A+B+C+D\cos w_{01}+E\cos w_{12}+F\cos w_{20}$$

und:

$$A'-B'=-A-B\cos 2w_{01}-C\cos 2w_{20}-D\cos w_{01}$$
$$-E\cos(w_{20}-w_{01})-F\cos w_{20}.$$

Besonders wollen wir nun die Grösse

$$(A'-B')^2+4C'^2$$

entwickeln, und hier von dieser Entwickelung so viel angeben, als erforderlich ist, um dieselbe leicht wiederholen und sich von ihrer Richtigkeit überzeugen zu können.

Der Coefficient von A^2 ist 1.

Der Coefficient von B^2 ist:

$$\cos 2w_{01}{}^2+4\sin w_{01}{}^2\cos w_{01}{}^2=\cos 2w_{01}{}^2+\sin 2w_{01}{}^2=1.$$

Der Coefficient von C^2 ist:

$$\cos 2w_{20}{}^2+4\sin w_{20}{}^2\cos w_{20}{}^2=\cos 2w_{20}{}^2+\sin w_{20}{}^2=1.$$

Der Coefficient von D^2 ist:

$$\cos w_{01}{}^2+\sin w_{01}{}^2=1.$$

Der Coefficient von E^2 ist:

$$\cos(w_{20}-w_{01})^2+\sin(w_{20}-w_{01})^2=1.$$

Der Coefficient von F^2 ist:

$$\cos w_{20}{}^2+\sin w_{20}{}^2=1.$$

Die Coefficienten von

$$2AB,\quad 2AC,\quad 2AD,\quad 2AE,\quad 2AF$$

sind beziehungsweise:

$\cos 2w_{01}$, $\cos 2w_{20}$, $\cos w_{01}$, $\cos(w_{20}-w_{01})$, $\cos w_{20}$.

Der Coefficient von $2BC$ ist:

$$\cos 2w_{01}\cos 2w_{20}-4\sin w_{01}\cos w_{01}\sin w_{20}\cos w_{20}$$
$$=\cos 2w_{20}\cos 2w_{01}-\sin 2w_{20}\sin 2w_{01}$$
$$=\cos 2(w_{20}+w_{01})=\cos(w_{20}+w_{01})^2-\sin(w_{20}+w_{01})^2$$
$$=\cos w_{12}{}^2-\sin w_{12}{}^2=\cos 2w_{12}.$$

Der Coefficient von $2BD$ ist:

$$\cos 2w_{01}\cos w_{01}+2\sin w_{01}{}^2\cos w_{01}=\cos w_{01}\,(\cos w_{01}{}^2+\sin w_{01})^2$$
$$=\cos w_{01}.$$

Der Coefficient von $2BE$ ist:

$$\cos 2w_{01}\cos(w_{20}-w_{01})-2\sin w_{01}\cos w_{01}\sin(w_{20}-w_{01})$$
$$=\cos 2w_{01}\cos(w_{20}-w_{01})-\sin 2w_{01}\sin(w_{20}-w_{01})$$
$$=\cos(w_{20}+w_{01})=\cos w_{12}.$$

Der Coefficient von $2BF$ ist:

$$\cos 2w_{01}\cos w_{20}-2\sin w_{01}\cos w_{01}\sin w_{20}$$
$$=\cos 2w_{01}\cos w_{20}-\sin 2w_{01}\sin w_{20}=\cos(w_{20}+2w_{01})$$
$$=\cos(w_{20}+w_{01})\cos w_{01}-\sin(w_{20}+w_{01})\sin w_{01}$$
$$=\cos w_{01}\cos w_{12}+\sin w_{01}\sin w_{12}=\cos(w_{01}-w_{12}).$$

Der Coefficient von $2CD$ ist:

$$\cos 2w_{20}\cos w_{01}-2\sin w_{01}\sin w_{20}\cos w_{20}$$
$$=\cos 2w_{20}\cos w_{01}-\sin 2w_{20}\sin w_{01}$$
$$=\cos(2w_{20}+w_{01})=\cos w_{20}\cos(w_{20}+w_{01})-\sin w_{20}\sin(w_{20}+w_{01})$$
$$=\cos w_{20}\cos w_{12}+\sin w_{20}\sin w_{12}=\cos(w_{12}-w_{20}).$$

Der Coefficient von $2CE$ ist:

$$\cos 2w_{20}\cos(w_{20}-w_{01})+2\sin w_{20}\cos w_{20}\sin(w_{20}-w_{01})$$
$$=\cos 2w_{20}\cos(w_{20}-w_{01})+\sin 2w_{20}\sin(w_{20}-w_{01})$$
$$=\cos(w_{20}+w_{01})=\cos w_{12}.$$

Der Coefficient von $2CF$ ist:

$$\cos 2w_{20} \cos w_{20} + 2 \sin w_{20}^2 \cos w_{20} = (\cos w_{20}^2 + \sin w_{20}^2) \cos w_{20}$$
$$= \cos w_{20}.$$

Der Coefficient von $2DE$ ist:

$$\cos w_{01} \cos (w_{20} - w_{01}) - \sin w_{01} \sin (w_{20} - w_{01}) = \cos w_{20}.$$

Der Coefficient von $2DF$ ist:

$$\cos w_{01} \cos w_{20} - \sin w_{01} \sin w_{20} = \cos (w_{20} + w_{01}) = \cos w_{12}.$$

Der Coefficient von $2EF$ ist:

$$\cos w_{20} \cos (w_{20} - w_{01}) + \sin w_{20} \sin (w_{20} - w_{01}) = \cos w_{01}.$$

Also ist:

$$\begin{aligned} &(A' - B')^2 + 4C'^2 \\ = \quad & A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \\ & + 2AB \cos 2w_{01} + 2AC \cos 2w_{20} + 2AD \cos w_{01} + 2AE \cos (w_{20} - w_{01}) \\ & \qquad + 2AF \cos w_{20} \\ & + 2BC \cos 2w_{12} + 2BD \cos w_{01} + 2BE \cos w_{12} + 2BF \cos (w_{01} - w_{12}) \\ & \qquad + 2CD \cos (w_{12} - w_{20}) + 2CE \cos w_{12} + 2CF \cos w_{20} \\ & \qquad + 2DE \cos w_{20} + 2DF \cos w_{12} \\ & \qquad + 2EF \cos w_{01} \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} &(A' - B')^2 + 4C'^2 \\ = \quad & A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \\ & + 2\{(A + B) D + EF\} \cos w_{01} + 2\{(B + C) E + FD\} \cos w_{12} \\ & \qquad + 2\{(C + A) F + DE\} \cos w_{20} \\ & + 2AB \cos 2w_{01} + 2BC \cos 2w_{12} + 2CA \cos 2w_{20} \\ & + 2BF \cos (w_{01} - w_{12}) + 2CD \cos (w_{12} - w_{20}) + 2AE \cos (w_{20} - w_{01}). \end{aligned}$$

§. 11.

In der Abhandlung Nr. XXVIII. §. 4. ist gezeigt worden, dass in den Fällen, wo die Curve eine Ellipse ist (m. s. §. 8.), die Bedingungsgleichung, dass dieselbe in einen Kreis übergeht, die folgende ist:

$$(A' - B')^2 + 4C'^2 = 0,$$

welche Gleichung man auch in die beiden Bedingungsgleichungen:

$$A' - B' = 0, \quad C' = 0$$

zerlegen kann. Also ist nach dem vorhergehenden Paragraphen die Bedingungsgleichung, dass die Ellipse in einen Kreis übergeht, im trilinearen Coordinatensysteme die folgende:

$$\begin{aligned}
&A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \\
&+ 2\{(A+B)D + EF\}\cos w_{01} + 2\{(B+C)E + FD\}\cos w_{12} \\
&\qquad + 2\{(C+A)F + DE\}\cos w_{20} \\
&+ 2AB\cos 2w_{01} + 2BC\cos 2w_{12} + 2CA\cos 2w_{20} \\
&+ 2BF\cos(w_{01} - w_{12}) + 2CD\cos(w_{12} - w_{20}) + 2AE\cos(w_{20} - w_{01}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

welche eine Gleichung auch durch die beiden Bedingungsgleichungen:

$$A + B\cos 2w_{01} + C\cos 2w_{20} + D\cos w_{01} + E\cos(w_{20} - w_{01}) + F\cos w_{20} = 0,$$

$$B\sin 2w_{01} - C\sin 2w_{20} + D\sin w_{01} - E\sin(w_{20} - w_{01}) - F\sin w_{20} = 0$$

ersetzt werden kann.

Ferner ist in der Abhandlung Nr. XXVIII. §. 4. gezeigt worden, dass in den Fällen, wo die Curve eine Hyperbel ist (m. s. §. 8.), die Bedingungsgleichung, dass diese Hyperbel eine gleichseitige Hyperbel ist, die folgende ist:

$$A' + B' = 0,$$

und diese Bedingungsgleichung ist also im trilinearen Coordinatensysteme nach dem vorhergehenden Paragraphen die folgende:

$$A + B + C + D\cos w_{01} + E\cos w_{12} + F\cos w_{20} = 0.$$

§. 12.

Für den Fall der Ellipse und Hyperbel wollen wir nun die Coordinaten des Mittelpunkts dieser Curven entwickeln.

Zu dem Ende entwickeln wir die Grösse:

$$\frac{4(A'E' - C'D')}{\overline{\omega}_1} = 2A' \cdot \frac{2E'}{\overline{\omega}_1} - 2C' \cdot \frac{2D'}{\overline{\omega}_1},$$

wodurch wir Folgendes finden.

Die Coefficienten von B^2, BD, BE, CE sind sämmtlich Null.

Der Coefficient von $4BC$ ist:

$$\cos w_{01} \sin w_{20}{}^2 + \sin w_{01} \sin w_{20} \cos w_{20}$$
$$= \sin w_{20} (\sin w_{20} \cos w_{01} + \cos w_{20} \sin w_{01})$$
$$= \sin w_{20} \sin (w_{20} + w_{01}) = - \sin w_{12} \sin w_{20}.$$

Der Coefficient von $2BF$ ist:

$$\sin w_{01} \sin w_{20}.$$

Der Coefficient von $2CD$ ist:

$$\sin w_{20}{}^2.$$

Der Coefficient von DE ist:

$$-\sin w_{01} \sin w_{20}.$$

Der Coefficient von E^2 ist:

$$-2 \sin w_{01} \sin w_{20} \cos w_{20} - \sin w_{20} \sin (w_{20} - w_{01})$$
$$= - \sin w_{20} (\sin w_{20} \cos w_{01} + \cos w_{20} \sin w_{01})$$
$$= - \sin w_{20} \sin (w_{20} + w_{01}) = \sin w_{12} \sin w_{20}.$$

Der Coefficient von EF ist:

$$-\sin w_{20}{}^2.$$

Also ist:

$$\frac{4(A'E' - C'D')}{\overline{\omega}_1}$$
$$= \{(2BF - DE) \sin w_{01} + (E^2 - 4BC) \sin w_{12} + (2CD - EF) \sin w_{20}\} \sin w_{20}$$

und folglich:

$$4(A'E' - C'D')$$
$$= \{(2BF - DE) \sin w_{01} + (E^2 - 4BC) \sin w_{12} + (2CD - EF) \sin w_{20}\} . \overline{\omega}_1 \sin w_{20},$$

also, weil unter den gemachten Voraussetzungen, nach denen $\overline{\omega}_0 = 0$ und $\overline{\omega}_2 = 0$ ist:

$$J = \overline{\omega}_1 \sin w_{20}$$

ist:

$$4(A'E' - C'D')$$
$$= \{(2BF - DE) \sin w_{01} + (E^2 - 4BC) \sin w_{12} + (2CD - EF) \sin w_{20}\} . J.$$

Bezeichnen wir nun die erste Dreilinien-Coordinate des Mittelpunkts der Ellipse oder Hyperbel durch P_0, so ist oben nach §. 2. und der Abhandlung Nr. XXVIII. §. 2. offenbar:

$$P_0 = \frac{A'E' - C'D'}{C'^2 - A'B'},$$

oder:

$$P_0 = \frac{4(A'E' - C'D')}{4(C'^2 - A'B')},$$

und folglich, weil nach §. 3. und §. 8.:

$$4(C'^2 - A'B') = G$$

ist, nach dem Obigen offenbar:

$$GP_0 = \{(2BF - DE)\sin w_{01} + (E^2 - 4BC)\sin w_{12} + (2CD - EF)\sin w_{20}\}.J.$$

Bezeichnen aber P_1, P_2 die beiden anderen Dreilinien-Coordinaten des Mittelpunkts der Ellipse oder Hyperbel, so erhält man durch blosse Vertauschung der Buchstaben überhaupt die folgenden merkwürdigen Formeln:

$$GP_0 = \{(2BF - DE)\sin w_{01} + (E^2 - 4BC)\sin w_{12} + (2CD - EF)\sin w_{20}\}.J,$$

$$GP_1 = \{(2CD - EF)\sin w_{12} + (F^2 - 4CA)\sin w_{20} + (2AE - FD)\sin w_{01}\}.J,$$

$$GP_2 = \{(2AE - FD)\sin w_{20} + (D^2 - 4AB)\sin w_{01} + (2BF - DE)\sin w_{12}\}.J$$

oder:

$$GP_0 = \{(2BF - DE)\sin w_{01} + (E^2 - 4BC)\sin w_{12} + (2CD - EF)\sin w_{20}\}.J,$$

$$GP_1 = \{(2AE - FD)\sin w_{01} + (2CD - EF)\sin w_{12} + (F^2 - 4CA)\sin w_{20}\}.J,$$

$$GP_2 = \{(D^2 - 4AB)\sin w_{01} + (2BF - DE)\sin w_{12} + (2AE - FD)\sin w_{20}\}.J.$$

§. 13.

Nach der Abhandlung Nr. XXVIII. §. 6. sind in den dort gebrauchten Zeichen die absoluten Werthe von

$$\frac{\Omega}{P} \quad \text{und} \quad \frac{\Omega}{Q}$$

die Quadrate der Halbaxen der Ellipse und Hyperbel. Nach den Formeln 19) und 17) in §. 2. der genannten Abhandlung ist in unseren hiesigen Zeichen:

$$\Omega = \frac{A'E'^2 + B'D'^2 + F'C'^2 - A'B'F' - 2C'D'E'}{C'^2 - A'B'},$$

und für das rechtwinklige Coordinatensystem, also für $\alpha = 90^0$ a. a. O.

$$2P = A' + B' \mp \sqrt{(A'-B')^2 + 4C'^2},$$

$$2Q = A' + B' \pm \sqrt{(A'-B')^2 + 4C'^2};$$

daher nach §. 3., §. 7. und §. 8. in den oben eingeführten Zeichen:

$$\Omega = \frac{4(A'E'^2 + B'D'^2 + F'C'^2 - A'B'F' - 2C'D'E')}{4(C'^2 - A'B')}$$

$$= \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{G}} \overline{\omega}_1{}^2 \sin w_{20}{}^2 = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{G}} J^2,$$

weil bekanntlich unter den gemachten Voraussetzungen

$$J = \overline{\omega}_1 \sin w_{20}$$

ist; und wenn wir jetzt der Kürze wegen noch:

$$\mathrm{V} = A' + B'$$

$$= A + B + C + D\cos w_{01} + E\cos w_{12} + F\cos w_{20},$$

$$\mathrm{W}^2 = (A' - B')^2 + 4C'^2$$

$$= A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2$$

$$+ 2\{(A+B)D + EF\}\cos w_{01} + 2\{(B+C)E + FD\}\cos w_{12} + 2\{(C+A)F + DE\}\cos w_{20}$$

$$+ 2AB\cos 2w_{01} + 2BC\cos 2w_{12} + 2CA\cos 2w_{20}$$

$$+ 2BF\cos(w_{01} - w_{12}) + 2CD\cos(w_{12} - w_{20}) + 2AE\cos(w_{20} - w_{01})$$

setzen:

$$2P = \mathrm{V} \mp \mathrm{W}, \quad 2Q = \mathrm{V} \pm \mathrm{W}.$$

Also sind die Quadrate der beiden Halbaxen die absoluten Werthe von:

$$\frac{2\mathrm{H}J^2}{\mathrm{G}(\mathrm{V} \mp \mathrm{W})}, \quad \frac{2\mathrm{H}J^2}{\mathrm{G}(\mathrm{V} \pm \mathrm{W})};$$

und man kann also offenbar sagen, dass die Quadrate der Halbaxen überhaupt die absoluten Werthe der beiden durch den Ausdruck

$$\frac{2HJ^2}{G(V\mp W)}$$

dargestellten Grössen sind, wo man für

$$G,\quad H,\quad J,\quad V,\quad W$$

ihre aus unseren früheren Entwickelungen vollständig bekannten Ausdrücke zu setzen hat.

Das Product der Quadrate der beiden Halbaxen ist hiernach der absolute Werth von

$$\frac{2HJ^2}{G(V-W)}\cdot\frac{2HJ^2}{G(V+W)}=\frac{4H^2J^4}{G^2(V^2-W^2)}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen:

$$V^2-W^2=(A'+B')^2-\{(A'-B')^2+4C'^2\}=4(A'B'-C'^2)$$
$$=-G;$$

also ist das Product der Quadrate der beiden Halbaxen der absolute Werth der Grösse

$$\frac{4H^2J^4}{G^3}.$$

Im Falle der Ellipse haben nach der Abhandlung Nr. XXVIII. §. 2. I. die Grössen P, Q, und nach dem Obigen folglich auch die Grössen $V\mp W$, gleiche Vorzeichen; also haben auch die beiden Grössen

$$\frac{2HJ^2}{G(V\mp W)}$$

gleiche Vorzeichen, und es ist folglich offenbar die Summe der Quadrate der beiden Halbaxen der absolute Werth der Summe:

$$\frac{2HJ^2}{G(V-W)}+\frac{2HJ^2}{G(V+W)}=\frac{4HVJ^2}{G(V^2-W^2)},$$

also nach dem Obigen der absolute Werth der Grösse:

$$\frac{4HVJ^2}{G^2};$$

der absolute Werth der Differenz der Quadrate der beiden Halbaxen ist der absolute Werth der Differenz:

$$\frac{2HJ^2}{G(V-W)}-\frac{2HJ^2}{G(V+W)}=\frac{4HWJ^2}{G(V^2-W^2)};$$

also nach dem Obigen der absolute Werth der Grösse:

$$\frac{4HWJ^2}{G^2}.$$

Im Falle der Hyperbel haben nach der Abhandlung Nr. XXVIII. §. 2. II. die Grössen P, Q, und nach dem Obigen folglich auch die Grössen $V\mp W$, ungleiche Vorzeichen; also haben auch die beiden Grössen

$$\frac{2HJ^2}{G(V\mp W)}$$

ungleiche Vorzeichen, und es ist folglich offenbar die Summe der Quadrate der beiden Halbaxen der absolute Werth der Differenz:

$$\frac{2HJ^2}{G(V-W)}-\frac{2HJ^2}{G(V+W)}=\frac{4HWJ^2}{G(V^2-W^2)},$$

also nach dem Obigen der absolute Werth der Grösse:

$$\frac{4HWJ^2}{G^2};$$

der absolute Werth der Differenz der Quadrate der beiden Halbaxen ist der absolute Werth der Summe:

$$\frac{2HJ^2}{G(V-W)}+\frac{2HJ^2}{G(V+W)}=\frac{4HVJ^2}{G(V^2-W^2)},$$

also nach dem Obigen der absolute Werth der Grösse:

$$\frac{4HVJ^2}{G^2}.$$

Ich will diese Entwickelungen, welche zu den obigen bemerkenswerthen Ergebnissen geführt haben, jetzt um so weniger weiter verfolgen, weil in der vorliegenden Abhandlung und in der Abhandlung Nr. XXVIII. Alles enthalten und gegeben ist, was zur vollständigen Erledigung jeder hier zur Sprache kommen könnenden Frage nur irgend nothwendig sein dürfte. Später hoffe ich jedoch auf diesen Gegenstand noch zurückzukommen. Handelt es sich — um hier nur noch eines Falles kurz zu gedenken — etwa im Falle der Parabel um deren Parameter*), so ist nach

---

*) Ich meine hier den eigentlichen Parameter der Parabel, nämlich den Parameter in Bezug auf ihre Axe.

der genannten Abhandlung §. 6., mit Rücksicht auf die Formel 48) für $\alpha = 90^0$ — wie es hier erforderlich ist — der halbe Parameter in unseren obigen Zeichen der absolute Werth der Grösse:

$$\frac{D'\sqrt{B'} - E'\sqrt{A'}}{(A' + B')\sqrt{A' + B'}},$$

oder der Grösse:

$$\frac{D'\sqrt{\mathrm{B}} - E'\sqrt{\mathrm{A}}}{(\mathrm{A} + \mathrm{B})\sqrt{\mathrm{A} + \mathrm{B}}};$$

wo es im vorliegenden Falle, in welchem A', B' oder A, B nothwendig gleiche Vorzeichen haben, offenbar immer verstattet ist, anzunehmen, dass diese Grössen beide positiv sind, wie aus den Ausdrücken von A', B' in §. 2. oder von A, B in §. 8., mit Rücksicht auf die Gleichung

$$Ap_0^2 + Bp_1^2 + Cp_2^2 + Dp_0p_1 + Ep_1p_2 + Fp_2p_0 = 0$$

sogleich erhellet. Bekanntlich ist

$$A' + B' = \mathrm{A} + \mathrm{B}$$
$$= A + B + C + D\cos w_{01} + E\cos w_{12} + F\cos w_{20}.$$

Ich habe dies hier nur noch bemerkt, um recht deutlich zu zeigen, dass in der That die genannte Abhandlung Alles enthält, was zur vollständigen Erledigung dieses Gegenstandes nur irgend erforderlich sein möchte.

XXX.

Theorie des Tetraeders aus den sechs Kanten.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien.

(Fig. s. Taf. VI.)

Der von Lagrange entwickelte Ausdruck für das Volumen des Tetraeders durch die sechs Kanten, jener von Carnot für dasselbe Volumen durch zwei Gegenkanten, ihren kleinsten Abstand und Kreuzungswinkel und die von Crelle gegebene Darstellung des Radius der umschriebenen Kugel, gehören vermöge ihrer symmetrischen Form oder der Klarheit ihres Beziehungsgesetzes zu den schönsten Relationen der räumlichen Geometrie.

Diese auf sehr verschiedenen nicht kurzen Wegen erlangten Resultate aus wenigen Betrachtungen abzuleiten und auch die übrigen Elemente des Tetraeders durch Gleichungen von derselben Einfachheit darzustellen ist der Zweck der folgenden Untersuchung. Dieser Zweck wurde erreicht durch die Einführung der Winkel, unter welchen sich die den Seitenflächen umschriebenen Kreise schneiden und durch Anwendung des Parallelopipeds, dessen Parallelebenen durch die Gegenkanten des Tetraeders gehen.

Hierbei ergaben sich einige neue räumliche Gesetze unter den Elementen der dreiseitigen Pyramide, welche für die Kenntniss dieses Körpers von Wichtigkeit sind.

Wir bezeichnen in der dreiseitigen Pyramide 1 2 3 4 (Fig. 1.) die drei Paare sich kreuzender Gegenkanten durch a, a', b, b', c, c', so dass die Kanten a, b, c die Seitenfläche 2 3 4 formiren, während jene a', b', c' in der Gegenecke 1 zusammenlaufen. Die Flächenwinkel, deren Scheitel der Ordnung nach in den Kanten a, a', b, b', c, c' liegen, seien A, A', B, B', C, C'; die Rauminhalte der Seitenflächen, so wie sie den Ecken 1, 2, 3, 4 gegenüberliegen, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, und die Radien ihrer umschriebenen Kreise r_1, r_2, r_3, r_4. Es ist also

$$\Delta_1 = \Delta(234), \quad A = \angle\, \Delta_1 \Delta_2, \quad A' = \angle\, \Delta_3 \Delta_4,$$

$$\Delta_2 = \Delta(134), \quad B = \angle\, \Delta_1 \Delta_3, \quad B' = \angle\, \Delta_2 \Delta_4,$$

$$\Delta_3 = \Delta(124), \quad C = \angle\, \Delta_1 \Delta_4, \quad C' = \angle\, \Delta_2 \Delta_3.$$

$$\Delta_4 = \Delta(123),$$

Fällt man von der Ecke 1 auf die gegenüberliegende Seitenfläche Δ_1 die Senkrechte $1D$ und legt durch diese eine Ebene senkrecht zur Kante 3 4, welche die Seitenflächen Δ_1, Δ_2 in den Geraden DE und $1E$ schneidet, so ist der Winkel bei E in dem rechtwinkeligen Dreieck $1DE$ dem Flächenwinkel A oder $180^0 - A$ gleich, jenachdem das Perpendikel $1D$ innerhalb oder ausserhalb der Pyramide liegt; in jedem Falle ist

$$\overline{1D} = \overline{1E} \,.\, \sin A,$$

und wenn T den Rauminhalt der Pyramide bezeichnet:

$$T = \tfrac{1}{3}\Delta_1 \,.\, \overline{1E} \,.\, \sin A \quad \text{oder} \quad \sin A = \frac{3T}{\overline{1E}\,.\,\Delta_1}.$$

Da $\overline{1E}$ als die Höhe des Dreiecks Δ_2 gleich $\frac{2\Delta_2}{a}$ ist, so kann man auch schreiben:

$$\sin A = \frac{3a}{2\Delta_1\Delta_2} T,$$

wodurch der Flächenwinkel A aus den Bestimmungsstücken der Pyramide dargestellt wird. Das in dieser Formel ausgesprochene Gesetz der Abhängigkeit des Flächenwinkels A von jenen Bestimmungsstücken gestattet nun auch die Aufstellung der den übrigen Flächenwinkeln entsprechenden Ausdrücke:

$$(1)\ldots\left\{\begin{array}{lll}\sin A = \dfrac{3a}{2\Delta_1\Delta_2} T, & \sin B = \dfrac{3b}{2\Delta_1\Delta_3} T, & \sin C = \dfrac{3c}{2\Delta_1\Delta_4} T;\\[2ex] \sin A' = \dfrac{3a'}{2\Delta_3\Delta_4} T, & \sin B' = \dfrac{3b'}{2\Delta_2\Delta_4} T, & \sin C' = \dfrac{3c'}{2\Delta_2\Delta_3} T;\end{array}\right.$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$(2) \quad \ldots \ldots \frac{\sin A \sin A'}{a a'} = \frac{\sin B \sin B'}{b b'} = \frac{\sin C \sin C'}{c c'} = \frac{9 T^2}{4 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4},$$

welche Gleichungen dem Sinussatze des planen Dreieckes entsprechen.

Ist O der Mittelpunkt der dem Tetraeder umschriebenen Kugel vom Radius R, also

$$O1 = O2 = O3 = O4 = R,$$

so sind die Fusspunkte O_1, O_2 der aus demselben auf die Seitenflächen Δ_1, Δ_2 gefällten Senkrechten die Mittelpunkte der den letzteren umschriebenen Kreise. $O_1 4 = r_1$, $O_2 4 = r_2$.

Die zwölf Neigungswinkel der vier Radien $O1$, $O2$, $O3$, $O4$ zu den Seitenflächen sind je drei einander gleich, so wie sie zu derselben Seitenfläche gehören, und wir bezeichnen sie in der Ordnung der letzteren durch ω_1, ω_2, ω_3, ω_4.

Die durch OO_1, OO_2 geführte Ebene OO_1O_2A steht senkrecht auf der Kante a, geht durch die Mitte derselben und der Winkel bei A ist dem Flächenwinkel dieser Kante gleich.

Die bei O_1 und O_2 entstandenen Winkel x' und x'' sind den Dreieckswinkeln bei 2 und 1 gleich.

Legen wir im Punkte 4 an die Kugel eine tangirende Ebene und bestimmen die Durchschnitte $4z$, $4z'$ derselben mit den Ebenen Δ_1, Δ_2, so ist offenbar

$$4z \perp 4O_1, \qquad 4z' \perp 4O_2$$

und u_1 bezeichnet den Winkel, unter welchem sich die den Dreiecken Δ_1, Δ_2 umschriebenen Kreise schneiden. Die senkrechten Strahlen $4z$, $4z'$ liegen in den Ebenen Δ_1, Δ_2 mit jenen O_1A, O_2A auf derselben Seite von $4O_1$ und $4O_2$, wenn der Mittelpunkt O innerhalb der Pyramide liegt. Liegt O ausserhalb und der Seitenfläche Δ_1 gegenüber, so liegt der Strahl $4z'$ auf der entgegengesetzten Seite von $4O_2$ in Bezug auf O_2A.

Alsdann ist in der körperlichen Ecke zwischen a, $4z$, $4z'$ als Kanten der Flächenwinkel an a gleich A, ferner $\angle 3\,4z = x'$, $\angle 3\,4z' = x''$; da ferner

$$OO_1 \perp pl.(3\,4z), \qquad OO_2 \perp pl.(3\,4z'),$$

so ist der Flächenwinkel an der Kante $4z$ gleich dem Winkel

$O_1 O O_2 = 90^0 - \omega_1$, oder $90^0 + \omega_1$ jenachdem der Mittelpunkt O innerhalb des Tetraeders liegt oder ausserhalb und der Seite Δ_1 gegenüber; man hat daher in jedem Falle:

$$(3) \ldots \begin{cases} \cos u_1 = \cos x' \cos x'' + \sin x' \sin x'' \cos A, \\ \cos \omega_1 = \dfrac{\sin A \sin x''}{\sin u}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Kantenwinkel 142, 243, 143 in der Ecke 4 des Tetraeders T mit x, x_1, x_2, so ist nach der bekannten Formel des Albategnius:

$$\cos A = \frac{\cos x - \cos x_1 \cos x_2}{\sin x_1 \sin x_2},$$

folglich:

$$\cos u_1 = \cos x' \cos x'' + \frac{\sin x' \sin x''}{\sin x_1 \sin x_2}(\cos x - \cos x_1 \cos x_2).$$

Die Seitenflächen des Tetraeders geben nun unmittelbar nach der Formel von Carnot:

$$\cos x' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos x_1 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$\cos x'' = \frac{b'^2 + c'^2 - a^2}{2b'c'}, \quad \cos x_2 = \frac{a^2 + c'^2 - b'^2}{2ac'};$$

und auch

$$\cos x = \frac{b^2 + c'^2 - a'^2}{2bc'}, \quad \frac{\sin x'}{\sin x_1} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\sin x''}{\sin x_2} = \frac{a}{b'};$$

durch Substitution dieser Werthe erhält der vorige Ausdruck die folgende Gestalt:

$$\cos u_1 = \frac{(b^2+c^2-a^2)(b'^2+c'^2-a^2)+2a^2(b^2+c'^2-a'^2)-(a^2+b^2-c^2)(a^2+c'^2-b'^2)}{4bb'cc'};$$

der Zähler dieses Bruches reducirt sich nach einiger Rechnung auf $2(b^2b'^2 + c^2c'^2 - a^2a'^2)$, so dass endlich:

$$(4) \ldots\ldots \cos u_1 = \frac{(bb')^2 + (cc')^2 - (aa')^2}{2bb'cc'}.$$

Diese Gleichung bestimmt den Winkel, unter welchem sich die den Seitenflächen Δ_1, Δ_2 an der Kante a umschriebenen Kreise in den Punkten 3 und 4 durchschneiden. Wollte man hiernach den Winkel bestimmen, unter welchem sich die den Seiten-

flächen Δ_3, Δ_4 an der Gegenkante a' umschriebenen Kreise schneiden, so sind in der Formel (4), wie der Anblick der Figur lehrt, die Kanten a, b, c, b', c' mit jenen a', b', c, b, c' zu vertauschen. Da hierdurch die Formel (4) unverändert bleibt, so folgt hieraus der Satz:

Die zwei Gegenkanten entsprechenden Kreise schneiden sich unter gleichen Winkeln.

Bezeichnet man die den drei Paar Gegenkanten a, a', b, b', c, c' entsprechenden Winkel mit u_1, u_2, u_3, so folgt:

$$(5)^{*)} \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \cos u_1 = \dfrac{(bb')^2 + (cc')^2 - (aa')^2}{2bb'cc'}, \\ \cos u_2 = \dfrac{(aa')^2 + (cc')^2 - (bb')^2}{2aa'cc'}, \\ \cos u_3 = \dfrac{(aa')^2 + (bb')^2 - (cc')^2}{2aa'bb'}. \end{cases}$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck:

$$1 - \cos^2 u_1 - \cos^2 u_2 - \cos^2 u_3 - 2\cos u_1 \cos u_2 \cos u_3,$$

so wird derselbe identisch gleich Null; hieraus folgt:

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u_1 + u_2 + u_3 = 180^0,$$

d. h. die Summe der drei den Gegenkanten entsprechenden Winkel, unter welchen sich die den Seitenflächen des Tetraeders umschriebenen Kreise schneiden, deren Schenkel vom Mittelpunkte der Kugel aus gesehen auf einerlei Seite liegen, ist gleich 180^0.

Die vorhergehenden Formeln (5) entsprechen ganz dem Carnot'schen Satze für das ebene Dreieck, nur stehen an der Stelle der drei Seiten die Producte der Gegenkanten. Es ist daher auch:

---

*) Die Winkel u_1, u_2, u_3 kann man auch durch die Flächenwinkel des Tetraeders darstellen mit Anwendung der Gleichungen (2); so ist z. B.

$$\cos u_1 = \frac{(\sin B \sin B')^2 + (\sin C \sin C')^2 - (\sin A \sin A')^2}{2 \sin B \sin B' \sin C \sin C'}.$$

$$(7)\quad\begin{cases}\sin u_1=\dfrac{\sqrt{(aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(aa'+cc'-bb')(aa'+bb'-cc')}}{2bb'cc'},\\[2ex] \sin u_2=\dfrac{\sqrt{(aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(aa'+cc'-bb')(aa'+bb'-cc')}}{2aa'cc'},\\[2ex] \sin u_3=\dfrac{\sqrt{(aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(aa'+cc'-bb')(aa'+bb'-cc')}}{2aa'bb'}.\end{cases}$$

Ersetzt man in der Gleichung (3) $\sin A$ durch seinen Werth aus (1), $\sin u_1$ durch seinen Werth aus (7), indem man kurz Z für die Wurzel schreibt, und $\sin x''$ durch $\dfrac{2\Delta_2}{b'c'}$, so folgt:

$$\cos\omega_1=\frac{6abc}{\Delta_1 Z}=\frac{24r_1}{Z}T,$$

und ferner:

$$(8)\quad\begin{cases}\cos\omega_1=\dfrac{24T}{\sqrt{(aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(aa'+cc'-bb')(aa'+bb'-cc')}}r_1,\\[2ex] \cos\omega_2=\dfrac{24T}{\sqrt{(aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(aa'+cc'-bb')(aa'+bb'-cc')}}r_2,\\[2ex] \cos\omega_3=\dfrac{24T}{\sqrt{(aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(aa'+cc'-bb')(aa'+bb'-cc')}}r_2,\\[2ex] \cos\omega_4=\dfrac{24T}{\sqrt{(aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(aa'+cc'-bb')(aa'+bb'-cc')}}r_4.\end{cases}$$

Da nun nach der Figur $r_1=R\cos\omega_1$, so wird:

$$(9)^{*})\ R=\frac{\sqrt{(aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(aa'+cc'-bb')(aa'+bb'-cc')}}{24T}.$$

In der dreikantigen Ecke $3zz'4$ (Fig. 1.), welche uns zur Kenntniss von $\cos u_1$ und $\cos\omega_1$ geführt hat, sind x', x'', u_1 die Kan-

---

*) Den letzten sehr merkwürdigen Ausdruck für R finde ich zuerst bei Crelle, Sammlung mathematischer Aufsätze (1821) Bd. I., p. 105.

tenwinkel und $90^0 - \omega_1$ oder $90^0 + \omega_1$ ist jener Flächenwinkel, welcher x'' gegenüberliegt, jenachdem der Kugelmittelpunkt innerhalb des Tetraeders liegt oder ausserhalb und der Seitenfläche Δ_1 gegenüber; daher ist auch:

$$\sin\omega_1 = \frac{\cos x'' - \cos x' \cos u_1}{\sin x' \sin u_1}.$$

Ersetzt man hierin $\cos x'$, $\cos x''$ durch die oben aufgestellten Werthe, $\cos u_1$, $\sin u_1$ durch jene aus (5) und (7), endlich $\sin x'$ durch $\frac{a}{2r_1}$, so folgt unmittelbar:

$$\sin\omega_1 = \pm\{a^2a'^2(b^2+c^2-a^2)+b^2b'^2(a^2+c^2-b^2)$$
$$+c^2c'^2(a^2+b^2-c^2)-2a^2b^2c^2\}\frac{1}{4\Delta_1 Z},$$

wenn die Wurzel in (7) wieder kurz mit Z bezeichnet wird. Um die Winkel ω_2, ω_3, ω_4 ebenso darzustellen, treten an die Stelle von

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & \quad & a' & b' & c', \\ a & b' & c' & & a' & b & c, \\ a' & b & c' & & a & b' & c, \\ a' & b' & c & & a & b & c' \end{array}$$

und man hat:

$$(10)\;.\;.\;\left\{\begin{aligned} \sin\omega_1 &= \pm\{a^2a'^2(b^2+c^2-a^2)+b^2b'^2(a^2+c^2-b^2) \\ &\qquad +c^2c'^2(a^2+b^2-c^2)-2a^2b^2c^2\}\frac{1}{4\Delta_1 Z}, \\ \sin\omega_2 &= \pm\{a^2a'^2(b'^2+c'^2-a^2)+b^2b'^2(a^2+c'^2-b'^2) \\ &\qquad +c^2c'^2(a^2+b'^2-c'^2)-2a^2b'^2c'^2\}\frac{1}{4\Delta_2 Z}, \\ \sin\omega_3 &= \pm\{a^2a'^2(b^2+c'^2-a'^2)+b^2b'^2(a'^2+c'^2-b^2) \\ &\qquad +c^2c'^2(a'^2+b^2-c'^2)-2a'^2b^2c'^2\}\frac{1}{4\Delta_3 Z}, \\ \sin\omega_4 &= \pm\{a^2a'^2(b'^2+c^2-a'^2)+b^2b'^2(a'^2+c^2-b'^2) \\ &\qquad +c^2c'^2(a'^2+b'^2-c^2)-2a'^2b'^2c^2\}\frac{1}{4\Delta_4 Z}; \end{aligned}\right.$$

und hierin sind die Vorzeichen so zu wählen, dass die Sinus positiv werden.

Sind p_1, p_2, p_3, p_4 die Abstände des Mittelpunktes O der

umschriebenen Kugel von den vier Seitenflächen des Tetraeders, so ist:

$$p_1 = R \sin \omega_1, \quad p_2 = R \sin \omega_2, \quad p_3 = R \sin \omega_3, \quad p_4 = R \sin \omega_4$$

oder mit Anwendung der vorhergehenden Gleichungen:

(11)

$$p_1 = \pm \frac{a^2a'^2(b^2+c^2-a^2)+b^2b'^2(a^2+c^2-b^2)+c^2c'^2(a^2+b^2-c^2)-2a^2b^2c^2}{96\Delta_1 T},$$

$$p_2 = \pm \frac{a^2a'^2(b'^2+c'^2-a^2)+b^2b'^2(a^2+c'^2-b'^2)+c^2c'^2(a^2+b'^2+c'^2)-2a^2b'^2c'^2}{96\Delta_2 T},$$

$$p_3 = \pm \frac{a^2a'^2(b^2+c'^2-a'^2)+b^2b'^2(a'^2+c'^2-b^2)+c^2c'^2(a'^2+b^2-c'^2)-2a'^2b^2c'^2}{96\Delta_3 T},$$

$$p_4 = \pm \frac{a^2a'^2(b'^2+c^2-a'^2)+b^2b'^2(a'^2+c^2-b'^2)+c^2c'^2(a'^2+b'^2-c^2)-2a'^2b'^2c^2}{96\Delta_4 T}.$$

und die Vorzeichen sind in jedem besonderen Falle so zu wählen, dass die Ausdrücke positiv werden.

Legt man durch je zwei Gegenkanten $a\ a'$, $b\ b'$, $c\ c'$ eines Tetraeders 1 2 3 4 (Fig. 2.) die ihrem kleinsten Abstand entsprechenden Parallelebenen, so formiren diese sechs Ebenen ein Parallelopiped 1 1′ 2 2′ 3 3′ 4 4′, dessen Seitenflächen [23], [13], [12] die Gegenkanten zu Diagonalen haben und dessen Kanten k_1, k_2, k_3 gleich sind den Verbindungsstrecken der Mittelpunkte je zweier Gegenkanten. (Diese Verbindungsstrecken schneiden sich bekanntlich im Schwerpunkte des Tetraeders, welcher auch der Durchschnitt der Diagonalen des Parallelopipeds ist.). Sind ε_1, ε_2, ε_3 die Winkel unter welchen die Gegenkanten $a\ a'$, $b\ b'$, $c\ c'$ sich kreuzen, anderseits α_1, α_2, α_3 die Kantenwinkel einer Ecke 4 des Parallelopipeds, so wie sie den Kanten k_1, k_2, k_3 gegenüber liegen, so gibt die Figur unmittelbar:

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} [23] = \frac{1}{2}aa' \sin \varepsilon_1 = k_2 k_3 \sin \alpha_1, \\ [13] = \frac{1}{2}bb' \sin \varepsilon_2 = k_1 k_3 \sin \alpha_2, \\ [12] = \frac{1}{2}cc' \sin \varepsilon_3 = k_1 k_2 \sin \alpha_3. \end{cases}$$

Aus der Seitenfläche 1′ 2′ 3 4, welche den Gegenkanten $a\ a'$ entspricht, folgt:

$$k_3^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}a'^2 - \tfrac{1}{2}aa' \cos \varepsilon_1,$$

$$k_2^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}a'^2 + \tfrac{1}{2}aa' \cos \varepsilon_1$$

und durch Addition:

$$(13) \quad \begin{cases} k_2^2 + k_3^2 = \frac{1}{2}(a^2 + a'^2), \\ k_1^2 + k_3^2 = \frac{1}{2}(b^2 + b'^2), \\ k_1^2 + k_2^2 = \frac{1}{2}(c^2 + c'^2); \end{cases}$$

d. h. die Summe der Quadrate der Mittelpunctstrecken von zwei Paar Gegenkanten ist immer gleich der halben Quadratsumme des dritten Paares der Gegenkanten.

Aus den Gleichungen (13) erhält man auch:

$$(14) \quad k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2);$$

$$(15) \quad \begin{cases} k_1^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2 + b'^2 + c'^2 - a'^2), \\ k_2^2 = \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - b^2 + a'^2 + c'^2 - b'^2), \\ k_3^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 + a'^2 + b'^2 - c'^2), \end{cases}$$

wodurch die Mittelpunktstrecken der Gegenkanten durch die sechs Kanten des Tetraeders bestimmt werden.

Es ist ferner

$$\cos\varepsilon_1 = \frac{a^2 + a'^2 - 4k_3^2}{2aa'},$$

oder wenn für k_3^2 der eben gefundene Werth substituirt wird:

$$(16) \quad \begin{cases} \cos\varepsilon_1 = \frac{c^2 - b^2 + c'^2 - b'^2}{2aa'}, \\ \cos\varepsilon_2 = \frac{a^2 - c^2 + a'^2 - c'^2}{2bb'}, \\ \cos\varepsilon_3 = \frac{a^2 - b^2 + a'^2 - b'^2}{2cc'}; \end{cases}$$

hierin bezeichnen ε_1, ε_2, ε_3 die spitzen oder stumpfen Winkel unter welchen die Gegenkanten sich kreuzen, je nachdem die Zähler der Brüche positiv oder negativ sind. Da ε_1 ein Winkel des Dreieckes ist, dessen Seiten $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a'$, k_3 und $180^0 - \varepsilon_1$ ein Winkel des Dreiekes ist, dessen Seiten $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a'$, k_2 sind, so ist in jedem Falle:

$$
(17)^{*)}\left\{\begin{aligned}
\sin\varepsilon_1 &= \frac{1}{2aa'}\sqrt{(a+a'+2k_3)(a+a'-2k_3)(a-a'+2k_3)(a'-a+2k_3)}\\
&= \frac{1}{2aa'}\sqrt{(a+a'+2k_2)(a+a'-2k_2)(a-a'+2k_2)(a'-a+2k_2)},\\
\sin\varepsilon_2 &= \frac{1}{2bb'}\sqrt{(b+b'+2k_3)(b+b'-2k_3)(b-b'+2k_3)(b'-b+2k_3)}\\
&= \frac{1}{2bb'}\sqrt{(b+b'+2k_1)(b+b'-2k_1)(b-b'+2k_1)(b'-b+2k_1)},\\
\sin\varepsilon_3 &= \frac{1}{2cc'}\sqrt{(c+c'+2k_2)(c+c'-2k_2)(c-c'+2k_2)(c'-c+2k_2)}\\
&= \frac{1}{2cc'}\sqrt{(c+c'+2k_1)(c+c'-2k_1)(c-c'+2k_1)(c'-c+2k_1)};
\end{aligned}\right.
$$

womit die Kreuzungswinkel der Gegenkanten durch die sechs Kanten des Tetraeders dargestellt werden. Hiermit findet man nun nach den Gleichungen (12):

$$
(18)\left\{\begin{aligned}
\sin\alpha_1 &= \frac{1}{4k_2k_3}\sqrt{(a+a'+2k_3)(a+a'-2k_3)(a-a'+2k_3)(a'-a+2k_3)}\\
&= \frac{1}{4k_2k_3}\sqrt{(a+a'+2k_2)(a+a'-2k_2)(a-a'+2k_2)(a'-a+2k_2)},\\
\sin\alpha_2 &= \frac{1}{4k_1k_3}\sqrt{(b+b'+2k_3)(b+b'-2k_3)(b-b'+2k_3)(b'-b+2k_3)}\\
&= \frac{1}{4k_1k_3}\sqrt{(b+b'+2k_1)(b+b'-2k_1)(b-b'+2k_1)(b'-b+2k_1)},\\
\sin\alpha_3 &= \frac{1}{4k_1k_2}\sqrt{(c+c'+2k_1)(c+c'-2k_1)(c-c'+2k_1)(c'-c+2k_1)}\\
&= \frac{1}{4k_1k_2}\sqrt{(c+c'+2k_2)(c+c'-2k_2)(c-c'+2k_2)(c'-c+2k_2)}
\end{aligned}\right.
$$

Aus dem Dreieck $1'\,2'\,4$ erhält man aber:

$$a'^2 = k_2{}^2 + k_3{}^2 - 2k_2k_3\cos\alpha_1$$

oder mit Anwendung der Gleichungen (15):

$$(19)\;\ldots\;\cos\alpha_1 = \frac{a^2-a'^2}{4k_2k_3},\quad \cos\alpha_2 = \frac{b^2-b'^2}{4k_1k_3},\quad \cos\alpha_3 = \frac{c'^2-c^2}{4k_1k_2},$$

---

*) Der Ausdruck $(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$ bleibt seinem Werth nach ungeändert, wenn man statt c setzt:

$$\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

dabei bezeichnen α_1, α_2, α_3 die Winkel unter welchen sich die Verbindungsstecken der Mittelpunkte der Gegenkanten

$$\begin{matrix} b & b', & c & c' \\ a & a', & c & c' \\ a & a', & b & b' \end{matrix}$$

der Ordnung nach schneiden.

Ist $\varkappa_1$ der Winkel, welchen in der Ecke 4 die Kante k_1 mit der gegenüberliegenden Seitenfläche α_1 einschliesst, so ist bekanntlich:

$$\sin\varkappa_1 = \frac{2H}{\sin\alpha_1},$$

wenn der Kürze halber gesetzt wird:

(20)

$$H = \sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_3-\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)}$$

und wenn e_1 den Abstand der parallelen Ebenen 1′ 2′ 3 4, 1 2 3′ 4′ bezeichnet, so ist $e_1 = k_1 \sin\varkappa_1$ oder

$$e_1 = \frac{2k_1 H}{\sin\alpha};$$

dabei ist e_1 auch der kleinste Abstand der sich kreuzenden Kanten $a\,a'$. Haben e_2, e_3 dieselbe Bedeutung für die Kanten $b\,b'$ und $c\,c'$, so folgt:

$$(21) \quad \ldots e_1 = \frac{2k_1 H}{\sin\alpha_1}, \quad e_2 = \frac{2k_2 H}{\sin\alpha_2}, \quad e_3 = \frac{2k_3 H}{\sin\alpha_3};$$

und wenn P den Inhalt des dem Tetraeder umschriebenen Parallelopipeds 1 1′ 2 2′ 3 3′ 44′ bezeichnet, nach Anwendung der Gleichungen (12):

$$(22) \left\{ \begin{aligned} P &= k_2 k_3 e_1 \sin\alpha_1 = k_1 k_3 e_2 \sin\alpha_2 = k_1 k_2 e_3 \sin\alpha_3 \\ &= \tfrac{1}{2} a a' e_1 \sin\varepsilon_1 = \tfrac{1}{2} b b' e_2 \sin\varepsilon_2 = \tfrac{1}{2} c c' e_3 \sin\varepsilon_3 = 2Hk_1 k_2 k_3. \end{aligned} \right.$$

Das Parallelopiped 1 1′ 2 2′ 3 3′ 4 4′ kann aufgefasst werden als die Summe aus dem Tetraeder 1 2 3 4 und vier Pyramiden P_1, P_2, P_3, P_4, welche die Seitenflächen Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 des Tetraeders zu Grundflächen haben und deren Spitzen in den Ecken 1′, 2′, 3′, 4′ des Parallelopipeds liegen:

$$P = T + P_1 + P_2 + P_3 + P_4.$$

Um den Inhalt P_1 der Pyramide 2 3 4 1′ zu berechnen, nehmen wir $\Delta(1'\,3\,4) = \frac{1}{2}k_2k_3\sin\alpha$, als Grundfläche, dann ist e_1 deren Höhe, folglich:

$$P_1 = \tfrac{1}{6}k_2k_3\sin\alpha_1 . e_1 = \tfrac{1}{6}k_1k_2k_3 H (= \tfrac{1}{6}P),$$

und da dieser Ausdruck nach den in ihm enthaltenen Stücken symmetrisch ist, so muss

$$(23) \ldots\ldots P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \tfrac{1}{6}k_1k_2k_3 H$$

sein, d. h. vier Seitenpyramiden des Tetraëders T haben gleichen Inhalt, wodurch

$$P = T + 4P_1$$

oder

$$(24) \ldots\ldots\ldots T = \tfrac{2}{6}k_1k_2k_3 H = \tfrac{1}{3}P$$

wird. Demnach beträgt das Tetraeder den dritten Theil des umschriebenen Parallelopipeds.

Ferner ist $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \frac{1}{2}T$, und da diese Seitenpyramiden mit dem Tetraeder T je eine Seitenfläche gemeinschaftlich haben, so verhalten sich die hierauf bezogenen Höhen wie 1 zu 2. Durch Anwendung der Gleichung (22) erhält man auch aus (24):

$$(25) \ldots T = \tfrac{1}{6}aa'e_1\sin\varepsilon_1 = \tfrac{1}{6}bb'e_2\sin\varepsilon_2 = \tfrac{1}{6}cc'e_3\sin\varepsilon_3,$$

der Inhalt des Tetraeders ist gleich dem sechsten Theil des Productes zweier Gegenkanten, ihres kleinsten Abstandes und des Sinus ihres Kreuzungswinkels *).

Um die Distanzen e_1, e_2, e_3 und die Volumina P und T direct durch die Kanten darzustellen, ist nur noch nothwendig H in eine Function der Kanten zu verwandeln. Es ist auch bekanntlich:

$$H^2 = 1 - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 + 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3;$$

ersetzt man hierin die Cosinus durch ihre Werthe aus (19), stellt auf gleichen Nenner, verrichtet die angezeigten Multiplicationen und reducirt, so zeigt sich:

---

*) Carnot, Mémoire sur la rélation qui existe entre les distances respectives de cinq points pris dans l'espace.

(26)

$$H=\sqrt{\frac{4a^2a'^2k_1^2+4b^2b'^2k_2^2+4c^2c'^2k_3^2-a'^2b^2c^2-a^2b^2c'^2-a'^2b'^2c^2}{8k_1k_2k_3}}.$$

Das Volumen des Tetraeders wird endlich durch die Formel dargestellt, welche schon Lagrange entwickelt hat:

(27)*)

$$T=\frac{1}{12}\sqrt{\left\{\begin{matrix}4a^2a'^2k_1^2+4b^2b'^2k_2^2+4c^2c'^2k_3^2-a^2b^2c^2-a^2b'^2c'^2-a'^2b^2c'^2\\ -a'^2b'^2c^2,\end{matrix}\right\}}$$

hierin sind k_1^2, k_2^2, k_3^2 durch die Werthe aus (15) zu ersetzen.

Von nun an können auch die Flächenwinkel A, A', B, B', C, C' in (1), die Winkel ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 in (8), (10) und der Radius R in (9) als reine Functionen der Kanten betrachtet werden.

Aus den Gleichungen (13) folgt:

$$a'^2=2k_2^2+2k_3^2-a^2,$$
$$b'^2=2k_1^2+2k_3^2-b^2,$$
$$c'^2=2k_1^2+2k_2^2-c^2;$$

und durch Substitution dieser Werthe in dem Ausdruck für T verwandelt sich die Grösse unter dem Wurzelzeichen in folgende:

$$\begin{aligned}&4a^2k_1^2(2k_2^2+2k_3^2-a^2)-a^2(2k_1^2+2k_3^2-b^2)(2k_1^2+2k_2^2-c^2)-a^2b^2c^2,\\ &+4b^2k_2^2(2k_1^2+2k_3^2-b^2)-b^2(2k_2^2+2k_3^2-a^2)(2k_1^2+2k_2^2-c^2)\\ &+4c^2k_2^2(2k_1^2+2k_2^2-c^2)-c^2(2k_2^2+2k_3^2-a^2)(2k_1^2+2k_3^2-b^2);\end{aligned}$$

werden in der mittleren Gruppe die Multiplicationen verrichtet und die Glieder mit den übrigen vier entsprechend vereiniget, so zeigt sich als Resultat:

$$4\left\{\begin{matrix}a^2k_1^2(b^2+c^2-a^2+k_2^2+k_3^2-k_1^2)-a^2b^2c^2-c^2k_1^2k_2^2\\ b^2k_2^2(a^2+c^2-b^2+k_1^2+k_3^2-k_2^2)-a^2k_2^2k_3^2\\ c^2k_3^2(a^2+b^2-c^2+k_1^2+k_2^2-k_3^2)-b^2k_1^2k_3^2\end{matrix}\right\}$$

und der Factor von 4 unterscheidet sich von jenem Ausdruck in T nur darin, dass beziehungsweise k_1, k_2, k_3 an der Stelle von a', b' c' steht, und da diese Kanten sich auf die Pyramide P_1

---

*) Memoiren der Berliner Akademie 1773.

beziehen, so wird hiermit die schon oben auf ganz anderem Weg ermittelte Gleichung

$$P_1 = \tfrac{1}{3}T$$

bestätiget.

Sind h_1, h_2, h_3, h_4 die vier Höhen des Tetraeders T in Bezug auf die Seitenflächen Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, so ist z. B. $T = \frac{1}{3}\Delta_1 h_1$, $h_1 = \frac{3T}{\Delta_1}$, oder mit (24):

$$(28) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{ll} h_1 = \dfrac{2k_1k_2k_3H}{\Delta_1}, & h_2 = \dfrac{2k_1k_2k_3H}{\Delta_2}, \\ h_3 = \dfrac{2k_1k_2k_3H}{\Delta_3}, & h_4 = \dfrac{2k_1k_2k_3H}{\Delta_4}, \end{array} \right.$$

worin, um alles durch die Kanten auszudrücken, für k_1, k_2, k_3, H die Werthe aus (15) und (26) zu setzen sind.

Aus den Gleichungen (12) erhält man nach Anwendung der Formeln (19):

$$[12]^2 + [13]^2 + [23]^2 = \left\{ \begin{array}{c} k_1^2k_2^2 + k_1^2k_3^2 + k_2^2k_3^2 \\ -\frac{1}{16}\{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (c-c')\}^2 \end{array} \right\}$$

oder wenn man für k_1^2, k_2^2, k_3^2 die Werthe aus (15) substituirt, die angezeigten Multiplicationen verrichtet und reducirt:

$$[12]^2 + [13]^2 + [23]^2 = \left\{ \begin{array}{l} 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\ +2a^2b'^2 + 2a^2c'^2 + 2b'^2c'^2 - a^4 - b'^4 - c'^4 \\ +2a'^2b^2 + 2a'^2c'^2 + 2b^2c'^2 - a'^4 - b^4 - c'^4 \\ +2a'^2b'^2 + 2a'^2c^2 + 2b'^2c^2 - a'^4 - b'^4 - c^4 \end{array} \right\}$$

oder

$$(29) \quad \ldots \quad [12]^2 + [13]^2 + [23]^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2,$$

d. h. **die Summe der zweiten Potenzen der Seitenflächen des Parallelopipeds ist doppelt so gross als jene des Tetraeders.**

Sind ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 die Radien der fünf Berührungskugeln des Tetraeders T und bezieht sich ϱ auf die innere Berührungskugel, so ist:

(30)*) $$\begin{cases} T = \frac{1}{3}\varrho\,(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4), \\ T = \frac{1}{3}\varrho_1(\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 - \Delta_1), \\ T = \frac{1}{3}\varrho_2(\Delta_1 + \Delta_3 + \Delta_4 - \Delta_2), \\ T = \frac{1}{3}\varrho_3(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_4 - \Delta_3), \\ T = \frac{1}{3}\varrho_4(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4); \end{cases}$$

hieraus folgt:

(31) $$\begin{cases} \varrho = \dfrac{3T}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4}, \\ \varrho_1 = \dfrac{3T}{\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 - \Delta_1}, \\ \varrho_2 = \dfrac{3T}{\Delta_1 + \Delta_3 + \Delta_4 - \Delta_2}, \\ \varrho_3 = \dfrac{3T}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_4 - \Delta_3}, \\ \varrho_4 = \dfrac{3T}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4}; \end{cases}$$

wodurch ersichtlich wird, dass auch die Radien der fünf Hauptberührungskugeln des Tetraeders als reine Functionen der Kanten dargestellt werden können, denn die Lagrange'sche Formel (27) gibt T und die Formel der drei Brüder bestimmt Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4.

*) S. Grunert's Archiv, Thl. XXVIII, p. 97.

XXXI.

Lösung einiger im Archiv gestellter Aufgaben.

Von

Herrn *P. Nippert*,
Studirendem der Technik in Berlin.

(Figuren s. Tafel VII.)

I.

Aufgabe. Von den Ecken eines Dreiecks ABC (Fig. 1.) werden Transversalen nach den gegenüberliegenden Seiten gezogen, so dass jede derselben in einem anderen Verhältnisse getheilt wird. Es soll der Inhalt des Dreiecks $A_2B_2C_2$ berechnet werden, welches die Transversalen einschliessen, der Inhalt des Dreiecks ABC als Einheit genommen. Taylor.

Auflösung. Es sei

$$AC_1 : BC_1 = p : q, \quad BA_1 : CA_1 = p_1 : q_1, \quad CB_1 : AB_1 = p_2 : q_2;$$

dann ist, wenn CC_1 als Transversale von AB, AC, BB_1 angesehen wird,

$$BA_2 . AC_1 . CB_1 = B_1A_2 . BC_1 . AC.$$

Ferner

$$BC_1 : AC_1 = q : p$$

und

$$AC : CB_1 = p_2 + q_2 : p_2.$$

Durch Multiplication findet sich: $BA_2 : B_1A_2 = q(p_2 + q_2) : pp_2.$

Daher auch

$$BA_2 : BB_1 \quad = q(p_2 + q_2) : qp_2 + qq_2 + pp_2,$$

und folglich

$$\Delta BA_2C : \Delta BB_1C = q(p_2 + q_2) : qp_2 + qq_2 + pp_2.$$

Da aber ferner

$$\Delta BB_1C : \Delta ABC \quad = p_2 : p_2 + q_2$$

ist, so ergibt sich durch Multiplication der beiden letzten Proportionen, und indem man $ABC = 1$ setzt:

$$\Delta BA_2C = \frac{qp_2}{qp_2 + qq_2 + pp_2}$$
$$= \frac{1}{1 + \frac{q_2}{p_2} + \frac{p}{q}}.$$

In derselben Weise findet sich

$$\Delta AB_2C = \frac{1}{1 + \frac{q}{p} + \frac{p_1}{q_1}},$$

$$\Delta ABC_2 = \frac{1}{1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{p_2}{q_2}}.$$

Da nun

$$\Delta A_2B_2C_2 = ABC - (BA_2C + AB_2C + ABC_2)$$

ist, so findet man durch Substitution der Werthe für diese Dreiecke

$$\Delta A_2B_2C_2 = 1 - \left[\frac{1}{1 + \frac{q_2}{p_2} + \frac{p}{q}} + \frac{1}{1 + \frac{q}{p} + \frac{p_1}{q_1}} + \frac{1}{1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{p_2}{q_2}}\right].$$

Die weitere Reduction dieser Formel liefert schliesslich:

$$\Delta A_2B_2C_2 = \frac{\frac{p}{q}\cdot\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2} + \frac{q}{p}\cdot\frac{q_1}{p_1}\cdot\frac{q_2}{p_2} - 2}{(1 + \frac{q_2}{p_2} + \frac{p}{q})(1 + \frac{q}{p} + \frac{p_1}{q_1})(1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{p_2}{q_2})}.$$

Sollen die Transversalen sich in einem Punkte schneiden, so muss $\Delta A_2B_2C_2 = 0$ werden, d. h. es muss die Gleichung stattfinden:

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2} + \frac{q}{p}\cdot\frac{q_1}{p_1}\cdot\frac{q_2}{p_2} - 2 = 0.$$

Hieraus findet sich

$$(p \cdot p_1 \cdot p_2)^2 + (q \cdot q_1 \cdot q_2)^2 - 2 \cdot pp_1p_2 \cdot qq_1q_2 = 0.$$

Das heisst

$$pp_1p_2 - qq_1q_2 = 0,$$

oder

$$\frac{pp_1p_2}{qq_1q_2} = 1.$$

Dies gibt den bekannten Satz: Werden auf den Seiten eines Dreiecks drei Punkte so angenommen, dass das Product dreier dadurch entstehender Abschnitte, welche mit ihren Endpunkten nicht zusammenstossen, gleich ist dem Producte der drei anderen, so schneiden sich die Verbindungslinien jener Punkte mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks in einem Punkte.

Einige besondere Fälle dieser Art sind die, wo die Transversalen zu Mittellinien, Halbirungslinien der Winkel oder zu Höhen werden. Dass für diese Linien ebenfalls gemeinschaftliche Durchschnittspunkte vorhanden sind, ergibt sich aus der oben gefundenen allgemeinen Formel. Man hat nur für die Mittellinien

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = 1$$

zu setzen, für die Winkelhalbirungslinien

$$\frac{p}{q} = \frac{b}{a}, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{c}{b}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{a}{c},$$

wo a, b und c die Dreiecksseiten bezeichnen. Für die Höhen findet sich das Verhältniss wie folgt. Es ist (Fig. 2.):

$$b^2 - \left(\frac{p}{p+q}c\right)^2 = a^2 - \left(\frac{q}{p+q}c\right)^2,$$

oder

$$\frac{p^2 - q^2}{(p+q)^2}c^2 = -a^2 + b^2,$$

oder

$$\frac{p-q}{p+q} = \frac{-a^2 + b^2}{c^2};$$

mithin

$$\frac{\frac{p}{q} - 1}{\frac{p}{q} + 1} = \frac{-a^2 + b^2}{c^2},$$

folglich:

$$\frac{p}{q}=\frac{-a^2+b^2+c^2}{a^2-b^2+c^2};$$

ebenso findet sich

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2-c^2}$$

und

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{a^2+b^2-c^2}{-a^2+b^2+c^2}.$$

In jedem dieser drei besonderen Fälle ist das Product

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}=1,$$

also $\Delta A_2B_2C_2=0$.

Setzt man

$$\frac{p}{q}=\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2},$$

so geht die allgemeine Formel über in

$$\Delta A_2B_2C_2=\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^3+\left(\frac{q}{p}\right)^3-2}{\left(1+\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)^3}$$

$$=\frac{(p^3-q^3)^2}{(p^2+pq+q^2)^3}$$

$$=\frac{(p-q)^2}{p^2+pq+q^2}$$

$$=\frac{(p-q)^2}{(p-q)^2+3pq}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{3pq}{(p-q)^2}}.$$

II.

Aufgabe. Es seien a und b (Fig. 3.) die Radien zweier Kreise A_1 und B_1, welche einen Kreis O vom Radius r in den Punkten P und Q berühren. Es soll

bewiesen werden, dass die gemeinschaftliche Tangente AB der Kreise A_1 und B_1 ausgedrückt wird durch

$$AB = \frac{\sqrt{(r+a)(r+b)}}{r} . PQ.$$

[Townsend.]

Beweis. Man ziehe $A_1C \parallel AB$, A_1D und PE normal zu OB_1; dann ist

$$AB^2 = A_1B_1{}^2 - (b-a)^2$$

$$= (r+b)^2 + (r+a)^2 - 2(r+b).OD - (b-a)^2$$

$$= (r+b)^2 + (r+a)^2 - 2(r+b).OE.\frac{r+a}{r} - (b-a)^2.$$

Nun ist aber

$$PE^2 = (r+OE)(r-OE) = r^2 - OE^2$$

und

$$PE^2 = PQ^2 - EQ^2 = PQ^2 - (r-OE)^2 = PQ^2 - r^2 + 2r.OE - OE^2.$$

Mithin ist

$$r^2 - OE^2 = PQ^2 - r^2 + 2r.OE - OE^2,$$

also

$$OE = \frac{2r^2 - PQ^2}{2r},$$

und daher

$$AB^2 = (r+b)^2 + (r+a)^2 - \frac{2(r+b)(r+a)}{r} . \frac{2r^2 - PQ^2}{2r} - (b-a)^2$$

$$= (r+b)^2 + (r+a)^2 - 2(r+b)(r+a) + \frac{(r+b)(r+a)}{r^2} . PQ^2 - (b-a)^2$$

$$= ((r+b)-(r+a))^2 - (b-a)^2 + \frac{(r+b)(r+a)}{r^2} . PQ^2$$

$$= (b-a)^2 - (b-a)^2 + \frac{(r+b)(r+a)}{r^2} . PQ^2$$

$$= \frac{(r+a)(r+b)}{r^2} . PQ^2.$$

Mithin ist

$$AB = \frac{PQ}{r} . \sqrt{(r+a)(r+b)}.$$

III.

Aufgabe. Es seien A, B, C, D (Fig. 4.) vier den Kreis O berührende Kreise; A_1, B_1, C_1, D_1 ihre Berührungspunkte; AB, BC, CD, DA, AC und BD die Tangenten der berührenden Kreise. Dann ist

$$AC.BD = AB.DC + AD.BC.$$

[Casey.]

Beweis. Es ist, wie in II. nachgewiesen:

$$1) \ldots\ldots\ldots AC = \frac{A_1C_1}{r}.\sqrt{(r+a)(r+c)}.$$

$$2) \ldots\ldots\ldots BD = \frac{B_1D_1}{r}.\sqrt{(r+d)(r+b)}.$$

$$3) \ldots\ldots \frac{A_1B_1}{r}.\sqrt{(r+a)(r+b)} = AB.$$

$$4) \ldots\ldots \frac{C_1D_1}{r}.\sqrt{(r+c)(r+d)} = CD.$$

$$5) \ldots\ldots \frac{A_1D_1}{r}.\sqrt{(r+a)(r+d)} = AD.$$

$$6) \ldots\ldots \frac{B_1C_1}{r}.\sqrt{(r+b)(r+c)} = BC$$

und

$$7) \ldots \quad A_1C_1.B_1D_1 = A_1B_1.C_1D_1 + A_1D_1.B_1C_1.$$

Multiplicirt man 3) mit 4) und 5) mit 6), so ergibt sich

$$8) \ldots (A_1B_1.C_1D_1 + A_1D_1.B_1C_1)\frac{\sqrt{(r+a)(r+b)(r+c)(r+d)}}{r^2}$$
$$= AB.CD + AD.BC.$$

Multiplicirt man 1), 2) und 7), so erhält man

$$9) \ldots\ldots\ldots AC.BD.A_1C_1.B_1D_1$$
$$= A_1C_1.B_1D_1.(A_1B_1.C_1D_1 + A_1D_1.B_1C_1)\frac{\sqrt{(r+a)(r+b)(r+c)(r+d)}}{r^2}.$$

Indem man nun 8) mit 9) multiplicirt, findet sich

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC.$$

XXXII.

Ueber die Reduction der Monddistanzen mit Anwendung vierstelliger Logarithmen, ohne Benutzung von Hülfstafeln.

Von

Herrn Professor Dr. *Ligowski*
in Kiel.

Es seien m und m_1 die scheinbare und wahre Mondshöhe
„ „ s „ s_1 „ „ „ „ Sonnen- und Sternhöhe
„ „ d „ d_1 „ „ „ „ Distanz.

Bezeichnet γ den Winkel zwischen den beiden Vertikalkreisen der Gestirne, so hat man, wenn:

$$m_1 - m = a, \quad s - s_1 = b, \quad a + b = 2r, \quad a - b = 2\varrho$$

und

$$m - s = \Delta, \quad m_1 - s_1 = \Delta_1, \quad m + s = \Sigma, \quad m_1 + s_1 = \Sigma_1$$

gesetzt werden:

$$1) \ldots \quad \cos d_1 = \sin m_1 \sin s_1 + \cos m_1 \cos s_1 \cos\gamma$$

oder:

$$\cos d_1 = \cos\Delta_1 - 2\cos m_1 \cos s_1 \sin\frac{\gamma}{2}^2.$$

$$2) \ldots \quad \cos d = \cos\Delta - 2\cos m \cos s \sin\frac{\gamma}{2}^2.$$

Aus 1) und 2):

$$3) \ldots \quad \frac{\cos\Delta - \cos d}{\cos m \cos s} = \frac{\cos\Delta_1 - \cos d_1}{\cos m_1 \cos s_1} = 2\sin\frac{\gamma}{2}^2,$$

mithin auch:

$$4) \ldots\ldots \quad \sin\frac{\gamma}{2}^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(d+\Delta)\sin\frac{1}{2}(d-\Delta)}{\cos m \cos s}.$$

Aus Nr. 3) ergiebt sich, wenn:

$$1 - \frac{\cos m_1 \cos s_1}{\cos m \cos s} = \mu$$

gesetzt wird,

$$5)\ldots \quad \cos d_1 - \cos d = \cos\Delta_1 - \cos\Delta + \mu(\cos\Delta - \cos d),$$

also auch:

$$6)\ldots \sin\tfrac{1}{2}(d-d_1)\sin\tfrac{1}{2}(d+d_1) = -\sin r \sin(\Delta+r) + \mu \cos m \cos s \sin\frac{\gamma}{2}^2.$$

Es ist ferner:

$$\mu = 1 - \frac{\cos m_1 \cos s_1}{\cos m \cos s} = \frac{\cos m \cos s - \cos(m+a)\cos(s-b)}{\cos m \cos s}$$

und

$$2\mu \cos m \cos s = \cos\Sigma - \cos(\Sigma + 2\varrho) + \cos\Delta - \cos(\Delta + 2r),$$

mithin auch:

$$\mu \cos m \cos s = \sin\varrho \sin(\Sigma+\varrho) + \sin r \sin(\Delta + r),$$

daher wird aus 6):

$$7) \ldots\ldots \quad \sin\tfrac{1}{2}(d-d_1)\sin\tfrac{1}{2}(d+d_1)$$

$$= (\sin\varrho\sin(\Sigma+\varrho) + \sin r \sin(\Delta+r))\sin\frac{\gamma}{2}^2 - \sin r \sin(\Delta+r).$$

Da $\frac{1}{2}(d-d_1)$, ϱ und r sehr kleine Winkel sind, so hat man:

$$8) \ldots\ldots \quad \tfrac{1}{2}(d-d_1)\sin\tfrac{1}{2}(d+d_1)$$

$$= (\varrho\sin(\Sigma+\varrho) + r\sin(\Delta+r))\sin\frac{\gamma}{2}^2 - r\sin(\Delta+r).$$

Setzt man:

$$\tfrac{1}{2}(d-d_1) = x,$$

so ist:

$$\tfrac{1}{2}(d+d_1) = d - x \quad \text{und} \quad d_1 = d - 2x.$$

Schreibt man noch für $\varrho\sin(\Sigma+\varrho)$ und $r\sin(\Delta+r)$ beziehungsweise u und v, so wie w für die rechte Seite der Gleichung Nr. 8), so ist:

9) . . . . $x \sin(d-x) = (u+v)\sin\frac{\gamma^2}{2} - v = w$

Da x sehr klein ist, so ist:

10) . . . . $x_1 = \frac{w}{\sin d}$

ein Näherungswerth von x, und genauer

11) . . . . $x = \frac{x_1 \sin d}{\sin(d-x_1)}$,

also:

12) . . . $\log x = \log x_1 + (\log \sin d - \log\sin(d-x_1))$.

Als Zahlenbeispiel wähle ich das von mir in Thl XL. des Archivs auf S. 255. berechnete. Daselbst ist:

$m = 65^0 41' 41''$, $m_1 = 66^0\ 5' 34''$, $d = 74^0 42' 3''$

$s = 27\ 32\ 42$, $s_1 = 27\ 31\ 5''$

$a + b = 25' 30''$ also $r = 12' 45'' = 765''$;

$a - b = 22' 16''$ also $\varrho = 11'\ 8'' = 668''$.

$\Delta = 38^0 8' 59''$ $\Sigma = 93^0 14' 23''$ $\frac{1}{2}(d+\Delta) = 56^0 25' 31''$

$\Delta + r = 38^0 21' 44''$ $\Sigma + \varrho = 93^0 25' 31''$ $\frac{1}{2}(d-\Delta) = 18^0 16' 32''$.

$\log \varrho = 2{,}8248$
$\log\sin(\Sigma + \varrho) = 9{,}9992$

$\log u = 2{,}8240$
$\log u - \log v = 0{,}1474$
$B = 0{,}2336$

$\log(u+v) = 3{,}0576$
$\log\sin\frac{1}{2}(d+\Delta) = 9{,}9208$
$\log\sin\frac{1}{2}(d-\Delta) = 9{,}4964$
$\log\sec m = 0{,}3855$
$\log\sec s = 0{,}0523$

$\log(u+v)\sin\frac{\gamma^2}{2} = 2{,}9126$

$\log r = 2{,}8837$
$\log\sin(\Delta + r = 9{,}7929$

$\log v = 2{,}6766$

Gauss'sche Logarithmen.

$$\log(u+v)\sin\frac{\gamma^2}{2} - \log v = 0{,}2360$$
$$A = 0{,}3776$$

$$\log w = 2{,}5350$$
$$\log\sin d = 9{,}9844$$

$$\log x_1 = 2{,}5506 \qquad x_1 = 355'',3$$
$$\log\sin d - \log\sin(d-x_1) = 2$$

$$\log x = 2{,}5508 \qquad x = 355'',5,\ 2x = 711'' = 11'51''$$
$$d - 2x = 74^0 13' 12''.$$

In den Nautischen Tafeln von Dr. v. Freeden, so wie auch in der Steuermannskunst von A. Breusing, befinden sich Tabellen von $\log\sin\frac{\gamma}{2}^2$ und $\log\cos\frac{\gamma}{2}^2$, in ersterer unter dem Namen log für den Stundenwinkel, in der anderen log des semiversus. Diese Tabellen gestatten eine, für den Seemann bequemere Reduction der Monddistanz nach meinen Formeln.

Aus

$$x\sin(d-x) = (\varrho\sin(\Sigma+\varrho) + r\sin(\Delta+r))\sin\frac{\gamma}{2}^2 - r\sin(\Delta+r)$$

ergiebt sich durch Auflösung der Klammern:

$$x\sin(d-x) = \varrho\sin(\Sigma+\varrho)\sin\frac{\gamma}{2}^2 - r\sin(\Delta+r)\cos\frac{\gamma}{2}^2.$$

Diese Formel befindet sich schon in meiner Abhandlung vom Jahre 1863. Archiv Band XL. S. 254.

Setzt man nun:

$$\varrho\sin(\Sigma+\varrho)\operatorname{cosec} d\sin\frac{\gamma}{2}^2 = p,$$

$$r\sin(\Delta+r)\operatorname{cosec} d\cos\frac{\gamma}{2}^2 = q$$

und

$$x_1 = p - q,$$

so ist:

$$\log x = \log x_1 - (\log\operatorname{cosec} d - \log\operatorname{cosec}(d-x_1)).$$

Um eine Uebersicht der nöthigen Rechnungen zu gewähren, berechne ich das auf Seite 794 des ersten Bandes der Ency-

clopädie der Physik (Orts- und Zeitbestimmung von Professor Dr. Weyer) gegebene Beispiel.

Es ist daselbst gegeben:

$$m = 15^0 44', \quad s = 3^0 27', \quad a = 51' 38'', \quad b = 14' 17'',$$
$$d = 132^0 11' 19''.$$

Man findet hieraus:

$$r = 32' 57{,}5''; \quad \varrho = 18' 40{,}5''.$$

$$\Sigma \;= 19^0 11' \qquad \Delta \;= 12^0 17' \qquad \tfrac{1}{2}(d+\Delta) = 72^0 14' 9{,}5''$$
$$\Sigma + \varrho = 19^0 29' 40{,}5'' \qquad \Delta + r = 12^0 49' 57{,}5'' \qquad \tfrac{1}{2}(d-\Delta) = 59^0 57' 9{,}5''$$

$$\log\sin\tfrac{1}{2}(d+\Delta) = 9{,}97879$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}(d-\Delta) = 9{,}93732$$
$$\log\sec m = 0{,}01658$$
$$\log\sec s = 0{,}00079$$

$$t = 9^h 2' 53\tfrac{1}{8}'' \quad \log\sin\frac{\gamma^2}{2} = 9{,}93348 \qquad \log\cos\frac{\gamma^2}{2} = 9{,}15229 \quad 12 - t = 2^h 57' 6\tfrac{7}{8}''$$

$$\log\varrho = 3{,}04942 \qquad \log r = 3{,}29612$$
$$\log\sin(\Sigma+\varrho) = 9{,}52338 \qquad \log\sin(\Delta+r) = 9{,}34656$$
$$\log\cos d = 0{,}13022 \qquad \log\operatorname{cosec} d = 0{,}13022$$

v Freeden u. Breusing Naut. Tafeln.

$$\log p = 2{,}63650 \qquad \log q = 1{,}92519$$
$$p = 433{,}01 \qquad q = 84{,}18$$

$$x_1 = p - q = 348{,}83''$$
$$\log x_1 = 2{,}54262$$
$$\log\operatorname{cosec} d - \log\operatorname{cosec}(d - x_1) = \quad 67$$

$$\log x = 2{,}54195$$
$$x = 348{,}3''$$
$$2x = 696{,}6'' = 11' 36{,}6''$$
$$d_1 = d - 2x = 131^0 59' 42{,}4''.$$

Professor Dr. Weyer findet nach einer strengen Formel bei Anwendung siebenstelliger Logarithmen:

$$d_1 = 131^0 59' 42.$$

Nach der Formel Nr. 26. Seite 794. der Encyclopädie findet derselbe ebenfalls:

$$d_1 = 131^0 59' 42{,}4''.$$

Die vorstehenden Formeln lassen sich noch in anderer Weise herleiten.

Es war:

$$\cos d = \sin m \sin s + \cos m \cos s \cos \gamma,$$

hieraus auch:

$$\cos d = \sin m \sin s(\cos\frac{\gamma^2}{2} + \sin\frac{\gamma^2}{2}) + \cos m \cos s(\cos\frac{\gamma^2}{2} - \sin\frac{\gamma^2}{2})$$

$$\cos d = (\cos m \cos s + \sin m \sin s)\cos\frac{\gamma^2}{2} - (\cos m \cos s - \sin m \sin s)\sin\frac{\gamma^2}{2}$$

$$1) \ldots\ldots \cos d = \cos\Delta\cos\frac{\gamma^2}{2} - \cos\Sigma\sin\frac{\gamma^2}{2}.$$

Für d_1 hat man also:

$$2) \ldots \cos d_1 = \cos(\Delta + 2r)\cos\frac{\gamma^2}{2} - \cos(\Sigma + 2\varrho)\sin\frac{\gamma^2}{2}.$$

Durch Subtraction von 1) und 2) ergiebt sich:

$$\cos d - \cos d_1 = (\cos\Delta - \cos(\Delta + 2r))\cos\frac{\gamma^2}{2} - (\cos\Sigma - \cos(\Sigma + 2\varrho))\sin\frac{\gamma^2}{2},$$

und hieraus:

$$3) \ldots\ldots\ldots \sin\tfrac{1}{2}(d - d_1)\sin\tfrac{1}{2}(d + d_1)$$
$$= \sin\varrho\sin(\Sigma + \varrho)\sin\frac{\gamma^2}{2} - \sin r\sin(\Delta + r)\cos\frac{\gamma^2}{2}.$$

Wenn $\frac{1}{2}(d - d_1) = x$, also $d_1 = d - 2x$ und $\frac{1}{2}(d + d_1) = d - x$ eingeführt werden und berücksichtigt wird, dass x, r und ϱ sehr klein sind:

$$4) \ldots x\sin(d - x) = \varrho\sin(\Sigma + \varrho)\sin\frac{\gamma^2}{2} - r\sin(\Delta + r)\cos\frac{\gamma^2}{2},$$

oder:

$$5) \ldots x\sin(d - x) = (\varrho\sin(\Sigma + \varrho) + r\sin(\Delta + r))\sin\frac{\gamma^2}{2} - r\sin(\Delta + r).$$

Setzt man:

$$\varrho\sin(\Sigma + \varrho)\operatorname{cosec} d\sin\frac{\gamma^2}{2} = A,$$

$$r\sin(\Delta + r)\operatorname{cosec} d\sin\frac{\gamma^2}{2} = B$$

und

$$r\sin(\Delta + r)\operatorname{cosec} d = C,$$

so ist:

$$x_1 = A + B - C$$

und

$$\log x = \log x_1 + (\log\operatorname{cosec}(d - x_1) - \log\operatorname{cosec} d).$$

In den meisten Fällen wird x_1 hinreichend genau sein. Für die Rechnung ist zu beachten, dass $\log C = \log B - \log \sin\frac{\gamma^2}{2}$ ist. Die Rechnung für das vorher gegebene Beispiel gestaltet sich nun in folgender Weise:

$$\log\sin\tfrac{1}{2}(d+\Delta)=9{,}9788$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}(d-\Delta)=9{,}9373$$
$$\log\sec m=0{,}0166$$
$$\log\sec s=0{,}0008$$

$\log\sin\frac{\gamma^2}{2}=9{,}9335$	$\log\sin\frac{\gamma^2}{2}=9{,}9335$
$\log\varrho=3{,}0494$	$\log r=3{,}2961$
$\log\sin(\Sigma+\varrho)=9{,}5234$	$\log\sin(\Delta+r)=9{,}3466$
$\log\operatorname{cosec} d=0{,}1302$	$\log\operatorname{cosec} d=0{,}1302$
$\log A=2{,}6365$	$\log B=2{,}7064$ $\log C=2{,}7729$

$$A=433{,}0$$
$$B=508{,}6$$
$$941{,}6$$
$$C=592{,}8$$
$$x_1=348{,}''8 = 5'\,48{,}8''$$
$$\log x_1=2{,}5426$$
$$\log\operatorname{cosec}(d-x_1)-\log\operatorname{cosec} d= \quad -7$$
$$\log x=2{,}5419$$
$$x=5'48{,}3'' \text{ und } 2x = 11'\,36{,}6''.$$

XXXIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Exercices sur le binôme de Newton.

Par Monsieur Professeur Georges Dostor.

Exercice I. Chacune des expressions

$$(x+y)^5 - x^5 - y^5,$$

$$(x+y)^7 - x^7 - y^7$$

est divisible par $x^2 + xy + y^2$, quels que soient x et y.

Exercice II. Trouver le nombre des termes de la m^e puissance d'un trinôme; d'un quadrinôme; d'un polynôme de n termes.

Réponse: 1° . . . . . $\dfrac{(m+1)(m+2)}{1.2}$;

2° . . . . . $\dfrac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}$;

3° . . . . . $\dfrac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)}$.

Exercice III. Quelles sont les relations qui doivent exister entre les coefficients a, b, c pour que le polynôme

$$x^3 + ax^2 + bx + c$$

soit un cube.

Réponse: Il faut que

$$a^2 = 3b, \quad b^2 = 3ac.$$

Exercice IV. Quelles sont les relations qui doivent exister entre les coefficients a, b, c, d pour que le polynôme

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

soit un carré?

Réponse:

$$4ab = a^3 + 8c, \quad c^2 = a^2d.$$

Exercice V. Trouver le plus grand terme du développement de $(x+a)^m$.

Réponse: Ce terme sera

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} a^n x^{m-n},$$

si n est le plus grand nombre entier contenu dans la fraction

$$\frac{(m+1)a}{x+a}.$$

Exercice VI. Si 1, A, B, C, D,... sont les coefficients de la m^e puissance de $x+a$;

$$1, \quad 1+A, \quad A+B, \quad B+C, \quad C+D, \ldots$$

seront les coefficients de la $(m+1)^e$ puissance de $x+a$.

Exercice VII. Le binome $x^n - a^n$ divise toujours $x^{mn} - a^{mn}$ et ne divise jamais $x^{mn} + a^{mn}$.

Exercice VIII. Le binôme $x^n + a^n$ ne divise $x^{mn} - a^{mn}$ que si m est pair; et il ne divise $x^{mn} + a^{mn}$ que si m est impair.

Exercice IX. Trouver la somme des carrés des coéfficients de $(x+a)^m$.

Réponse: Cette somme est le coefficient de $a^m x^m$ dans le developpement $(x+a)^{2m}$.

Exercice X. La somme précédente peut être représentée par les deux formules

$$\frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m}, \quad \frac{(4m-2)(4m-6)\ldots 10.6.2}{1.2.3\ldots m};$$

prouver que ces deux formules sont équivalentes.

Exercice XI. Il est facile de voir que

$$(x+a)^m + (x-a)^m$$

est plus grand que $2x^m$; d'après cela quel est le maximum de $y+z$, lorsque $y^m + z^m$ est constant?

Exercice XII. Quelle est la limite du rapport des exposants de a et b dans le terme maximum de $(a+b)^m$ lorsque m augmente indéfiniment?

Réponse:

$$\frac{a}{b}.$$

In einem Viereck $ABCD$ finden zwischen den von den Seiten und Diagonalen eingeschlossenen Winkeln die folgenden Relationen Statt:

$$\frac{\cot BAD + \cot BDA}{\cot DAC - \cot DAB} = \frac{\cot CAB - \cot ADB + \cot ACB - \cot DAB}{\cot DAB + \cot DCA}$$

$$= \frac{\cot BDA - \cot BCA}{\cot DBA - \cot DCA} = \frac{\cot BDC + \cot BCA}{\cot DCA + \cot DBC}.$$

G. Zachariae

in „Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af Camillo Tychsen. Anden Raekke. Femte Aargang. Syvende — Ottende Hefte. 1869. pag. 128."

Für $P_x = 1.3.5\ldots(2x-1)$ ist:

$$xP_{x-1} + \frac{x(x-1)}{2} 2 . P_{x-2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3} 2^2 . P_{x-3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x(x-1)\ldots 1}{x} 2^{x-1} = P_x(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2x-1}).$$

Sylvester.

Geometrisches Sinnen-Confect von Paul Halcken.

(Fortsetzung von Nr. XVIII.)

12. Von einem scalenischen Triangul ABC thut die Seite AB und das grössere Stück CD der in D zertheilten Baseos BC zusammen 37. Die Seite AC und BD thun zusammen 33. und wann in

diesem Triangul ein Circkel geschrieben wird, thut dessen Diameter 12. Ist die Frage nach den dreyen Seiten dieses Trianguli? Facit *AB* 17. *AC* 25. *BC* 28.

13. Von einem andern schratwinckelten Triangul, thut die Perpendicular-Linie (*AD* auf *BC*) 60. Die Seite *AB* hält 8 mehr als die Basis *BC*. und die Seite *AC* hält 3 mehr als *AB*. Wie viel hält jede Seite besonders? Fac. *AB* 65. *BC*. 57. und *AC* 68.

14. In dem Dreieck *ABC* hält *AB* 13. *BC* 14. *AC* 15. Man soll den Punct *E* solcher Gestalt setzen, dass die drey Perpendiculares *EF, EG, EH* auf die Seiten *BC, AB, AC* des Dreiecks *ABC*, in proportione dupla gegen einander stehen. Wieviel Facit kan man hierauff finden. Antwort 6.

15. Von einem Triangul thun die 2 Seiten 7 und 9. Man begehret hierzu die dritte Seite zu suchen, dass der Inhalt rational sei. Facit entweder $\sqrt{54\frac{2}{5}}$ oder $\sqrt{205\frac{3}{5}}$. Der Inhalt thut beydesmahl $25\frac{1}{5}$. Und viel andere Facit mehr.

16. Von dem Triangul *ABC* thut *AB* 13. *BC* 14. *AC* 15. Man begehrt den Punct *E* zu suchen, dass wann aus demselben auff jede Seite ein Perpendicular gezogen wird, dass deren Summa so viel sey, als die Perpendicular *AD* 12. von *A* auf *BC*, und das jede Perpendicular ein rational Quadrat sey. Facit *EF* (auf *BC*) $11\frac{1}{9}$. *GE* (auf *AB*) $\frac{4}{9}$ und *HE* (auf *AC*) $\frac{4}{9}$. Oder *EF* $\frac{4}{81}$. *GE* $\frac{484}{81}$, *HE* $\frac{484}{81}$ und viel andere Facit mehr.

17. In dem vorigen Triangul da *AB* 13. *BC* 14. und *AC* 15 hält, sollen die drey Perpendiculares *EF, EG, EH* drey ungleiche rationale Quadraten seyn. Fac. *EF* 4900. *EG* 23104. *EH* 144. jede getheilt in 2209 und viel andere mehr.

(Fortsetzung folgt später.)

Druckfehler in Theil I.

S. 224. Z. 18. Statt „und ihrer" s. m. „und in ihrer".

S. 247. „ 13. „ „knüpft, ist zu enthalten" s. m. „knüpft ist, zu enthalten".

Theil II. S. 195. Z. 7. Statt „*GR* || *OH*" s. m. „*ER* || *OH*".

XXXIV.

Theorie des Polarplanimeters in strenger elementar-mathematischer Entwickelung.

Von

dem Herausgeber.

(Figuren s. Taf. VIII.)

Einleitung.

Zu den interessantesten, merkwürdigsten und nützlichsten Erfindungen der neueren Zeit gehören unstreitig die unter dem allgemeinen Namen Planimeter bekannten Instrumente, welche für die niedere Geodäsie oder die Feldmesskunst von der grössten Wichtigkeit sind, und in dieselbe immer allgemeineren Eingang finden sollten, als dies bis jetzt der Fall zu sein scheint. Unter den verschiedenen Instrumenten dieser Art nimmt jedenfalls der Amsler'sche Polarplanimeter — wenn derselbe auch rücksichtlich der von ihm gewährten Genauigkeit anderen Planimetern etwas nachstehen dürfte — wegen der ihm zu Grunde liegenden sinnreichen Idee, wegen seiner Einfachheit und Wohlfeilheit, eine der ersten Stellen ein. Die Theorie dieses interessanten Instruments ist schon oft zu entwickeln versucht worden, namentlich auch von seinem verdienten Erfinder selbst in der Schrift: Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhalts, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter. Von Jacob Amsler, Professor am Gymnasium in Schaffhausen. Schaffhausen. 1856. Mir scheinen jedoch die bisher bekannt gewordenen Entwickelungen dieser Theorie in Bezug auf Deutlichkeit und wahre mathematische Strenge noch Vieles zu wünschen übrig zu lassen. Häufig sind diese Entwickelungen auf

die höhere Analysis gegründet worden, was mir aber verschiedenen Bedenken zu unterliegen scheint, und zwar nicht bloss methodischen — insofern etwa eine solche Methode nicht den Namen einer elementaren Methode verdienen dürfte — sondern auch wissenschaftlichen Bedenken, worüber ich mich jetzt nicht ausführlich aussprechen, sondern nur in der Kürze bemerken will, dass alle Anwendungen der höheren Analysis, zunächst namentlich der Differentialrechnung, auf der unabweisbaren Voraussetzung beruhen, dass die Veränderungen der zur Betrachtung kommenden Grössen mit einer gewissen bestimmten Gesetzmässigkeit stetig vor sich gehen, dass also die Umfänge der Figuren, deren Flächeninhalte bestimmt werden sollen, nach bestimmten allgemeinen Gesetzen gekrümmt sind, oder dass die entsprechenden Curven durch bestimmte analytische Gleichungen charakterisirt werden können, was bei den mit dem Planimeter zu umfahrenden Figuren fast niemals der Fall ist. Ich finde hierin Veranlassung, in dieser Abhandlung eine neue Entwickelung der Theorie des Polarplanimeters zu geben, welcher ich wohl den Namen einer elementaren Theorie glaube beilegen zu dürfen; da aber diese Theorie hauptsächlich auf der Betrachtung gewisser Gränzen beruhet, mittelst welcher man ja in solchen Fällen meistens nur mit wirklicher mathematischer Strenge zu vollkommener Klarheit gelangen kann: so werde ich im nächsten Paragraphen zuerst einige Sätze beweisen, die — wenn auch natürlich längst bekannt und schon oftmals bewiesen — doch gerade den Lesern, welche an dem Inhalte dieser Abhandlung das meiste Interesse nehmen dürften, nicht allgemein genug bekannt sein möchten. Ohne eine genaue Bekanntschaft mit diesen Sätzen, insbesondere mit dem letzten derselben, ist bei sehr vielen Untersuchungen, welche auf Gränzenbetrachtungen beruhen, wahre mathematische Strenge und Evidenz gar nicht erreichbar.

Die Einrichtung und den Gebrauch des Polarplanimeters setze ich im Folgenden als bekannt voraus, und begnüge mich, in dieser Rücksicht auf die bekannten ausgezeichneten neueren Werke über Praktische Geometrie von: Hartner (Handbuch der niederen Geodäsie.. Dritte Auflage. Wien. 1864. S. 490.), — Bauernfeind (Elemente der Vermessungskunde. Dritte Auflage. Stuttgart. 1869. S. 560.) — Hunäus (Lehrbuch der praktischen Geometrie. Zweite Auflage. Hannover. 1868. S. 476.) — Rebstein (Lehrbuch der praktischen Geometrie. Frauenfeld. 1868. S. 85.) — zu verweisen. In dem ersten Buche findet man die Einrichtung von Miller und Starke

in Wien, in den drei letzten die Einrichtung von Amsler in Schaffhausen beschrieben. Hier will ich nur bemerken, dass dieses Instrument in seinen wesentlichsten Theilen aus zwei um einen Punkt beweglichen Armen besteht; der Endpunkt eines jeden dieser beiden Arme trägt einen Stift, von denen der eine der Pol, der andere der Fahrstift genannt wird. Der Pol wird in einem an sich beliebigen Punkte der Ebene, auf welcher die zu messende Figur verzeichnet ist, festgestellt, und hierauf der Fahrstift auf dem Umfange der Figur herumgeführt, bei welcher Bewegung der Punkt, um den die beiden Arme sich drehen, sich auf einem Kreise bewegt, dessen Mittelpunkt der feststehende Pol, und dessen Halbmesser der den Pol tragende Arm ist. An dem den Fahrstift tragenden Arme befindet sich die mit grösster Leichtigkeit drehbare Laufrolle, auf deren Umfang eine Theilung aufgetragen ist, welche, nachdem der Fahrstist auf dem Umfange der auszumessenden Figur herumgeführt worden ist, mittelst eines Nonius abgelesen wird, und dadurch unmittelbar der Inhalt der Figur in einem im Voraus festgesetzten Maasse, welchem entsprechend jederzeit dem Arme, an welchem der Fahrstift befindlich ist, vor der Ausführung der beschriebenen Manipulation eine bestimmte Länge gegeben werden muss, erhalten wird.

Ich bemerke nochmals, dass es mir in dieser Abhandlung nur auf eine völlig strenge und deutliche Entwickelung der mathematischen Sätze ankommt, welche der Theorie des Polarplanimeters zu Grunde liegen, welche ich zugleich als eine sehr lehrreiche Anwendung der strengen elementaren Lehre von den Gränzen betrachte, und auch in dieser Beziehung den Mathematikern zur Beachtung empfehlen möchte. Gerade in Fällen wie der vorliegende gewähren strenge elementare Gränzenbetrachtungen vorzügliche Deutlichkeit, und lassen einen besonders klaren Blick in die eigentliche Natur des Gegenstandes thun.

---

§. 1.

Wir werden bei der Theorie des Polarplanimeters von den folgenden Sätzen Gebrauch machen:

I. Wenn x einen positiven Kreisbogen bezeichnet, so ist immer $\sin x < x$, und, unter der Voraussetzung, dass x nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, $\tan x > x$.

Weil bekanntlich die gerade Linie die kürzeste Linie zwischen ihren Endpunkten ist, so ist

$$\text{Chord}\,2x < 2x,$$

also auch:

$$\tfrac{1}{2}\text{Chord}\,2x < x;$$

bekanntlich ist aber:

$$\sin x = \tfrac{1}{2}\text{Chord}\,2x,$$

also $\sin x < x$, w. z. b. w.

Ist ferner $AB = x$, in einem aus dem Mittelpunkte C mit dem der Einheit gleichen Halbmesser $CA = CB$ beschriebenen Kreise, ein den vierten Theil der Peripherie nicht übersteigender Kreisbogen, und denkt man sich die Tangente $AD = \text{tang}\,x$ dieses Kreisbogens construirt; so ist offenbar:

$$\Delta ACD > \text{Sect}\,ACB;$$

also, weil nach den Lehren der ebenen Geometrie bekanntlich

$$\Delta ACD = \tfrac{1}{2}CA \times AD, \quad \text{Sect}\,ACB = \tfrac{1}{2}CA \times AB$$

ist:

$$\tfrac{1}{2}CA \times AD > \tfrac{1}{2}CA \times AB,$$

folglich $AD > AB$, oder nach dem Obigen $\text{tang}\,x > x$, w. z. b. w.

II. Wenn der Bogen x sich der Null nähert, so nähert der Bruch $\frac{\sin x}{x}$ sich der Einheit als seiner Gränze, und kann dieser Gränze beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt, was man in der Kürze auch auf folgende Art auszudrücken pflegt: wenn x sich in's Unendliche der Null nähert, so ist

$$\text{Limes}\,\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{oder} \quad \text{Lim}\,\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Nehmen wir zuerst x positiv an und setzen voraus, dass bei der Annäherung zur Null x kleiner als $\tfrac{1}{2}\pi$ geworden sei und sich dann fernerhin der Null nähere, so ist natürlich:

$$\sin x = \sin x = \sin x,$$

und nach I. ist:

$$\sin x < x < \text{tang}\,x,$$

also durch Division:

$$\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\text{tang}\,x},$$

folglich:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

so dass also der Bruch oder das Verhältniss $\frac{\sin x}{x}$ immer zwischen 1 und $\cos x$ liegt. Nähert nun aber x sich der Null, so nähert offenbar $\cos x$ sich bis zu jedem beliebigen Grade der Einheit, und es muss also augenscheinlich das zwischen 1 und $\cos x$ liegende $\frac{\sin x}{x}$ sich um so mehr der Einheit als seiner Gränze bis zu jedem beliebigen Grade nähern.

Wenn x negativ ist, so ist doch

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{(-x)},$$

wo $-x$ positiv ist, und der Satz gilt also nach dem Vorhergehenden offenbar auch in diesem Falle.

III. Es seien $a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ beliebige, dagegen $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots$ Grössen von einerlei Vorzeichen. Bezeichnen wir nun die kleinste und grösste unter den Grössen $a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ respective durch α und γ, wobei bemerkt werden mag, dass, wenn die Grössen $a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ sämmtlich einander gleich sind, die Grössen α und γ mit einander und mit den Grössen $a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ zusammenfallen; so sind, insofern wir die Null als dem Bereiche der positiven Grössen angehörend betrachten können, sowohl die Differenzen

$$a-\alpha, \quad a_1-\alpha, \quad a_2-\alpha, \quad a_3-\alpha, \ldots$$

als auch die Differenzen

$$\gamma-a, \quad \gamma-a_1, \quad \gamma-a_2, \quad \gamma-a_3, \ldots$$

sämmtlich positiv, und da nun nach der Voraussetzung die Grössen $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots$ sämmtlich einerlei Vorzeichen haben, so haben auch die sämmtlichen Producte

$$(a-\alpha)\varrho, \quad (a_1-\alpha)\varrho_1, \quad (a_2-\alpha)\varrho_2, \quad (a_3-\alpha)\varrho_3, \ldots$$

und

$$(\gamma-a)\varrho, \quad (\gamma-a_1)\varrho_1, \quad (\gamma-a_2)\varrho_2, \quad (\gamma-a_3)\varrho_3, \ldots$$

einerlei Vorzeichen. Weil nun die Summe mehrerer Grössen von einerlei Vorzeichen immer dasselbe Vorzeichen hat, wie diese Grössen, so haben auch die Summen

$$(a-\alpha)\varrho + (a_1-\alpha)\varrho_1 + (a_2-\alpha)\varrho_2 + (a_3-\alpha)\varrho_3 + \cdots$$

und

$$(\gamma-a)\varrho+(\gamma-a_1)\varrho_1+(\gamma-a_2)\varrho_2+(\gamma-a_3)\varrho_3+\ldots,$$

also die Grössen

$$(a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots)-\alpha(\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots)$$

und

$$\gamma(\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots)-(a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots),$$

daher auch die Quotienten

$$\frac{(a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots)-\alpha(\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots)}{\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots}$$

und

$$\frac{\gamma(\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots)-(a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots)}{\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots},$$

also die Grössen

$$\frac{a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots}{\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots}-\alpha$$

und

$$\gamma-\frac{a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots}{\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots}$$

gleiche Vorzeichen.

Wir wollen nun zuerst annehmen, dass keine dieser beiden Grössen verschwinde; dann ist, weil diese Grössen einerlei Vorzeichen haben, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\frac{a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots}{\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots}-\alpha \gtrless 0,$$

$$\gamma-\frac{a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots}{\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots} \gtrless 0;$$

also:

$$\frac{a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots}{\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots} \gtrless \alpha,$$

$$\frac{a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots}{\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots} \lessgtr \gamma;$$

folglich:

$$\alpha \lessgtr \frac{a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots}{\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots} \lessgtr \gamma;$$

wo aber, insofern vorher α als die kleinste von den beiden Grössen α und γ angenommen worden ist, offenbar überall bloss die oberen Zeichen Gültigkeit haben können, weil, wenn die unteren Zeichen gelten sollten, augenscheinlich $\gamma<\alpha$ sein würde.

Ferner wollen wir annehmen, dass die erste der beiden obigen Grössen verschwinde, die zweite nicht verschwinde. Weil

$$\frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \cdots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots} - \alpha$$

verschwindet, dagegen

$$\gamma - \frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \cdots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots}$$

nicht verschwindet, so können die Grössen α und γ nicht einander gleich sein; und da nun γ die grössere von beiden bezeichnet, so muss nothwendig

$$\gamma - \frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \cdots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots} > 0$$

sein. Also ist:

$$\frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \cdots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots} - \alpha = 0,$$

$$\gamma - \frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \cdots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots} > 0;$$

folglich:

$$\frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \cdots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots} = \alpha,$$

$$\frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \cdots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots} < \gamma;$$

oder:

$$\alpha = \frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \cdots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots} < \gamma.$$

Wenn die erste der beiden obigen Grössen nicht verschwindet, die zweite dagegen verschwindet, also

$$\frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \cdots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots} - \alpha$$

nicht verschwindet, dagegen

$$\gamma - \frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \cdots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots}$$

verschwindet, so können die Grössen α und γ nicht einander gleich sein; und da nun α die kleinere von beiden bezeichnet, so muss nothwendig

$$\frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots} - \alpha > 0$$

sein. Also ist:

$$\frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots} - \alpha > 0,$$

$$\gamma - \frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots} = 0,$$

folglich:

$$\frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots} > \alpha,$$

$$\frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots} = \gamma;$$

oder:

$$\alpha < \frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots} = \gamma.$$

Wenn die obigen Grössen beide verschwinden, also

$$\frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots} - \alpha = 0,$$

$$\gamma - \frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots} = 0$$

ist, so ist:

$$\alpha = \frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots} = \gamma.$$

Hiernach kann man nun offenbar im Allgemeinen sagen, dass die Grösse

$$\frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots}$$

nicht kleiner als α und nicht grösser als γ, also nicht kleiner als die kleinste und nicht grösser als die grösste unter den Grössen a, a_1, a_2, a_3, a_4, ... ist.

Jede Grösse, welche nicht kleiner als die kleinste und nicht grösser als die grösste unter mehreren Grössen in beliebiger Anzahl ist, nennt man eine Mittelgrösse zwischen diesen letzteren Grössen; daher kann man nach dem Vorhergehenden den folgenden wichtigen Satz aussprechen:

Wenn a, a_1, a_2, a_3, a_4,... beliebige, dagegen ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4,... Grössen von einerlei Vorzeichen sind, so ist die Grösse

$$\frac{a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots}{\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots}$$

jederzeit eine Mittelgrösse zwischen den Grössen a, a_1, a_2, a_3, a_4,...; was man auch in der Kürze durch

$$\frac{a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots}{\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots}=M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots.)$$

zu bezeichnen pflegt, so dass also auch

$$a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots=(\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots)M.(a,a_1,a_2,a_3,\ldots)$$

ist.

§. 2.

Der Flächeninhalt eines beliebigen Vierecks, dessen Seiten sich nicht durchkreuzen, kann allgemein durch drei seiner Seiten und seine beiden dazwischen liegenden Winkel ausgedrückt werden.

Wenn nämlich die rechtwinkligen Coordinaten der Ecken

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4,\ldots,\quad A_n$$

eines beliebigen Vielecks von n Seiten, dessen Seiten sich nirgends durchkreuzen, durch

$$x_1,\ y_1;\quad x_2,\ y_2;\ x_3,\ y_3;\quad x_4,\ y_4;\ldots;\quad x_n,\ y_n$$

und sein Flächeninhalt durch J bezeichnet werden; so ist bekanntlich *) in völliger Allgemeinheit:

$$\begin{aligned}2J=&\mp x_1(y_n-y_2)\\&\mp x_2(y_1-y_3)\\&\mp x_3(y_2-y_4)\\&\quad\text{u. s. w.}\\&\mp x_{n-1}(y_{n-2}-y_n)\\&\mp x_n(y_{n-1}-y_1),\end{aligned}$$

indem man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem man sich, um den Umfang des Vielecks nach der Ordnung der Ecken A_1, A_2, A_3, A_4,..., A_n zu durchlaufen, in gleichem oder

---

*) M. s. Archiv Thl. XXXVIII. S. 177.

ungleichem Sinne mit der Bewegung von dem positiven Theile der Axe der x an durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin bewegen muss. Bezeichnen wir nun drei gegebene Seiten eines Vierecks durch b, a, c, wo a zwischen b und c liegen soll, und die beiden von a und b, und von a und c eingeschlossenen Winkel respective durch (ab) und (ac); so kann der Ausdruck für den Flächeninhalt des Vierecks durch diese Elemente aus dem obigen allgemeinen Ausdrucke für den Flächeninhalt eines jeden Vielecks auf folgende Art abgeleitet werden. Die an die beiden Seiten b und c stossenden Endpunkte der Seite a bezeichne man durch B und C, und die beiden anderen Endpunkte der Seiten b und c durch B' und C'. Nehmen wir dann B als den Anfang und BC als den positiven Theil der Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an, den positiven Theil der Axe der y aber von der Seite a an nach dem inneren Raume des Vierecks, dessen Seiten bekanntlich als sich nicht durchkreuzend angenommen werden, hin; so sind offenbar die Coordinaten der Punkte

$$B,\quad C,\quad C',\quad B'$$

beziehungsweise:

$$0,\, 0;\quad a,\, 0;\quad a-c\cos(ac),\; c\sin(ac);\quad b\cos(ab),\; b\sin(ab);$$

und nach der obigen allgemeinen Formel ist also, wenn man:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= 0; \\ x_2 &= a, & y_2 &= 0; \\ x_3 &= a-c\cos(ac), & y_3 &= c\sin(ac): \\ x_4 &= b\cos(ab), & y_4 &= b\sin(ab) \end{aligned}$$

setzt, und, wie es unter den gemachten Voraussetzungen erforderlich ist, im Obigen die oberen Zeichen nimmt:

$$\begin{aligned} 2J = &- 0.\{b\sin(ab)-0\} \\ &- a.\{0-c\sin(ac)\} \\ &- \{a-c\cos(ac)\}\{0-b\sin(ab)\} \\ &- b\cos(ab).\{c\sin(ac)-0\}, \end{aligned}$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt:

$$2J = b\{a-c\cos(ac)\}\sin(ab) + c\{a-b\cos(ab)\}\sin(ac),$$

oder:

$$2J = b\{a\sin(ab)-c\cos(ab)\sin(ac)\} + c\{a\sin(ac)-b\cos(ac)\sin(ab)\},$$

oder:

$$2J = ab\sin(ab) + ac\sin(ac) - bc\sin\{(ab)+(ac)\}.$$

Ohne auf die obige allgemeine Formel von den Vielecken zurückzugehen, kann man in elementarerer Weise diese Formel auch leicht aus der Betrachtung einer Figur ableiten.

In Fig. 1. ist nämlich:

$$ab\sin(ab) = 2\Delta BCB',$$

$$ac\sin(ac) = 2\Delta BCC',$$

$$bc\sin\{(ab)+(ac)\} = \left\{\begin{array}{c}(v-u)(v'-u')\sin(180^0+\omega)\\ \text{oder}\\ (u-v)(u'-v')\sin(180^0-\omega)\end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{c}-(u-v)(u'-v')\sin\omega\\ \text{oder}\\ +(u-v)(u'-v')\sin\omega\end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{c}-uu'\sin\omega - vv'\sin\omega + uv'\sin\omega + vu'\sin\omega\\ \text{oder}\\ +uu'\sin\omega + vv'\sin\omega - uv'\sin\omega - vu'\sin\omega\end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{c}-2\Delta BOC - 2\Delta B'OC' + 2\Delta BOC' + 2\Delta B'OC\\ \text{oder}\\ +2\Delta BOC + 2\Delta B'OC' - 2\Delta BOC' - 2\Delta B'OC.\end{array}\right.$$

Also ist:

$$ab\sin(ab) + ac\sin(ac) - bc\sin\{(ab)+(ac)\}$$

$$= \left\{\begin{array}{l}2\Delta BCB'\\ +2\Delta BCC'\\ +2\Delta BOC\\ +2\Delta B'OC'\\ -2\Delta BOC'\\ -2\Delta B'OC\end{array}\right. \quad \text{oder} \quad = \left\{\begin{array}{l}2\Delta BCB'\\ +2\Delta BCC'\\ -2\Delta BOC\\ -2\Delta B'OC'\\ +2\Delta BOC'\\ +2\Delta B'OC\end{array}\right.$$

$$=\left\{\begin{array}{l} 2\Delta BCB' \\ +2\Delta BCC' \\ +2\Delta BOC \\ +2\Delta BOC \\ +2BCB'C' \\ -2\Delta BOC \\ -2\Delta BCC' \\ -2\Delta BOC \\ -2\Delta BCB' \end{array}\right. \quad \text{oder} \quad =\left\{\begin{array}{l} 2\Delta BCB' \\ +2\Delta BCC' \\ -2\Delta BOC \\ -2\Delta BOC \\ +2BCB'C' \\ +2\Delta BOC \\ -2\Delta BCC' \\ +2\Delta BOC \\ -2\Delta BCB' \end{array}\right.$$

folglich allgemein:

$$2BCB'C' = ab\sin(ab) + ac\sin(ac) - bc\sin\{(ab)+(ac)\}.$$

Für Vierecke mit sich durchkreuzenden Seiten wie in Fig. 2. ist:

$$ab\sin(ab) = 2\Delta BCB',$$
$$ac\sin(ac) = 2\Delta BCC',$$

$$bc\sin\{(ab)+(ac)\} = bc\sin\omega$$
$$= (u+v)(u'+v')\sin\omega$$

$$= uu'\sin\omega + vv'\sin\omega + uv'\sin\omega + vu'\sin\omega$$
$$= 2\Delta BOC + 2\Delta B'OC' + 2\Delta BOC' + 2\Delta B'OC,$$

also:

$$ab\sin(ab) + ac\sin(ac) - bc\sin\{(ab)+(ac)\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l} 2\Delta BCB' \\ +2\Delta BCC' \\ -2\Delta BOC \\ -2\Delta B'OC' \\ -2\Delta BOC' \\ -2\Delta B'OC \end{array}\right.$$

$$=\left\{\begin{array}{l} 2\Delta BOC \\ +2\Delta B'OC \\ +2\Delta BOC \\ +2\Delta BOC' \\ -2\Delta BOC \\ -2\Delta B'OC' \\ -2\Delta BOC' \\ -2\Delta B'OC \end{array}\right.$$

$$= 2\Delta BOC - 2\Delta B'OC' = 2(\Delta BOC - \Delta B'OC').$$

Hiernach ist also für ein Viereck mit sich nicht durchkreuzenden Seiten:

$$ab\sin(ab) + ac\sin(ac) - bc\sin\{(ab) + (ac)\}$$
$$= \begin{cases} 2(\Delta B'OC' - \Delta BOC) \\ \text{oder} \\ 2(\Delta BOC - \Delta B'OC'); \end{cases}$$

für ein Viereck mit sich durchkreuzenden Seiten ist dagegen:

$$ab\sin(ab) + ac\sin(ac) - bc\sin\{(ab) + (ac)\}$$
$$= 2(\Delta BOC - \Delta B'OC').$$

§. 3.

Um den Mittelpunkt O (Fig. 3. — Fig. 6.) denken wir uns mit dem gegebenen Halbmesser R einen Kreis beschrieben, nehmen in dessen Peripherie einen Punkt A an, und ziehen den Halbmesser OA, welchen wir hierauf von OA an eine Drehung um den 180° nicht übersteigenden Winkel AOB erleiden lassen, und uns dadurch in die Lage OB übergeführt denken. Jenachdem die Drehung des Halbmessers von OA an nach der rechten oder linken Seite *) hin erfolgt ist, betrachten wir den Winkel AOB als positiv oder negativ, und bezeichnen den, diesen Winkel messenden mit demselben Zeichen wie den Winkel genommenen Kreisbogen in einem mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreise durch φ. Nun ziehen wir die Sehne AB, und beschreiben über derselben als Grundlinie ein Parallelogramm $ABCD$, dessen durch A und B gehende einander parallele Seiten AC und BD die gegebene Länge r haben. Dem Flächeninhalte dieses Parallelogramms geben wir mit φ gleiches oder ungleiches Vorzeichen, jenachdem es mit dem Mittelpunkte O des mit dem Halbmesser R beschriebenen Kreises auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite der Sehne AB liegt. Ferner lassen wir die Seite BD des Parallelogramms $ABCD$ um B eine Drehung erleiden, wodurch dieselbe in die Lage BE kommt, und, wenn DE gezogen wird, das gleichschenklige Dreieck DBE entsteht, dessen Flächeninhalt wir als positiv oder negativ betrachten, jenachdem die Drehung von BD um B in gleichem oder ungleichem Sinne mit der

*) Selbstverständlich kann man diese Seiten auch mit einander verwechseln; nur die Betrachtung der Figuren erforderte eine solche bestimmte Annahme wie oben.

Drehung von OA um O nach der rechten Seite hin erfolgt ist. Die Winkel, welche die Linien AC und BE beziehungsweise mit den Halbmessern AO und BO des mit dem Halbmesser R um O beschriebenen Kreises einschliessen, zählen wir von diesen Halbmessern an stets nach der rechten Seite hin von 0 bis 360°, und bezeichnen die, dieselben messenden Kreisbogen in einem mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreise beziehungsweise durch ω und ω_1. Endlich ziehen wir noch die Linie CE, wodurch das Viereck $ABCE$ entsteht, dessen Flächeninhalte wir stets mit dem Parallelogramme $ABCD$ gleiches Vorzeichen beilegen. Die mit den ihnen nach dem Vorhergehenden zukommenden Vorzeichen genommenen Flächeninhalte des Parallelogramms $ABCD$, des Dreiecks DBE und des Vierecks $ABCE$ werden wir im Folgenden beziehungsweise durch P, Δ, V bezeichnen.

In dem in Fig. 3. dargestellten Falle ist offenbar, wenn wir die Winkel immer durch ihre Bogenmaasse ausdrücken, und die oberen und unteren Zeichen im Folgenden stets beziehungsweise dem ersten und zweiten Theile der betreffenden Figur entsprechen lassen:

$$AB = 2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi;$$

$$\angle BAC = \omega - (\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi) = \omega + \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\angle ABD = \pi - (\omega + \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{3}{2}\pi - (\omega + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$\angle ABE = 2\pi - \omega_1 - (\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi) = \tfrac{3}{2}\pi - (\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$\pm\angle DBE = \{\tfrac{3}{2}\pi - (\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi)\} - \{\tfrac{3}{2}\pi - (\omega + \tfrac{1}{2}\varphi)\} = \omega - \omega_1 + \varphi,$$

$$\angle DBE = \pm(\omega - \omega_1 + \varphi).$$

Also ist:

$$P = 2rR\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin(\omega + \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\pi) = -\,2rR\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos(\omega + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$\pm 2\Delta = r^2\sin\{\pm(\omega - \omega_1 + \varphi)\},\quad 2\Delta = r^2\sin(\omega - \omega_1 + \varphi);$$

und nach §. 2. ist:

$$\begin{aligned}2V = \quad & r\{2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi - r\cos(\tfrac{3}{2}\pi - (\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi))\}\sin(\omega + \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\pi)\\ & + r\{2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi - r\cos(\omega + \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\pi)\}\sin(\tfrac{3}{2}\pi - (\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi)),\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}2V = & -r\{2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi + r\sin(\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi)\}\cos(\omega + \tfrac{1}{2}\varphi)\\ & - r\{2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi - r\sin(\omega + \tfrac{1}{2}\varphi)\}\cos(\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi),\end{aligned}$$

oder:

$$2V = r^2 \sin(\omega - \omega_1 + \varphi) - 2rR \sin \tfrac{1}{2}\varphi \{\cos(\omega + \tfrac{1}{2}\varphi) + \cos(\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi)\}$$
$$= r^2 \sin(\omega - \omega_1 + \varphi) - 4rR \sin \tfrac{1}{2}\varphi \cos \tfrac{1}{2}(\omega + \omega_1) \cos \tfrac{1}{2}(\omega - \omega_1 + \varphi).$$

In dem in Fig. 4. dargestellten Falle ist:

$$AB = -2R \sin \tfrac{1}{2}\varphi;$$
$$\angle BAC = 2\pi - \omega - (\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi) = \tfrac{3}{2}\pi - (\omega + \tfrac{1}{2}\varphi),$$
$$\angle ABD = \pi - \{\tfrac{3}{2}\pi - (\omega + \tfrac{1}{2}\varphi)\} = \omega + \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$\angle ABE = \omega_1 - (\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi) = \omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$\pm \angle DBE = (\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\pi) - (\omega + \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\pi) = \omega_1 - \omega - \varphi,$$
$$\angle DBE = \mp(\omega - \omega_1 + \varphi).$$

Also ist:

$$-P = -2rR \sin\tfrac{1}{2}\varphi \sin\{\tfrac{3}{2}\pi - (\omega + \tfrac{1}{2}\varphi)\}, \quad P = -2rR \sin\tfrac{1}{2}\varphi \cos(\omega + \tfrac{1}{2}\varphi),$$
$$\mp 2\Delta = r^2 \sin\{\mp(\omega - \omega_1 + \varphi)\}, \quad 2\Delta = r^2 \sin(\omega - \omega_1 + \varphi);$$

und nach §. 2. ist:

$$-2V = r\{-2R \sin\tfrac{1}{2}\varphi - r\cos(\tfrac{3}{2}\pi - (\omega + \tfrac{1}{2}\varphi))\} \sin(\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\pi)$$
$$+ r\{-2R \sin\tfrac{1}{2}\varphi - r\cos(\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\pi)\} \sin(\tfrac{3}{2}\pi - (\omega + \tfrac{1}{2}\varphi)),$$

also:

$$2V = -r\{2R \sin\tfrac{1}{2}\varphi - r\sin(\omega + \tfrac{1}{2}\varphi)\} \cos(\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$- r\{2R \sin\tfrac{1}{2}\varphi + r\sin(\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi)\} \cos(\omega + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

oder:

$$2V = r^2 \sin(\omega - \omega_1 + \varphi) - 2rR \sin \tfrac{1}{2}\varphi \{\cos(\omega + \tfrac{1}{2}\varphi) + \cos(\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi)\}$$
$$= r^2 \sin(\omega - \omega_1 + \varphi) - 4rR \sin \tfrac{1}{2}\varphi \cos \tfrac{1}{2}(\omega + \omega_1) \cos \tfrac{1}{2}(\omega - \omega_1 + \varphi).$$

In dem in Fig. 5. dargestellten Falle ist:

$$AB = 2R \sin \tfrac{1}{2}\varphi;$$
$$\angle BAC = 2\pi - \omega + (\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi) = \tfrac{5}{2}\pi - (\omega + \tfrac{1}{2}\varphi),$$
$$\angle ABD = \pi - \{\tfrac{5}{2}\pi - (\omega + \tfrac{1}{2}\varphi)\} = \omega + \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{3}{2}\pi,$$
$$\angle ABE = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi - (2\pi - \omega_1) = \omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{3}{2}\pi,$$
$$\pm \angle DBE = (\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{3}{2}\pi) - (\omega + \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{3}{2}\pi) = \omega_1 - \omega - \varphi,$$
$$\angle DBE = \mp(\omega - \omega_1 + \varphi).$$

Also ist:

$$-P = 2rR \sin\tfrac{1}{2}\varphi \sin\{\tfrac{5}{2}\pi - (\omega + \tfrac{1}{2}\varphi)\}, \quad P = -2rR \sin\tfrac{1}{2}\varphi \cos(\omega + \tfrac{1}{2}\varphi),$$
$$\mp 2\Delta = r^2 \sin\{\mp(\omega - \omega_1 + \varphi)\}, \quad 2\Delta = r^2 \sin(\omega - \omega_1 + \varphi);$$

und nach §. 2. ist:

$$-2V = r\{2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi - r\cos(\tfrac{3}{2}\pi-(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi))\}\sin(\omega_1-\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{3}{2}\pi)$$
$$+r\{2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi - r\cos(\omega_1-\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{3}{2}\pi)\}\sin(\tfrac{5}{2}\pi-(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi)),$$

also:

$$2V = -r\{2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi - r\sin(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi)\}\cos(\omega_1-\tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$-r\{2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi + r\sin(\omega_1-\tfrac{1}{2}\varphi)\}\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi),$$

oder:

$$2V = r^2\sin(\omega-\omega_1+\varphi) - 2rR\sin\tfrac{1}{2}\varphi\{\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi)+\cos(\omega_1-\tfrac{1}{2}\varphi)\}$$
$$= r^2\sin(\omega-\omega_1+\varphi) - 4rR\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1+\varphi).$$

In dem in Fig. 6. dargestellten Falle ist:

$$AB = -2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi;$$

$$\angle BAC = \tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}\varphi-(2\pi-\omega) = \omega+\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{3}{2}\pi,$$
$$\angle ABD = \pi-(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{3}{2}\pi) = \tfrac{5}{2}\pi-(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi),$$
$$\angle ABE = \tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}\varphi+2\pi-\omega_1 = \tfrac{5}{2}\pi-(\omega_1-\tfrac{1}{2}\varphi),$$
$$\pm\angle DBE = \{\tfrac{5}{2}\pi-(\omega_1-\tfrac{1}{2}\varphi)\}-\{\tfrac{5}{2}\pi-(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi)\} = \omega-\omega_1+\varphi,$$
$$\angle DBE = \pm(\omega-\omega_1+\varphi).$$

Also ist:

$$P = -2rR\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{3}{2}\pi) = -2rR\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi),$$
$$\pm 2\Delta = r^2\sin\{\pm(\omega-\omega_1+\varphi)\},\quad 2\Delta = r^2\sin(\omega-\omega_1+\varphi);$$

und nach §. 2. ist:

$$2V = r\{-2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi - r\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{3}{2}\pi)\}\sin(\tfrac{5}{2}\pi-(\omega_1-\tfrac{1}{2}\varphi))$$
$$+r\{-2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi - r\cos(\tfrac{5}{2}\pi-(\omega_1-\tfrac{1}{2}\varphi))\}\sin(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{3}{2}\pi),$$

also:

$$2V = -r\{2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi - r\sin(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi)\}\cos(\omega_1-\tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$-r\{2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi + r\sin(\omega_1-\tfrac{1}{2}\varphi)\}\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi),$$

oder:

$$2V = r^2\sin(\omega-\omega_1+\varphi) - 2rR\sin\tfrac{1}{2}\varphi\{\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi)+\cos(\omega_1-\tfrac{1}{2}\varphi)\}$$
$$= r^2\sin(\omega-\omega_1+\varphi) - 4rR\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1+\varphi).$$

Hiernach hat man die ganz allgemein gültigen Gleichungen;

$$P = -2rR\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi),$$
$$2\Delta = r^2\sin(\omega-\omega_1+\varphi)$$

und:

$$2V = r^2 \sin(\omega - \omega_1 + \varphi) - 2rR \sin\tfrac{1}{2}\varphi\,\{\cos(\omega + \tfrac{1}{2}\varphi) + \cos(\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi)\},$$

aus denen sich auf der Stelle die ganz allgemein gültige Gleichung:

$$(P + \Delta) - V = rR \sin\tfrac{1}{2}\varphi\,\{\cos(\omega_1 - \tfrac{1}{2}\varphi) - \cos(\omega + \tfrac{1}{2}\varphi)\}$$

oder:

$$(P + \Delta) - V = 2rR \sin\tfrac{1}{2}\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega_1) \sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_1 + \varphi)$$

ergiebt.

Aus diesen Gleichungen wollen wir nun einige Sätze ableiten, auf denen die Theorie des Polarplanimeters lediglich beruhet, und die unmittelbar zu derselben führen.

§. 4.

Wir wollen jetzt annehmen, dass der Halbmesser OA nach einer gewissen Seite hin einen beliebigen, aber bestimmten Winkel Φ beschrieben habe. Diesen Winkel theilen wir, wenn n eine positive ganze Zahl bezeichnet, in n gleiche Theile, und setzen der Kürze wegen:

$$\frac{\Phi}{n} = \varphi,$$

wo n jedenfalls so gross genommen gedacht werden soll, dass der absolute Werth von φ nicht grösser als π ist. Für einen jeden dieser durch φ bezeichneten Theile machen wir eine der im vorhergehenden Paragraphen ausgeführten Construction ganz analoge Construction, aber in solcher Weise, dass alle diese einzelnen Constructionen sich in stetiger Folge an einander anschliessen, so dass also, wenn die dem ersten der Winkel φ entsprechende Construction von der Geraden AC ausgeht, die dem zweiten der Winkel φ entsprechende Construction von der Geraden BE ihren Ausgang zu nehmen hat, und so fort für alle Winkel φ bis zu Ende. Dadurch ergiebt sich eine Reihe von Winkeln

$$\omega,\quad \omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3, \ldots, \omega_n,$$

welche den im vorhergehenden Paragraphen durch ω, ω_1 bezeichneten Winkeln analog sind, so dass nämlich diesen Winkeln nach und nach die Winkel

$$\omega,\ \omega_1;\quad \omega_1,\ \omega_2;\quad \omega_2,\ \omega_3;\quad \omega_3,\ \omega_4;\ldots;\quad \omega_{n-1},\ \omega_n$$

entsprechen. Nun aber legen wir allen unseren folgendeu Betrachtungen die Voraussetzung zu Grunde, dass wir zu der Annahme berechtigt sind, dass diese Winkel, wenn wir n in's Unendliche wachsen lassen, immer genauer und genauer in stetiger Folge fortschreiten, und dass ausserdem, wie auch n sich ändern möge, die Winkel ω, ω_n immer dieselbe Grösse behalten, in welcher Rücksicht wir dieselben im Folgenden auch durch ω, Ω bezeichnen werden, wo also ω, Ω von n nicht abhängen. Die Werthe der im vorhergehenden Paragraphen durch

$$P,\quad \Delta,\quad V$$

bezeichneten Grössen werden wir im Folgenden für die einzelnen auf einander folgenden Winkel φ nach der Reihe beziehungsweise durch

$$P_1,\quad P_2,\quad P_3,\quad P_4,\ldots,\quad P_n;$$

$$\Delta_1,\quad \Delta_2,\quad \Delta_3,\quad \Delta_4,\ldots,\quad \Delta_n;$$

$$V_1,\quad V_2,\quad V_3,\quad V_4,\ldots,\quad V_n$$

bezeichnen.

§. 5.

Unter den im vorhergehenden Paragraphen gemachten Voraussetzungen wollen wir nun zuerst die Summe

$$\Sigma\{(P+\Delta)-V\}$$

der im Allgemeinen durch $(P+\Delta)-V$ zu bezeichnenden Grössen einer genauen Betrachtung unterwerfen, indem wir insbesondere untersucheu werden, ob diese Summe sich, wenn n in's Unendliche wächst, einer bestimmten Gränze nähert, und welches, insofern dies der Fall ist, diese Gränze ist.

Nach §. 3. ist:

$$(P_1+\Delta_1)-V_1=rR\sin\tfrac{1}{2}\varphi\{\cos(\omega_1-\tfrac{1}{2}\varphi)-\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi)\},$$

$$(P_2+\Delta_2)-V_2=rR\sin\tfrac{1}{2}\varphi\{\cos(\omega_2-\tfrac{1}{2}\varphi)-\cos(\omega_1+\tfrac{1}{2}\varphi)\},$$

$$(P_3+\Delta_3)-V_3=rR\sin\tfrac{1}{2}\varphi\{\cos(\omega_3-\tfrac{1}{2}\varphi)-\cos(\omega_2+\tfrac{1}{2}\varphi)\},$$

u. s. w.

$$(P_n+\Delta_n)-V_n=rR\sin\tfrac{1}{2}\varphi\{\cos(\omega_n-\tfrac{1}{2}\varphi)-\cos(\omega_{n-1}+\tfrac{1}{2}\varphi)\};$$

also, wenn man addirt, wie man folglich übersieht:

$$\Sigma\{(P+\Delta)-V\}$$

$$=rR\sin\tfrac{1}{2}\varphi\left\{\begin{array}{r}2(\sin\omega_1+\sin\omega_2+\sin\omega_3+\ldots.+\sin\omega_{n-1})\sin\tfrac{1}{2}\varphi\\ -\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\varphi)+\cos(\omega_n-\tfrac{1}{2}\varphi)\end{array}\right\},$$

folglich:

$$\Sigma\{(P+\Delta)-V\}$$

$$=rR\Phi\frac{\sin\frac{\Phi}{2n}}{\frac{\Phi}{2n}}\left\{\begin{array}{l}\frac{\sin\omega_1+\sin\omega_2+\sin\omega_3+\ldots+\sin\omega_{n-1}}{n}\sin\frac{\Phi}{2n}\\ -\frac{\cos(\omega+\frac{\Phi}{2n})}{2n}+\frac{\cos(\Omega-\frac{\Phi}{2n})}{2n}\end{array}\right\}.$$

Nun ist aber der absolute Werth der Summe

$$\sin\omega_1+\sin\omega_2+\sin\omega_3+\ldots+\sin\omega_{n-1}$$

offenbar niemals grösser als $n-1$, und man kann also, wenn ε eine gewisse positive oder negative, absolut genommen die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet, jederzeit

$$\sin\omega_1+\sin\omega_2+\sin\omega_3+\ldots+\sin\omega_{n-1}=(n-1)\varepsilon,$$

folglich nach dem Obigen:

$$\Sigma\{(P+\Delta)-V\}$$

$$=rR\Phi\frac{\sin\frac{\Phi}{2n}}{\frac{\Phi}{2n}}\left\{(1-\frac{1}{n})\varepsilon\sin\frac{\Phi}{2n}-\frac{\cos(\omega+\frac{\Phi}{2n})}{2n}+\frac{\cos(\Omega-\frac{\Phi}{2n})}{2n}\right\}$$

setzen. Lässt man jetzt n in's Unendliche wachsen, so nähern die Grössen

$$(1-\frac{1}{n})\varepsilon\sin\frac{\Phi}{2n},\quad \frac{\cos(\omega+\frac{\Phi}{2n})}{2n},\quad \frac{\cos(\Omega-\frac{\Phi}{2n})}{2n}$$

sich offenbar sämmtlich der Null; also nähert auch die Grösse

$$(1-\frac{1}{n})\varepsilon\sin\frac{\Phi}{2n}-\frac{\cos(\omega+\frac{\Phi}{2n})}{2n}+\frac{\cos(\Omega-\frac{\Phi}{2n})}{2n}$$

sich der Null; nach §. 1. II. nähert die Grösse

$$\frac{\sin\frac{\Phi}{2n}}{\frac{\Phi}{2n}}$$

sich der Einheit, und die Grösse $rR\Phi$ ist constant; also nähert sich, wenn n in's Unendliche wächst, offenbar die Summe

$$\Sigma\{(P+\Delta)-V\}$$

der Null als ihrer Gränze, was zu dem folgenden Satze führt:

Lehrsatz.

Für ein in's Unendliche wachsendes n ist

$$\text{Lim}\,\Sigma\{(P+\Delta)-V\}=0.$$

§. 6.

Ferner wollen wir untersuchen ob für ein in's Unendliche wachsendes n auch die Summe $\Sigma\Delta$ der im Allgemeinen durch Δ zu bezeichnenden Grössen sich einer bestimmten Gränze nähert, und, wenn dies der Fall ist, zugleich diese Gränze selbst bestimmen.

Nach §. 3. ist:

$$\Delta_1=\tfrac{1}{2}r^2\sin(\omega-\omega_1+\frac{\Phi}{n}),$$

$$\Delta_2=\tfrac{1}{2}r^2\sin(\omega_1-\omega_2+\frac{\Phi}{n}),$$

$$\Delta_3=\tfrac{1}{2}r^2\sin(\omega_2-\omega_3+\frac{\Phi}{n}),$$

u. s. w.

$$\Delta_n=\tfrac{1}{2}r^2\sin(\omega_{n-1}-\Omega+\frac{\Phi}{n});$$

also:

$$\Sigma\Delta$$

$$=\tfrac{1}{2}r^2\{\cos(\omega-\omega_1)+\cos(\omega_1-\omega_2)+\cos(\omega_2-\omega_3)+..+\cos(\omega_{n-1}-\Omega)\}\sin\frac{\Phi}{n}$$

$$+\tfrac{1}{2}r^2\{\sin(\omega-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_3)+..+\sin(\omega_{n-1}-\Omega)\}\cos\frac{\Phi}{n},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen:

$$Q = \{\cos(\omega-\omega_1)+\cos(\omega_1-\omega_2)+\cos(\omega_2-\omega_3)+..+\cos(\omega_{n-1}-\Omega)\}\sin\frac{\Phi}{n},$$

$$Q' = \{\sin(\omega-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_3)+..+\sin(\omega_{n-1}-\Omega)\}\cos\frac{\Phi}{n}$$

setzen:

$$\Sigma\Delta = \tfrac{1}{2}r^2(Q+Q').$$

Weil

$$\begin{aligned}
\cos(\omega-\omega_1) &= 1-2\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2,\\
\cos(\omega_1-\omega_2) &= 1-2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2,\\
\cos(\omega_2-\omega_3) &= 1-2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)^2,\\
&\text{u. s. w.}\\
\cos(\omega_{n-1}-\Omega) &= 1-2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_{n-1}-\Omega)^2
\end{aligned}$$

ist; so ist:

$$\begin{aligned}
Q = & \; n\sin\frac{\Phi}{n}\\
& -2\{\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2+\ldots+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_{n-1}-\Omega)^2\}\sin\frac{\Phi}{n}\\
= & \; \Phi\frac{\sin\frac{\Phi}{n}}{\frac{\Phi}{n}}\\
& -2\{\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2+\ldots+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_{n-1}-\Omega)^2\}\sin\frac{\Phi}{n}.
\end{aligned}$$

Weil die n Grössen

$$\sin\frac{\Phi}{n},\quad \sin\frac{\Phi}{n},\quad \sin\frac{\Phi}{n},\ldots,\quad \sin\frac{\Phi}{n}$$

sämmtlich einerlei Vorzeichen haben, so ist nach dem Satze §. 1. III.:

$$\begin{aligned}
& \{\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2+\ldots+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_{n-1}-\Omega)^2\}\sin\frac{\Phi}{n}\\
= & \; \sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2\sin\frac{\Phi}{n}+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2\sin\frac{\Phi}{n}+\ldots\ldots\\
& \ldots\ldots+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_{n-1}-\Omega)^2\sin\frac{\Phi}{n}
\end{aligned}$$

$$= \quad \left\{\sin\frac{\Phi}{n}+\sin\frac{\Phi}{n}+\sin\frac{\Phi}{n}+\ldots+\sin\frac{\Phi}{n}\right\}$$

$$\times M\{\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2,\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2,\ldots,\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_{n-1}-\Omega)^2\}$$

$$= \quad n\sin\frac{\Phi}{n}\,M\{\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2,\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2,\ldots,\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_{n-1}-\Omega)^2\}$$

$$= \quad \Phi\frac{\sin\frac{\Phi}{n}}{\frac{\Phi}{n}}\,M\{\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2,\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2,\ldots,\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_{n-1}-\Omega)^2\}.$$

Lässt man nun n in's Unendliche wachsen, so ist nach dem Satze §. 1. II.:

$$\operatorname{Lim}\frac{\sin\frac{\Phi}{n}}{\frac{\Phi}{n}}=1.$$

Ferner nähern nach den in §. 4. gemachten Voraussetzungen sich offenbar die Grössen

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2,\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2,\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)^2,\ldots,\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_{n-1}-\Omega)^2$$

sämmtlich der Null, und es ist also augenscheinlich auch

$$\operatorname{Lim} M\{\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2,\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2,\ldots,\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_{n-1}-\Omega)^2\}=0.$$

Weil nun Φ eine endliche völlig bestimmte Grösse ist, so ist nach dem Vorstehenden offenbar auch:

$$\operatorname{Lim}.\{\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2+\ldots+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_{n-1}-\Omega)^2\}\sin\frac{\Phi}{n}=0.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$\operatorname{Lim} Q=\Phi.1-2.0,\quad \text{also}\quad \operatorname{Lim} Q=\Phi.$$

Nach dem Obigen ist:

$$Q'=\{\sin(\omega-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_3)+\ldots+\sin(\omega_{n-1}-\Omega)\}\cos\frac{\Phi}{n},$$

und folglich für ein in's Unendliche wachsendes n, weil unter dieser Voraussetzung

$$\operatorname{Lim}\cos\frac{\Phi}{n}=1$$

ist:

$$\operatorname{Lim} Q'=\operatorname{Lim}\{\sin(\omega-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\ldots+\sin(\omega_{n-1}-\Omega)\}$$

insofern es nämlich eine Gränze von

$$\sin(\omega-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_3)+\ldots+\sin(\omega_{n-1}\quad\Omega)$$

wirklich giebt. Es ist aber:

$$\sin(\omega-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_3)+\ldots+\sin(\omega_{n-1}-\Omega)$$

$$= \quad (\omega-\omega_1)\frac{\sin(\omega-\omega_1)}{\omega-\omega_1}$$

$$+(\omega_1-\omega_2)\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\omega_1-\omega_2}$$

$$+(\omega_2-\omega_3)\frac{\sin(\omega_2-\omega_3)}{\omega_2-\omega_3}$$

u. s. w.

$$+(\omega_{n-1}-\Omega)\frac{\sin(\omega_{n-1}-\Omega)}{\omega_{n-1}-\Omega},$$

und haben nun

$$\omega-\omega_1,\quad \omega_1-\omega_2,\quad \omega_2-\omega_3,\ldots,\quad \omega_{n-1}-\Omega$$

sämmtlich gleiche Vorzeichen, so ist nach dem Satze §. 1. III.:

$$\sin(\omega-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_3)+\ldots+\sin(\omega_{n-1}-\Omega)$$

$$= \quad \{(\omega-\omega_1)+(\omega_1-\omega_2)+(\omega_2-\omega_3)+\ldots+(\omega_{n-1}-\Omega)\}$$

$$\times M\left\{\frac{\sin(\omega-\omega_1)}{\omega-\omega_1},\ \frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\omega_1-\omega_2},\ \frac{\sin(\omega_2-\omega_3)}{\omega_2-\omega_3},\ldots,\ \frac{\sin(\omega_{n-1}-\Omega)}{\omega_{n-1}-\Omega}\right\},$$

also:

$$\sin(\omega-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_3)+\ldots+\sin(\omega_{n-1}-\Omega)$$

$$=(\omega-\Omega)\,M\left\{\frac{\sin(\omega-\omega_1)}{\omega-\omega_1},\ \frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\omega_1-\omega_2},\ \frac{\sin(\omega_2-\omega_3)}{\omega_2-\omega_3},\ldots,\ \frac{\sin(\omega_{n-1}-\Omega)}{\omega_{n-1}-\Omega}\right\}.$$

Wenn nun n in's Unendliche wächst, so nähern nach den in §. 4. gemachten Voraussetzungen die Grössen

$$\omega-\omega_1,\quad \omega_1-\omega_2,\quad \omega_2-\omega_3,\ldots,\quad \omega_{n-1}-\Omega$$

sich sämmtlich der Null, also nach dem Satze §. 1. II. die Grössen

$$\frac{\sin(\omega-\omega_1)}{\omega-\omega_1},\quad \frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\omega_1-\omega_2},\quad \frac{\sin(\omega_2-\omega_3)}{\omega_2-\omega_3},\ldots,\quad \frac{\sin(\omega_{n-1}-\Omega)}{\omega_{n-1}-\Omega}$$

sich sämmtlich der Einheit, und es ist also offenbar auch:

$$\operatorname{Lim} M\left\{\frac{\sin(\omega-\omega_1)}{\omega-\omega_1},\ \frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\omega_1-\omega_2},\ \frac{\sin(\omega_2-\omega_3)}{\omega_2-\omega_3},\ldots,\ \frac{\sin(\omega_{n-1}-\Omega)}{\omega_{n-1}-\Omega}\right\}=1,$$

also nach dem Obigen:

$$\operatorname{Lim}\{\sin(\omega-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_3)+\ldots+\sin(\omega_{n-1}-\Omega)\}$$
$$=(\omega-\Omega).1=\omega-\Omega,$$

folglich nach dem Obigen:

$$\operatorname{Lim} Q'=\omega-\Omega.$$

Für jetzt gilt dies nur unter der Vorauseetzung, dass die Grössen

$$\omega-\omega_1,\quad \omega_1-\omega_2,\quad \omega_2-\omega_3,\ldots,\quad \omega_{n-1}-\Omega$$

sämmtlich gleiche Vorzeichen haben, oder dass die Winkel

$$\omega,\quad \omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\ldots,\quad \omega_{n-1},\quad \Omega$$

stets wachsen oder stets abnehmen. Wenn aber diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, so wird man sich doch das Intervall $\omega\ldots\Omega$ immer in eine endliche Anzahl von Intervallen, etwa in die vier Intervalle

$$\omega\ldots\omega_\varkappa,\quad \omega_\varkappa\ldots\omega_\lambda,\quad \omega_\lambda\ldots\omega_\mu,\quad \omega_\mu\ldots\Omega$$

getheilt denken können, in deren jedem die betreffenden Winkel entweder stets wachsen oder stets abnehmen, also die in Rede stehende Voraussetzung erfüllt ist. Bezeichnen wir dann die Summen der Sinus in diesen einzelnen Intervallen beziehungsweise durch

$$S_{\omega\omega_\varkappa},\quad S_{\omega_\varkappa\omega_\lambda},\quad S_{\omega_\lambda\omega_\mu},\quad S_{\omega_\mu\Omega};$$

so ist nach dem vorher Bewiesenen:

$$\operatorname{Lim} S_{\omega\omega_\varkappa}=\omega-\omega_\varkappa,$$

$$\operatorname{Lim} S_{\omega_\varkappa\omega_\lambda}=\omega_\varkappa-\omega_\lambda,$$

$$\operatorname{Lim} S_{\omega_\lambda\omega_\mu}=\omega_\lambda-\omega_\mu,$$

$$\operatorname{Lim} S_{\omega_\mu\Omega}=\omega_\mu-\Omega;$$

folglich:

$$\operatorname{Lim} S_{\omega\omega_\varkappa}+\operatorname{Lim} S_{\omega_\varkappa\omega_\lambda}+\operatorname{Lim} S_{\omega_\lambda\omega_\mu}+\operatorname{Lim} S_{\omega_\mu\Omega}=\omega-\Omega;$$

also, weil offenbar

$$\operatorname{Lim}(S_{\omega\omega_\varkappa}+S_{\omega_\varkappa\omega_\lambda}+S_{\omega_\lambda\omega_\mu}+S_{\omega_\mu\Omega})$$
$$=\operatorname{Lim} S_{\omega\omega_\varkappa}+\operatorname{Lim} S_{\omega_\varkappa\omega_\lambda}+\operatorname{Lim} S_{\omega_\lambda\omega_\varkappa}+\operatorname{Lim} S_{\omega_\mu\Omega}$$

ist, auch:

$$\mathrm{Lim}(S_{\omega\omega_x}+S_{\omega_x\omega_\lambda}+S_{\omega_\lambda\omega_\mu}+S_{\omega_\mu\Omega})=\omega-\Omega;$$

und da nun augenscheinlich

$$\mathrm{Lim}\{\sin(\omega-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_3)+\ldots+(\omega_{n-1}-\Omega)\}$$
$$=\mathrm{Lim}(S_{\omega\omega_x}+S_{\omega_x\omega_\lambda}+S_{\omega_\lambda\omega_\mu}+S_{\omega_\mu\Omega})$$

ist, so ist:

$$\mathrm{Lim}\{\sin(\omega-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_3)+\ldots+\sin(\omega_{n-1}-\Omega)\}$$
$$=\omega-\Omega.$$

Hiernach ist also jetzt in **völliger Allgemeinheit**:

$$\mathrm{Lim}\{\sin(\omega-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_3)+\ldots+\sin(\omega_{n-1}-\Omega)\}$$
$$=\omega-\Omega,$$

und daher nach dem Obigen auch **in völliger Allgemeinheit**:

$$\mathrm{Lim}\,Q'=\omega-\Omega.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\Sigma\Delta=\tfrac{1}{2}r^2(Q+Q')$$

war, so ist für ein in's Unendliche wachsendes n:

$$\mathrm{Lim}\,\Sigma\Delta=\tfrac{1}{2}r^2\mathrm{Lim}(Q+Q')=\tfrac{1}{2}r^2(\mathrm{Lim}\,Q+\mathrm{Lim}\,Q'),$$

folglich nach dem vorher Bewiesenen:

$$\mathrm{Lim}\,\Sigma\Delta=\tfrac{1}{2}r^2(\omega-\Omega+\Phi)\,^{*}),$$

was zu dem folgenden Satze führt:

Lehrsatz.

Für ein in's Unendliche wachsendes n ist:

$$\mathrm{Lim}\,\Sigma\Delta=\tfrac{1}{2}r^2(\omega-\Omega+\Phi).$$

---

*) Es lag nahe, diese Gleichung auf eine etwas einfachere und kürzere Art zu beweisen, was aber verschiedenen Bedenken unterlag, weshalb der obigen weitläufigeren Darstellung der Vorzug gegeben wurde.

§. 7.

Weil offenbar

$$\text{Lim}\,\Sigma(P+\Delta)=\text{Lim}\,\Sigma P+\text{Lim}\,\Sigma\Delta$$

ist, insofern es nämlich eine Gränze $\text{Lim}\,\Sigma P$ wirklich giebt, so ist nach §. 6.:

$$\text{Lim}\,\Sigma(P+\Delta)=\text{Lim}\,\Sigma P+\tfrac{1}{2}r^2(\omega-\Omega+\Phi),$$

wo es dann auch die durch diese Formel bestimmte Gränze $\text{Lim}\,\Sigma(P+\Delta)$ wirklich giebt. Nach §. 5. ist aber:

$$\text{Lim}\,\Sigma\{(P+\Delta)-V\}=0,$$

und giebt es nun wirklich die Gränze $\text{Lim}\,\Sigma P$, nach dem Vorstehenden also auch wirklich die Gränze $\text{Lim}\,\Sigma(P+\Delta)$, so kann man

$$\text{Lim}\,\Sigma\{(P+\Delta)-V\}=\text{Lim}\,\Sigma(P+\Delta)-\text{Lim}\,\Sigma V$$

setzen, und nach dem Vorhergehenden ist folglich:

$$\text{Lim}\,\Sigma(P+\Delta)-\text{Lim}\,\Sigma V=0,$$

also:

$$\text{Lim}\,\Sigma V=\text{Lim}\,\Sigma(P+\Delta),$$

folglich nach dem Obigen:

$$\text{Lim}\,\Sigma V=\text{Lim}\,\Sigma P+\tfrac{1}{2}r^2(\omega-\Omega+\Phi),$$

was zu dem folgenden Satze führt:

Lehrsatz.

Wenn es für ein in's Unendliche wachsendes n die Gränze $\text{Lim}\,\Sigma P$ wirklich giebt, so ist für ein in's Unendliche wachsendes n jederzeit:

$$\text{Lim}\,\Sigma V=\text{Lim}\,\Sigma P+\tfrac{1}{2}r^2(\omega-\Omega+\Phi).$$

Ob es nun für ein in's Unendliche wachsendes n die Gränze $\text{Lim}\,\Sigma P$ wirklich giebt, ob dieselbe sich vielleicht durch ein gewisses Verfahren wirklich bestimmen lässt, wodurch natürlich auch ihre Existenz von selbst nachgewiesen sein würde, werden unsere ferneren Betrachtungen zeigen.

§. 8.

Die Theorie des Polarplanimeters, zu deren Entwickelung wir nun übergehen wollen, setzt voraus, dass, wenn der Fahrstift den

Umfang einer Figur durchläuft, wobei der Endpunkt des um den Pol sich bewegenden Arms immer einen Kreisbogen oder einen ganzen Kreis beschreibt, der den Fahrstift tragende Arm in seine successiven Lagen theils durch eine Parallelbewegung, theils durch eine drehende Bewegung übergeht. Bei der ersten dieser beiden Bewegungen, also bei der Parallelbewegung, wird sich, wie auf der Stelle erhellet, auf dem Umfange der sich drehenden Laufrolle ein Bogen abwickeln, welcher dem senkrechten Abstande der beiden entsprechenden äussersten Lagen des durch Parallelbewegung sich fortbewegt habenden, den Fahrstift tragenden Arms von einander gleich ist. Dagegen wird sich bei der zweiten Bewegung, also bei der drehenden Bewegung, ein zwischen den beiden äussersten Lagen des durch Drehung sich fortbewegt habenden, den Fahrstift tragenden Arms liegender Bogen des Umfangs der sich drehenden Laufrolle abwickeln, welcher zu einem Kreise gehört, dessen Halbmesser der Entfernung des Mittelpunkts der Laufrolle von dem Endpunkte des um den Pol sich drehenden Arms gleich ist. Der Umfang der Laufrolle trägt eine Theilung, und die kleineren oder weiteren Theile der durch die unmittelbare Theilung des Umfangs der Laufrolle gegebenen Theile werden mittelst eines Nonius abgelesen, an welchem hin sich der drehende Umfang der Laufrolle bewegt. Die Bogen der Rolle werden natürlich, jenachdem die Bewegung des den Fahrstift tragenden Arms nach der einen oder nach der anderen Seite hin erfolgt, nach verschiedenen Seiten hin sich abwickeln, und werden selbst als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem die entsprechenden, von dem den Fahrstift tragenden Arme beschriebenen Parallelogramme und gleichschenkligen Dreiecke oder Sectoren nach den im Obigen gegebenen Bestimmungen als positiv oder negativ zu betrachten sind. Abgelesen wird aber die Theilung der Rolle mittelst des Nonius nur zweimal, nämlich am Anfange und Ende der Bewegung des Fahrstifts, und die Differenz der beiden Ablesungen giebt dann offenbar den ganzen, den von dem den Fahrstift tragenden Arme beschriebenen, und mit ihren gehörigen Vorzeichen genommenen Parallelogramme und Dreiecke oder Sectoren entsprechenden abgewickelten Bogen des Umfangs der Rolle.

Wir wollen jetzt, Alles in einer beliebigen Maasseinheit ausgedrückt, die Länge des den Fahrstift tragenden Arms durch r, die Länge des um den Pol sich bewegenden Arms durch R, die Entfernung des Mittelpunkts der Rolle von dem Endpunkte des um den Pol sich bewegenden Arms durch ϱ bezeichnen. Der Inhalt der umfahrenen Figur werde durch J bezeichnet. Ferner

seien, in derselben Maasseinheit ausgedrückt, die beiden abgewickelten Bogen des Umfangs der Rolle, welche der Parallelbewegung und der drehenden Bewegung des den Fahrstift tragenden Arms entsprechen, beziehungsweise $\bar{\omega}$ und θ; so ist offenbar:

$$\text{Lim}\,\Sigma P = r\bar{\omega}\,^{*)} \quad \text{und} \quad \text{Lim}\,\Sigma\Delta = \tfrac{1}{2}.r.\frac{r\theta}{\varrho} = \frac{r^2\theta}{2\varrho}.$$

Wir haben nun zwei Fälle von einander zu unterscheiden, nämlich:

Erstens: Wenn der Pol ausserhalb der umfahrenen Figur angenommen wird.

Zweitens: Wenn der Pol innerhalb der umfahrenen Figur angenommen wird.

Jeden dieser beiden Fälle wollen wir jetzt besonders betrachten.

Erster Fall.

In diesem Falle wird offenbar der eine Theil des Umfangs der umfahrenen Figur mit einer Bewegung des um den Pol sich drehenden Arms nach der positiven Seite hin, der andere Theil des Umfangs der umfahrenen Figur mit einer Bewegung des um den Pol sich drehenden Arms nach der negativen Seite hin umfahren; und unterscheiden wir nun die der letzteren Bewegung entsprechenden Grössen von den der ersteren Bewegung entsprechenden Grössen durch Hinzufügung von Sternchen zu den betreffenden Grössen, so haben wir nach §. 7. offenbar die zwei Gleichungen:

$$\text{Lim}\,\Sigma V = \text{Lim}\,\Sigma P + \tfrac{1}{2}r^2(\omega - \Omega + \Phi),$$
$$\text{Lim}\,\Sigma \overset{*}{V} = \text{Lim}\,\Sigma \overset{*}{P} + \tfrac{1}{2}r^2(\Omega - \omega + \overset{*}{\Phi});$$

also:

$$\text{Lim}\,\Sigma V + \text{Lim}\,\Sigma \overset{*}{V} = \text{Lim}\,\Sigma P + \text{Lim}\,\Sigma \overset{*}{P} + \tfrac{1}{2}r^2(\Phi + \overset{*}{\Phi}),$$

wo nun aber auf der Stelle in die Augen fällt, dass

$$\overset{*}{\Phi} = -\Phi, \quad \text{also} \quad \Phi + \overset{*}{\Phi} = \Phi - \Phi = 0,$$

und daher

$$\text{Lim}\,\Sigma V + \text{Lim}\,\Sigma \overset{*}{V} = \text{Lim}\,\Sigma P + \text{Lim}\,\Sigma \overset{*}{P}$$

---

*) Man vergleiche den vorhergehenden Paragraphen am Ende.

ist. Eben so leicht übersieht man aber auf der Stelle, dass in diesem Falle:

$$J = \text{Lim}\,\Sigma V + \text{Lim}\,\Sigma \overset{*}{V},$$

also nach Vorstehendem:

$$J = \text{Lim}\,\Sigma P + \text{Lim}\,\Sigma \overset{*}{P}$$

ist. Nach dem Obigen ist aber:

$$\text{Lim}\,\Sigma P = r\overline{\omega}, \quad \text{Lim}\,\Sigma \overset{*}{P} = r\overset{*}{\overline{\omega}};$$

also:

$$J = r\overline{\omega} + r\overset{*}{\overline{\omega}} = r(\overline{\omega} + \overset{*}{\overline{\omega}}).$$

Ferner ist nach §. 6.:

$$\text{Lim}\,\Sigma\Delta = \tfrac{1}{2}r^2(\omega - \Omega + \Phi),$$

$$\text{Lim}\,\Sigma\overset{*}{\Delta} = \tfrac{1}{2}r^2(\Omega - \omega + \overset{*}{\Phi});$$

also:

$$\text{Lim}\,\Sigma\Delta + \text{Lim}\,\Sigma\overset{*}{\Delta} = \tfrac{1}{2}r^2(\Phi + \overset{*}{\Phi}),$$

folglich, weil nach dem Obigen

$$\Phi + \overset{*}{\Phi} = 0$$

ist:

$$\text{Lim}\,\Sigma\Delta + \text{Lim}\,\Sigma\overset{*}{\Delta} = 0.$$

Nun ist aber, wie wir oben gesehen haben:

$$\text{Lim}\,\Sigma\Delta = \frac{r^2\theta}{2\varrho}, \quad \text{Lim}\,\Sigma\overset{*}{\Delta} = \frac{r^2\overset{*}{\theta}}{2\varrho};$$

also:

$$\text{Lim}\,\Sigma\Delta + \text{Lim}\,\Sigma\overset{*}{\Delta} = \frac{r^2}{2\varrho}(\theta + \overset{*}{\theta}) = 0,$$

folglich:

$$\theta + \overset{*}{\theta} = 0.$$

Daher kann man nach dem Obigen auch setzen:

$$J = r\{(\overline{\omega} + \overset{*}{\overline{\omega}}) + (\theta + \overset{*}{\theta})\} = r\{(\overline{\omega} + \theta) + (\overset{*}{\overline{\omega}} + \overset{*}{\theta})\},$$

wo offenbar

$$(\overline{\omega} + \theta) + (\overset{*}{\overline{\omega}} + \overset{*}{\theta})$$

die ganze Abwickelung des Umfanges der Rolle ist, welche, in der zu Grunde gelegten Maasseinheit ausgedrückt, durch die Ablesung der Rolle erhalten wird; bezeichnen wir dieselbe also durch A, so ist:

$$J = r\mathrm{A}.$$

Zweiter Fall.

In diesem Falle wird offenbar der Umfang der Figur bloss mit einer Bewegung des um den Pol sich drehenden Arms nach der positiven Seite hin umfahren, oder kann wenigstens bloss mit einer Bewegung des um den Pol sich drehenden Arms nach dieser Seite hin umfahren werden, so dass wir also in diesem Falle nach §. 7. nur die eine Gleichung:

$$\mathrm{Lim}\,\Sigma V = \mathrm{Lim}\,\Sigma P + \tfrac{1}{2}r^2(\omega - \Omega + \Phi)$$

haben; offenbar ist aber in diesem Falle:

$$\Omega = \omega, \quad \Phi = 2\pi,$$

also nach Vorstehendem:

$$\mathrm{Lim}\,\Sigma V = \mathrm{Lim}\,\Sigma P + r^2\pi.$$

Nach §. 6. ist ferner:

$$\mathrm{Lim}\,\Sigma\Delta = \tfrac{1}{2}r^2(\omega - \Omega + \Phi) = r^2\pi,$$

und folglich, weil nach dem Obigen auch:

$$\mathrm{Lim}\,\Sigma\Delta = \frac{r^2\theta}{2\varrho}$$

ist:

$$\frac{r^2\theta}{2\varrho} = r^2\pi, \quad \text{also} \quad \theta = 2\varrho\pi.$$

Weil nun nach dem Obigen:

$$\mathrm{Lim}\,\Sigma P = r\overline{\omega}$$

ist, so ist:

$$\begin{aligned}\mathrm{Lim}\,\Sigma V &= r\overline{\omega} + r^2\pi\\ &= r(\overline{\omega} + \theta - \theta) + r^2\pi\\ &= r(\overline{\omega} + \theta) + r^2\pi - r\theta\\ &= r(\overline{\omega} + \theta) + r^2\pi - 2r\varrho\pi\\ &= r(\overline{\omega} + \theta) + (r^2 - 2r\varrho)\,\pi,\end{aligned}$$

folglich, weil in diesem Falle offenbar

$$J = \text{Lim}\,\Sigma V + R^2\pi$$

ist:

$$J = r(\bar{\omega} + \theta) + (R^2 + r^2 - 2r\varrho)\pi,$$

also, wenn wieder A den durch die Ablesung der Rolle erhaltenen, in den zu Grunde gelegten Maasstheilen ausgedrückten Bogen $\bar{\omega} + \theta$ bezeichnet, und

$$C = R^2 + r^2 - 2r\varrho,$$

wo C eine Constante bezeichnet, gesetzt wird:

$$J = r\text{A} + C\pi.$$

Setzte man

$$C' = (R^2 + r^2 - 2r\varrho)\pi = C\pi,$$

wo auch C' eine Constante bezeichnet, so wäre:

$$J = r\text{A} + C'.$$

Wenn wir einen der unmittelbar durch die Ablesung des Nonius angegebenen Theile des Umfangs der Rolle als Maasseinheit annehmen, so ist A die unmittelbar durch die Ablesung des Nonius erhaltene Zahl, und also eine weitere Reduction der Ablesung auf eine andere Maasseinheit nicht erforderlich.

§. 9.

Wir wollen jetzt die wirkliche oder lineare Grösse eines Theils des Umfangs der Rolle durch Λ, die wirkliche oder lineare Grösse eines Theils des verjüngten Maassstabes, nach welchem die auszumessenden Figuren verzeichnet sind, durch L, die entsprechenden Flächeneinheiten aber durch Λ^q und L^q bezeichnen. Nun habe man den Inhalt einer beliebigen Figur, etwa eines Kreises, der mit besonderer Genauigkeit leicht zu verzeichnen ist, nach den gewöhnlichen geometrischen Methoden durch die Flächeneinheit L^q ausgedrückt, und dadurch für den Flächeninhalt die Zahl μ, also eigentlich den Ausdruck

$$\mu\,.\,L^q$$

erhalten. Dann gebe man dem den Fahrstift tragenden Arme, dessen Länge, in den Maasstheilen Λ ausgedrückt (§. 8. am Ende), r, also eigentlich $r\,.\,\Lambda$ ist, eine solche Länge, dass, wenn man — den Pol ausserhalb der in Rede stehenden Figur annehmend — die Figur umfährt, die Rollenangabe μ ist; so ist nach dem vor-

hergehenden Paragraphen der Inhalt der Figur, in der Flächeneinheit $\mathcal{A}^q$ ausgedrückt, $r\mu$, also eigentlich

$$r\mu \, . \, \mathcal{A}^q,$$

und wir haben folglich nach dem Vorhergehenden die Gleichung:

$$\mu \, . \, L^q = r\mu \, . \, \mathcal{A}^q,$$

aus welcher sich

$$r = \frac{L^q}{\mathcal{A}^q}$$

ergiebt. Umfährt man nun mit dem auf diese Weise eingerichteten Instrumente eine beliebige andere Figur, deren Inhalt wir durch J bezeichnen wollen, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$J = r\mathrm{A} \, . \, \mathcal{A}^q,$$

also, wenn man den vorstehenden Ausdruck von r einführt:

$$J = \mathrm{A} \, . \, \frac{L^q}{\mathcal{A}^q} \cdot \mathcal{A}^q,$$

folglich:

$$J = \mathrm{A} \, . \, L^q,$$

oder, wenn man die von der Rolle abgelesene Zahl A unmittelbar auf die Flächeneinheit L^q bezieht:

$$J = \mathrm{A},$$

so dass also jetzt die abgelesene Zahl ohne Weiteres den in der Flächeneinheit des verjüngten Maassstabes ausgedrückten Flächeninhalt jeder mit ausserhalb angenommenem Pol umfahrenen Figur giebt. Hat man nun ferner eine beliebige Figur von dem Flächeninhalte J mit innerhalb angenommenem Pol umfahren, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen der in der Flächeneinheit $\mathcal{A}^q$ ausgedrückte Flächeninhalt:

$$J = r\mathrm{A} + C',$$

oder eigentlich:

$$J = r\mathrm{A} \, . \, \mathcal{A}^q + C' \, . \, \mathcal{A}^q,$$

also nach dem Obigen:

$$J = A \cdot \frac{L^q}{\Lambda^q} \cdot \Lambda^q + C' \cdot \Lambda^q$$

oder:

$$J = A \cdot L^q + C' \cdot \frac{\Lambda^q}{L^q} \cdot L^q,$$

oder, wenn man

$$C_1 = C' \cdot \frac{\Lambda^q}{L^q}$$

setzt:

$$J = A \cdot L^q + C_1 \cdot L^q,$$

oder kürzer:

$$J = A + C_1,$$

wenn man nur die Zahl $A + C_1$ auf die Flächeneinheit L^q des verjüngten Maassstabes bezieht. Berechnet man jetzt nach den gewöhnlichen geometrischen Methoden den Flächeninhalt einer leicht zu construirenden Figur, etwa eines Kreises, und findet dafür, in der Flächeneinheit L^q des verjüngten Maassstabes ausgedrückt, die Zahl F, umfährt diese Figur dann mit innerhalb angenommenem Pol, und findet als Rollenangabe die Zahl F_1, so ist nach dem Obigen:

$$F = F_1 + C_1,$$

folglich:

$$C_1 = F - F_1,$$

wodurch die Constante C_1 für alle Flächenmessungen mit innerhalb angenommenem Pol ein für alle Mal bestimmt ist, natürlich mit Bezug auf den verjüngten Maassstab, mittelst welches die auszumessenden Figuren verzeichnet sind. Für jeden besonderen verjüngten Maassstab wird auch der den Fahrstift tragende Arm des Instruments eine besondere Länge erhalten.

§. 10.

Wäre der Halbmesser der Rolle, dessen wirkliche oder lineare Grösse wir durch $\mathfrak{R}$ bezeichnen wollen, bekannt, und enthielte l Maasstheile L des verjüngten Maassstabes, so dass also

$$\mathfrak{R} = l \cdot L$$

wäre, so wäre der Umfang der Rolle:

$$2\pi . \mathfrak{B} = 2l\pi . L.$$

Enthält der Umfang der Rolle λ Maasstheile $\varLambda$, so ist dessen wirkliche oder lineare Grösse $\lambda . \varLambda$, folglich nach Vorstehendem:

$$2l\pi . L = \lambda . \varLambda,$$

also:

$$\frac{L}{\varLambda} = \frac{\lambda}{2l\pi}.$$

Hat man nun eine Figur J' mit ausserhalb angenommenem Pol umfahren und die Rollenangabe A' erhalten, so ist nach §. 8. bekanntlich:

$$J' = r\mathrm{A}' . \varLambda^q .$$

Berechnet man aber den Inhalt dieser Figur geometrisch nach dem verjüngten Maassstabe, und findet:

$$J' = \mu' . L^q ,$$

so ist:

$$r\mathrm{A}' . \varLambda^q = \mu' . L^q ,$$

also:

$$r = \frac{\mu'}{\mathrm{A}'} . \frac{L^q}{\varLambda^q} ,$$

folglich nach dem Obigen:

$$r = \frac{\mu'}{\mathrm{A}'} . \frac{\lambda^2}{4l^2\pi^2}.$$

Eigentlich ist die wirkliche oder lineare Grösse des den Fahrstift tragenden Arms hiernach:

$$\frac{\mu'}{\mathrm{A}'} . \frac{\lambda^2}{4l^2\pi^2} . \varLambda ,$$

oder in der Maasseinheit L des verjüngten Maassstabes ausgedrückt:

$$\frac{\mu'}{\mathrm{A}'} . \frac{\lambda^2}{4l^2\pi^2} . \frac{\varLambda}{L} . L,$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{\mu'}{\mathrm{A}'} . \frac{\lambda^2}{4l^2\pi^2} . \frac{2l\pi}{\lambda} . L ,$$

also:

$$\frac{\mu'}{A'} \cdot \frac{\lambda}{2l\pi} \cdot L.$$

Nach §. 8. ist allgemein:

$$J = r A . \varLambda^q,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$J = \frac{\mu'}{A'} \cdot \frac{\lambda^2}{4l^2\pi^2} \cdot A . \varLambda^q,$$

oder:

$$J = \frac{\mu'}{A'} \cdot \frac{\lambda^2}{4l^2\pi^2} \cdot A . \frac{\varLambda^q}{L^q} . L^q$$

$$= \frac{\mu'}{A'} \cdot \frac{\lambda^2}{4l^2\pi^2} \cdot A . \frac{4l^2\pi^2}{\lambda^2} . L^q,$$

folglich:

$$J = \frac{\mu'}{A'} . A . L^q,$$

Macht man nun den, den Fahrstift tragenden Arm so lang, dass $A' = \mu'$ ist, so ist:

$$J = A . L^q,$$

oder, wenn wir nur die Ablesung A auf die Flächeneinheit L^q beziehen, kürzer:

$$J = A,$$

wie wir schon im vorhergehenden Paragraphen gefunden haben. Wenn aber $A' = \mu'$ ist, so ist nach dem Obigen der in der Maasseinheit L ausgedrückte, den Fahrstift tragende Arm:

$$\frac{\lambda}{2l\pi},$$

und so lang muss man also den Arm, welcher den Fahrstift trägt, machen, damit $A' = \mu'$ sei, die Rolle also den in der Flächeneinheit L^q ausgedrückten Flächeninhalt der umfahrenen Figur unmittelbar angebe.

Für $A' = \mu'$ ist nach dem Obigen:

$$r = \frac{L^q}{\varLambda^q}.$$

Hat man die Figur J mit innerhalb angenommenem Pol um-

fahren, so ist, in Bezug auf die Flächeneinheit L^q, wie im vorhergehenden Paragraphen:

$$J = \mathrm{A} + C_1,$$

und die Constante C_1 wird wie dort bestimmt.

§. 11.

Wir wollen uns nun noch vorlegen die folgende

Aufgabe.

Man soll die Länge des Arms des Fahrstifts so bestimmen, dass bei einer Verjüngung von $\frac{1}{\alpha}$ in Bezug auf die wirkliche Maasseinheit M jede Maasseinheit $\varLambda$ des Umfangs der Rolle der Flächeneinheit M^q entspricht.

Auflösung.

Weil für $\mathrm{A}' = 1$ nach der Bedingung der Aufgabe

$$J' = \frac{1}{\alpha^2} . M^q = L^q$$

werden soll, so ist wegen der aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Formel

$$J' = \mu' . L^q$$

offenbar $\mu' = 1$, also $\mathrm{A}' = \mu'$, folglich:

$$\mathfrak{r} = \frac{L^q}{\varLambda^q},$$

und daher die Länge des Arms des Fahrstifts:

$$\frac{L^q}{\varLambda^q} . \varLambda = \frac{L}{\varLambda} . L.$$

Der Umfang der Rolle ist

$$\lambda . \varLambda \quad \text{oder} \quad 2l\pi . L,$$

also:

$$\lambda . \varLambda = 2l\pi . L,$$

und folglich:

$$\frac{L}{\Lambda}=\frac{\lambda}{2l\pi},$$

und die Länge des Arms des Fahrstifts ist nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\lambda}{2l\pi}\cdot L.$$

Nun ist aber nach der Bedingung der Aufgabe:

$$L=\frac{1}{\alpha}.M,$$

also die Länge des Arms des Fahrstifts:

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\lambda}{2l\pi}\cdot M.$$

Ist die Länge des Halbmessers der Rolle, in der Maassein-heit M ausgedrückt, $\mathfrak{r}.M$, so ist:

$$l.L=\mathfrak{r}.M,$$

also:

$$l.\frac{1}{\alpha}.M=\mathfrak{r}.M,$$

folglich $l=\alpha\mathfrak{r}$, und daher die Länge des Arms des Fahrstifts [illegible]

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\lambda}{2\alpha\mathfrak{r}\pi}\cdot M=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\lambda}{2\mathfrak{r}\pi}\cdot M.$$

Ist nun, für eine andere Maasseinheit M' [illegible] Halbmessers der Rolle $\mathfrak{r}'.M'$; so ist

$$\mathfrak{r}.M=\mathfrak{r}'.M',$$

also:

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}'.\frac{M'}{M},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden [illegible] Fahrstifts:

$$\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\lambda}{2\mathfrak{r}'\pi\cdot\frac{M'}{M}}\cdot M=\text{[illegible]}$$

also, wenn man $M=k.M'$ [illegible] stifts:

$$\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\lambda}{2\mathfrak{r}}\text{[illegible]}$$

Hunäus in seinem Lehrbuche der praktischen Geometrie. S. 482. giebt das folgende Beispiel:

„Es soll der Inhalt der Figur so ausgedrückt werden, dass nach dem grösseren der bei dem vormaligen Hannoverschen Landes-Oekonomie-Collegium angewandten Maassstabe von $\frac{1}{2133,3}$ Verjüngung jede Ablesung von $\frac{1}{1000}$ des Umfanges der Rolle eine Quadratruthe darstellt."

Hier ist also:

$$\alpha = 2133,3$$

und für den gebrauchten Planimeter war nach der Angabe von Hunäus:

$$\lambda = 1000, \quad 2r' = 19,6^{mm}.$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist:

$$M = 1^0, \quad M' = 1^{mm}.$$

Ferner ist nach der Angabe von Hunäus:

$$1' = 0,29209^m = 292,09^{mm}$$

und folglich, die Ruthe zu 16 Fuss:

$$1^0 = 16.292,09^{mm},$$

also:

$$k = 16.292,09.$$

Folglich ist nach der obigen Formel die Länge des Arms des Fahrstifts, in Millimetern ausgedrückt:

$$\frac{16^2 . 292,09^2}{2133,3^2} \cdot \frac{1000}{19,6 . 3,14}$$

oder:

$$\left(\frac{16.292,09}{2133,3}\right)^2 : \frac{19,6 . 3,14}{1000} = 77,9^{mm}$$

ganz wie a. a. O.

XXXV.

Allgemeine analytische Theorie der Function $\Pi(x)$ und über eingebildete Dreiecke und Vierecke.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

Ich darf wohl bei denen, welche dieser Abhandlung einige Aufmerksamkeit schenken werden, eine allgemeine Kenntniss der ursprünglich durch die uralte Schwierigkeit, welche seit des Euclides Zeiten die Geometer in der Theorie der Parallelen gefunden haben, veranlassten neueren Untersuchungen von Gauss, Lobatschewsky und Bolyai voraussetzen, und kann mich daher weiterer Erörterungen über diese sehr verdienstlichen und interessanten Arbeiten und Ansichten enthalten, die sich übrigens auch auf zweckentsprechende Weise in hier gebotener Kürze nicht würden geben lassen. Jedenfalls ist nicht zu leugnen, dass diese mit der Theorie der Parallelen in Verbindung gebrachten Untersuchungen und Betrachtungen für den in der mit logischer Strenge und Consequenz überall einherschreitenden euclidischen Geometrie gebildeten und erwachsenen Jünger der Wissenschaft gewissermassen etwas Mysteriöses haben, wozu noch kommt, dass dieselben gewiss noch sehr der weiteren Ausbildung und Verdeutlichung bedürfen, um allgemeineren Eingang, als dies bis jetzt der Fall ist, finden zu können, weshalb ich es auch keineswegs billigen kann, wenn von denselben schon jetzt in einer nach meiner Meinung sehr voreiligen Weise auf dem von den oben genannten Mathematikern betretenen Wege für die Lehr-

bücher der Geometrie und den geometrischen Elementarunterricht Gebrauch gemacht wird, wie dies wenigstens in einem öfters genannten, und wegen dieses Gebrauchs hin und wieder selbst gerühmten Lehrbuche bereits geschehen ist, wogegen ich mich, wie schon gesagt, in der bestimmtesten Weise erklären muss. Um jedoch nicht missverstanden zu werden, darf ich zu bemerken nicht unterlassen, dass ich es nicht bloss für ganz angemessen, sondern selbst für sehr lehrreich halte, wenn die Theorie der Parallelen in den Lehrbüchern der Geometrie künftighin in der nicht den geringsten Zweifel, nicht die geringste Dunkelheit lassenden Weise — welche aber streng genommen mit den eigentlichen Ansichten der oben genannten Geometer gar nichts zu thun hat, wenn auch als durch dieselben veranlasst angesehen werden kann — behandelt wird, wie ich in meiner Abhandlung: „Ueber den neuesten Stand der Frage von der Theorie der Parallelen" in diesem Archiv. Thl. XLVII. Nr. XXIV. S. 307. gezeigt habe; ja dass ich selbst wünsche, dass diese Entwickelung der Parallelentheorie in den geometrischen Elementarunterricht Eingang finden möge, glaube ich dadurch am Deutlichsten und Bestimmtesten an den Tag gelegt zu haben, dass ich dieselbe in die so eben erschienene **sechste** Auflage meines „Lehrbuchs der ebenen Geometrie. Brandenburg a. d. H. 1870." wenn auch vorläufig nur in der Form eines „Anhangs. S. 60—S. 75." aufgenommen und mit aller Strenge und Deutlichkeit für den Gebrauch zum Unterrichte darzustellen gesucht habe.

Unbedingt ist es ein sehr grosses, nicht genug anzuerkennendes Verdienst von E. Beltrami, zuerst in einigen sehr bemerkenswerthen Abhandlungen gezeigt zu haben, dass diese ganze Theorie von ihrer geometrischen Seite, in der Auffassungsweise von Gauss, Lobatschewsky und Bolyai, nur richtig verstanden und in ihrer eigentlichen Bedeutung gehörig aufgefasst und gewürdigt werden kann durch gewisse Untersuchungen über die krummen Flächen im Allgemeinen, ohne welche Alles unklar bleibt, und der Gefahr ganz unrichtigen Verständnisses und ganz schiefer Auffassung unterliegt, was auch den besten Beweis dafür liefert, dass es im höchsten Grade bedenklich und gefährlich ist, ja nur zu leicht zur Verwirrung der Anfänger führen kann, wenn man von dieser neueren Parallelentheorie für den geometrischen Unterricht auf Schulen in anderer als der von mir in meinen oben genannten Schriften gezeigten Weise Gebrauch machen zu dürfen glaubt, welche meine eigene Ansicht in den gegen mich ausgesprochenen Ansichten einer grossen Anzahl der ausgezeichnetsten mathematischen Lehrer eine mir sehr werthvolle

Unterstützung findet. Wer sich — vorläufig ohne alle tiefer gehenden analytisch-geometrischen Entwickelungen — eine recht deutliche Einsicht in die eigentliche Natur dieses aus geometrischem Gesichtspunkte betrachteten Gegenstandes verschaffen will, den kann ich auf nichts Besseres verweisen, als auf die „Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit **Postulatum d'Euclide**. Par **J. Hoüel**, Professeur à la Faculté des sciences de Bordeaux. (Extrait des Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, Séance du 30 Décembre 1869), wo sich alles hier zur Sprache Kommende mit tiefer Einsicht und daraus entspringender ungemeiner Klarheit entwickelt und dargestellt findet. — So viel hier über die geometrische Seite dieses wichtigen und interessanten Gegenstandes; lange Beschäftigung gerade auch mit dieser Seite desselben wird mir hoffentlich späterhin Gelegenheit geben, meine betreffenden Untersuchungen, die — so wie nach meiner Meinung dieser ganze Gegenstand überhaupt — zur Zeit noch mehrfach der Klärung und allseitigen von allen Zweifeln freien Begründung bedürfen, in dieser Zeitschrift in verschiedenen Abhandlungen mitzutheilen.

Neben seiner geometrischen Auffassung giebt dieser Gegenstand aber auch Veranlassung zu durchaus nicht aus den Gränzen der gewöhnlichen Analysis heraustretenden, für und durch sich selbst verständlichen selbstständigen rein-analytischen Untersuchungen und Entwickelungen, welche zu verschiedenen für sich interessanten rein-analytischen Resultaten führen. Dieser, wie ich glaube, in mehrfacher Rücksicht in eigenthümlicher und selbstständiger Weise durchgeführten Untersuchung, bei der ich mich jedoch bemühet habe, eine möglichste Uebereinstimmung mit den namentlich von Lobatschewsky theilweise schon gefundenen Resultaten zu erzielen, weshalb ich auch absichtlich von der von demselben gebrauchten Bezeichnung nicht abgewichen bin, ist die vorliegende Abhandlung gewidmet, welche ich unter verschiedenen hierher gehörenden Abhandlungen jetzt zuerst veröffentliche, weil ich immer der Meinung gewesen bin, dass es zweckmässig sein möchte, diese für sich bestehenden rein-analytischen Untersuchungen zuerst möglichst zu erledigen, bevor man sich zu den betreffenden geometrischen Untersuchungen wendet. Deshalb lasse ich mich für jetzt auch auf einen Nachweis der zwischen diesen beiden Seiten unseres Gegenstandes bestehenden Beziehungen hier gar nicht ein, indem ich es — wie gesagt — hier vorläufig nur mit einer ganz für sich bestehenden rein-analytischen

Untersuchung zu thun haben will, und bemerke daher zum Schluss dieser Einleitung nur noch ausdrücklich und in der bestimmtesten Weise, dass, wenn im Folgenden von imaginären oder — wie ich lieber sagen möchte — eingebildeten Dreiecken, Vierecken u. s. w. die Rede sein wird, man darin ja nicht in ein gewisses mysteriöses Dunkel gehüllte geometrische Gebilde suchen darf, indem schwerlich ein Mathematiker grösseren Abscheu als ich vor mysteriösen Dingen in seiner ganzen Wissenschaft haben kann, weil mir stets vollständige Klarheit und Bestimmtheit am Höchsten gestanden und gegolten hat; die obigen Ausdrücke sind nichts weiter, und sollen nichts weiter sein, als möglichst kurze Bezeichnungen für gewisse rein-analytische Beziehungen, deren völlig klare und bestimmte Auffassung gewiss für Niemanden mit der geringsten Schwierigkeit verknüpft sein wird. Hiermit glaube ich den Gesichtspunkt, welchen man bei Beurtheilung dieser Abhandlung lediglich festzuhalten hat, nach meinem Wunsche völlig deutlich dargelegt zu haben, und hoffe bald auf die oben besprochene geometrische Seite dieses Gegenstandes zurückzukommen.

Erstes Kapitel.

Die Function $\Pi(x)$ im Allgemeinen.

§. 1.

Die Untersuchung, mit welcher wir uns hier beschäftigen werden, betrifft die beiden Functionen

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}} \quad \text{und} \quad \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$

wo e seine bekannte Bedeutung hat; wir wollen diese beiden Functionen der Kürze wegen beziehungsweise durch $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ bezeichnen, und werden also:

$$1) \; \ldots\ldots \; \varphi(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}, \quad \psi(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

setzen.

Weil bekanntlich für jedes x

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots$$

ist, so ist für jedes positive x offenbar auch e^x stets positiv; ferner ist klar, dass

$$e^x = 1 \quad \text{oder} \quad e^x > 1$$

ist, jenachdem

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x > 0$$

ist. Weil nun

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}}$$

ist, so ist auch für jedes negative x stets e^x positiv, und es ist in diesem Falle offenbar

$$e^x = 1 \quad \text{oder} \quad e^x < 1,$$

jenachdem

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x < 0$$

ist. Hieraus sieht man, dass $e^x + e^{-x}$ stets positiv und grösser als die Einheit ist, so dass also von einer Unterbrechung der Stetigkeit der Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, wenn man sich x von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig verändern lässt, gar keine Rede sein kann.

Weil

$$\varphi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{e^{-x} + e^x}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar $\varphi(x)$ stets positiv. Weil ferner nach dem Obigen offenbar

$$e^{+\infty} = +\infty, \quad e^{-\infty} = 0$$

ist, so ist klar, dass

$$\varphi(-\infty) = 0, \quad \varphi(+\infty) = 0$$

ist. Endlich ist offenbar $\varphi(0) = 1$, und auf folgende Art lässt sich leicht zeigen, dass nur für $x = 0$ die Function $\varphi(x) = 1$ werden kann. Aus

$$\varphi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 1$$

folgt nämlich

$$e^x + e^{-x} = 2,$$

also:

$$(e^x + e^{-x})^2 = 4,$$

$$e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x} = 4e^x e^{-x},$$

$$e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x} = 0,$$

$$(e^x - e^{-x})^2 = 0, \quad e^x - e^{-x} = 0;$$

folglich:

$$e^x = e^{-x}, \quad e^{2x} = e^{-x} e^x = 1$$

und daher $2x = 0$, $x = 0$, so dass also $x = 0$ der einzige Werth von x ist, für welchen $\varphi(x) = 1$ wird.

Durch Differentiation der Function $\varphi(x)$ erhält man leicht:

$$\varphi'(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = -2\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = -2\frac{e^{2x} - 1}{e^x(e^x + e^{-x})^2},$$

woraus sich nach dem Obigen ergiebt, dass $\varphi'(x)$ positiv oder negativ ist, jenachdem x negativ oder positiv ist; für $x = 0$ ist $\varphi'(0) = 0$. Hieraus ergiebt sich, dass, wenn man sich x von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig verändern lässt, $\varphi(x)$ zuerst von 0 bis 1 stets wächst, und dann von 1 bis 0 stets abnimmt; den grössten Werth 1 erhält $\varphi(x)$ für $x = 1$.

Weil

$$\varphi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \varphi(-x) = \frac{2}{e^{-x} + e^x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

ist, so ist allgemein:

2) . . . . $\varphi(x) = \varphi(-x)$.

Aus der Gleichung

$$\psi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ergiebt sich mittelst des Obigen leicht, dass $\psi(x)$ für negative und positive x beziehungsweise stets negativ und positiv ist. Ferner ist offenbar $\psi(0) = 0$, und auf folgende Art lässt sich leicht zeigen, dass nur für $x = 0$ die Function $\psi(x) = 0$ werden kann. Aus

$$\psi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 0$$

folgt nämlich:

$$e^x - e^{-x} = 0, \quad e^{2x} - e^x e^{-x} = e^{2x} - 1 = 0, \quad e^{2x} = 1;$$

also $2x=0$, $x=0$; woraus sich ergiebt, dass $x=0$ der einzige Werth von x ist, für welchen $\psi(x)=0$ wird.

Nach dem Obigen ist, wie man leicht findet:

$$1+\psi(x)=\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}=\frac{2}{e^{-x}(e^x+e^{-x})},$$

$$1-\psi(x)=\frac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{2}{e^x(e^x+e^{-x})};$$

also offenbar:

$$1+\psi(-\infty)=0,\quad 1-\psi(+\infty)=0;$$

folglich:

$$\psi(-\infty)=-1,\quad \psi(+\infty)=+1.$$

Durch Differentiation der Function $\psi(x)$ erhält man leicht:

$$\psi'(x)=\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}=\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{4e^xe^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2},$$

woraus sich ergiebt, dass der Differentialquotient $\psi'(x)$ stets positiv ist. Wenn man sich also x von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig verändern lässt, so wird $\psi(x)$ von -1 durch 0 hindurch bis $+1$ stets wachsen; den Werth 0 erhält $\psi(x)$ für $x=0$.

Weil

$$\psi(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad \psi(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}=-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

ist, so ist allgemein:

3) . . . . $\psi(x)=-\psi(-x)$.

Sehr leicht findet man:

$$\{\varphi(x)\}^2+\{\psi(x)\}^2=\frac{4+(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{4e^xe^{-x}+(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{(e^x+e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2},$$

also allgemein:

4) . . . . $\{\varphi(x)\}^2+\{\psi(x)\}^2=1$.

§. 2.

In dem vorhergehenden Paragraphen haben wir gesehen, dass, wenn man sich x von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig verändern lässt, die Function $\varphi(x)$ zuerst stetig von 0 bis $+1$ wächst, dann stetig von $+1$ bis 0 abnimmt; dagegen die Function $\psi(x)$ von -1 durch 0 hindurch bis $+1$ stetig wächst; ausserdem ist allgemein:

$$\{\varphi(x)\}^2+\{\psi(x)\}^2=1.$$

Es wird also offenbar immer einen als eine Function von x zu betrachtenden Kreisbogen in einem mit der Längeneinheit als Halbmesser beschriebenen Kreise geben müssen, dessen Sinus und Cosinus beziehungsweise die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind, und dieser Kreisbogen wird offenbar, wenn man sich x von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig verändern lässt, von π bis 0 stetig abnehmen, oder, wenn man sich x von $+\infty$ bis $-\infty$ stetig verändern lässt, von 0 bis π stetig wachsen müssen, insofern man denselben stets als positiv und nicht grösser als π annimmt. Diesen als eine stets positive und die halbe Peripherie π nicht überschreitende Function von x betrachteten Kreisbogen wollen wir im Folgenden durch $\Pi(x)$ bezeichnen, und haben also nach dem Vorhergehenden die beiden Gleichungen:

$$5)\ \ldots\ \sin\Pi(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}},\quad \cos\Pi(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}};$$

wo also, wenn man sich x von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig verändern lässt, $\sin\Pi(x)$ zuerst stetig von 0 bis $+1$ wächst, dann stetig von $+1$ bis 0 abnimmt; dagegen $\cos\Pi(x)$ von -1 durch 0 hindurch bis $+1$ stetig wächst; indem der Kreisbogen $\Pi(x)$ von π bis 0 stetig abnimmt. Die Function $\sin\Pi(x)$ ist stets positiv, dagegen ist $\cos\Pi(x)$ positiv oder negativ, jenachdem x positiv oder negativ ist.

Rücksichtlich der analytischen Bestimmung von $\Pi(x)$ ist Folgendes zu bemerken.

Setzen wir der Kürze wegen:

$$6)\ \ldots\ .\ \bar{\omega}(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^3$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^5$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^7$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo offenbar $\bar{\omega}(x) = \bar{\omega}(-x)$ ist, so ist bekanntlich

$$\operatorname{Arc\,sin} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \bar{\omega}(x),$$

und die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung 6) convergirt, weil $\frac{2}{e^x + e^{-x}}$ nicht grösser als die Einheit ist. Weil aber $\frac{2}{e^x + e^{-x}}$ positiv ist, so liegt bekanntlich $\bar{\omega}(x)$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$. Man kann also, weil

$$\sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

ist, offenbar

$$\Pi(x) = \bar{\omega}(x)$$

setzen. Weil aber

$$\sin\{\pi - \bar{\omega}(x)\} = \sin \bar{\omega}(x)$$

ist, und $\Pi(x)$ nur zwischen 0 und π liegen soll, so kann man offenbar auch

$$\Pi(x) = \pi - \bar{\omega}(x)$$

setzen. Weil nun aber nach dem Obigen $\cos \Pi(x)$ positiv oder negativ ist, jenachdem x positiv oder negativ ist, so wird man offenbar

$$\Pi(x) = \bar{\omega}(x) \quad \text{oder} \quad \Pi(x) = \pi - \bar{\omega}(x)$$

zu setzen haben, jenachdem x positiv oder negativ ist; und es kann also auf diese Weise $\Pi(x)$ immer sicher bestimmt werden.

Ist also x positiv, so ist:

$$\Pi(x) = \bar{\omega}(x), \quad \Pi(-x) = \pi - \bar{\omega}(x);$$

also:

$$\Pi(x) + \Pi(-\pi) = \pi;$$

ist x negativ, so ist:

$$\Pi(x) = \pi - \bar{\omega}(x), \quad \Pi(-x) = \bar{\omega}(x);$$

also wieder:

$$\Pi(x) + \Pi(-x) = \pi;$$

daher ist immer:

7) . . . . $\Pi(x) + \Pi(-x) = \pi.$

Für $x = y$ ist natürlich hiernach

$$\Pi(x) = \Pi(y).$$

Weil wegen der Formeln 5)

$$\sin \Pi(0) = 1, \quad \cos \Pi(0) = 0$$

ist, und $\Pi(x)$ zwischen 0 und π liegt, so ist:

$$8) \ldots\ldots \Pi(0) = \tfrac{1}{2}\pi.$$

§. 3.

Es ist

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Pi(x)^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}\Pi(x)^2}{\cos \frac{1}{2}\Pi(x)^2} = \frac{1 - \cos \Pi(x)}{1 + \cos \Pi(x)}\text{*)},$$

also, wenn man für $\cos \Pi(x)$ seinen Werth aus 5) einführt, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Pi(x)^2 = \frac{2e^{-x}}{2e^x} = e^{-2x}.$$

Ist nun x positiv, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\Pi(x) = \overline{\omega}(x),$$

wo $\overline{\omega}(x)$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt; also liegt $\frac{1}{2}\Pi(x)$ zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi$, es ist folglich $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(x)$ positiv, und daher nach dem Obigen:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}.$$

Wenn x negativ ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\Pi(x) = \pi - \overline{\omega}(x),$$

also:

$$\tfrac{1}{2}\Pi(x) = \tfrac{1}{2}\{\pi - \overline{\omega}(x)\},$$

und es liegt folglich, weil $\overline{\omega}(x)$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt, offenbar

*) Alle Functionszeichen, wie $\Pi(x)$ selbst, sowie ferner $\sin \Pi(x)$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(x)$ u. dergl., sind hier, wie immer, als **einfache untrennbare** Zeichen zu betrachten, und dann auch die Potenzbezeichnungen $\Pi(x)^n$, $\sin \Pi(x)^n$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(x)^n$ u. dergl. für diese Functionen nicht misszuverstehen, gegenüber den weitläufigeren Bezeichnungen $\{\Pi(x)\}^n$, $\{\sin \Pi(x)\}^n$, $\{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(x)\}^n$, u. s. w. oder den nach meiner oft ausgesprochenen Ansicht nicht zu billigenden Bezeichnungen $\Pi^n(x)$, $\sin^n \Pi(x)$, $\operatorname{tang}^n \frac{1}{2}\Pi(x)$.

auch $\frac{1}{2}\Pi(x)$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, so dass also wieder $\tang\frac{1}{2}\Pi(x)$ positiv, und daher nach dem Obigen auch jetzt

$$\tang\tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}$$

ist. Folglich ist allgemein:

$$9) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \tang\tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\tang\tfrac{1}{2}\Pi(x)^n = (e^{-x})^n = e^{-nx},$$

folglich, weil nach 9)

$$\tang\tfrac{1}{2}\Pi(nx) = e^{-nx}$$

ist:

$$10) \quad \ldots\ldots \quad \tang\tfrac{1}{2}\Pi(x)^n = \tang\tfrac{1}{2}\Pi(nx).$$

Nach 9) ist:

$$11) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = -\,l\tang\tfrac{1}{2}\Pi(x),$$

mittelst welcher Formel man x aus $\Pi(x)$ berechnen kann.

Aus $\Pi(x) = \Pi(y)$ folgt nach vorstehender Formel $x = y$.

Wenn x positiv und folglich e^{-x} nicht grösser als 1 ist, so ist wegen 9) nach einer bekannten Reihe:

$$\tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x} - \tfrac{1}{3}e^{-3x} + \tfrac{1}{5}e^{-5x} - \tfrac{1}{7}e^{-7x} + \ldots,$$

also:

$$\Pi(x) = 2(e^{-x} - \tfrac{1}{3}e^{-3x} + \tfrac{1}{5}e^{-5x} - \tfrac{1}{7}e^{-7x} + \ldots.),$$

wo $\frac{1}{2}\Pi(x)$ zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi$, also $\Pi(x)$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt. Wenn x negativ und folglich e^{x} nicht grösser als 1 ist, so ist ganz auf ähnliche Weise:

$$\tfrac{1}{2}\Pi(-x) = e^{x} - \tfrac{1}{3}e^{3x} + \tfrac{1}{5}e^{5x} - \tfrac{1}{7}e^{7x} + \ldots.),$$

also:

$$\Pi(-x) = 2(e^{x} - \tfrac{1}{3}e^{3x} + \tfrac{1}{5}e^{5x} - \tfrac{1}{7}e^{7x} + \ldots.),$$

wo $\frac{1}{2}\Pi(-x)$ zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi$, also $\Pi(-x)$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt; und weil nun nach 7):

$$\Pi(x) + \Pi(-x) = \pi$$

ist, so ist

$$\Pi(x) = \pi - \Pi(-x),$$

also nach Vorstehendem:

$$\Pi(x) = \pi - 2(e^x - \tfrac{1}{3}e^{3x} + \tfrac{1}{5}e^{5x} - \tfrac{1}{7}e^{7x} + \ldots .).$$

§. 4.

Wir wollen jetzt verschiedene für unsere ferneren Untersuchungen wichtige Relationen entwickeln.

Weil nach 5):

$$\sin\Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}},\quad \sin\Pi(-x) = \frac{2}{e^{-x} + e^x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

$$\cos\Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\quad \cos\Pi(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ist, so ist:

$$12) \ldots \sin\Pi(-x) = \sin\Pi(x),\quad \cos\Pi(-x) = -\cos\Pi(x)$$

oder:

$$13) \ldots \sin\Pi(x) - \sin\Pi(-x) = 0,\ \cos\Pi(x) + \cos\Pi(-x) = 0.$$

Also ist:

$$14) \ldots \operatorname{tang}\Pi(-x) = -\operatorname{tang}\Pi(x),\ \cot\Pi(-x) = -\cot\Pi(x).$$

Aus den beiden Gleichungen 5) ergiebt sich sogleich:

$$e^x + e^{-x} = \frac{2}{\sin\Pi(x)},\quad \frac{e^x}{e^{-x}} = \frac{1 + \cos\Pi(x)}{1 - \cos\Pi(x)};$$

und bestimmt man nun aus diesen beiden Gleichungen e^x und e^{-x}, so erhält man:

$$15) \ldots . \begin{cases} e^x = \dfrac{1 + \cos\Pi(x)}{\sin\Pi(x)} = \dfrac{\sin\Pi(x)}{1 - \cos\Pi(x)} = \cot\tfrac{1}{2}\Pi(x) \\[2ex] e^{-x} = \dfrac{\sin\Pi(x)}{1 + \cos\Pi(x)} = \dfrac{1 - \cos\Pi(x)}{\sin\Pi(x)} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Pi(x). \end{cases}$$

Nach 5) ist:

$$\sin\Pi(x + y) = \frac{2}{e^{x+y} + e^{-(x+y)}} = \frac{2}{e^x e^y + e^{-x}e^{-y}},$$

und weil nun nach 15):

$$e^x e^y + e^{-x} e^{-y} = \frac{1+\cos\Pi(x)}{\sin\Pi(x)} \cdot \frac{1+\cos\Pi(y)}{\sin\Pi(y)} + \frac{1-\cos\Pi(x)}{\sin\Pi(x)} \cdot \frac{1-\cos\Pi(y)}{\sin\Pi(y)}$$
$$= 2\frac{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}$$

ist, so ist:

$$\sin\Pi(x+y) = \frac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}.$$

Ferner ist nach 5):

$$\cos\Pi(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{e^{x+y} + e^{-(x+y)}} = \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{e^x e^y + e^{-x} e^{-y}},$$

und weil nun nach 15):

$$e^x e^y - e^{-x} e^{-y} = \frac{1+\cos\Pi(x)}{\sin\Pi(x)} \cdot \frac{1+\cos\Pi(y)}{\sin\Pi(y)} - \frac{1-\cos\Pi(x)}{\sin\Pi(x)} \cdot \frac{1-\cos\Pi(y)}{\sin\Pi(y)}$$
$$= 2\frac{\cos\Pi(x)+\cos\Pi(y)}{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}$$

ist, so ist:

$$\cos\Pi(x+y) = \frac{\cos\Pi(x)+\cos\Pi(y)}{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}.$$

Also ist:

16) . . . $$\begin{cases} \sin\Pi(x+y) = \dfrac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}, \\ \cos\Pi(x+y) = \dfrac{\cos\Pi(x)+\cos\Pi(y)}{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}. \end{cases}$$

Setzt man hierin $-y$ für y, so erhält man mit Rücksicht auf 12):

17) . . . $$\begin{cases} \sin\Pi(x-y) = \dfrac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{1-\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}, \\ \cos\Pi(x-y) = \dfrac{\cos\Pi(x)-\cos\Pi(y)}{1-\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich ferner:

18) . . . $$\begin{cases} \operatorname{tang}\Pi(x+y) = \dfrac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{\cos\Pi(x)+\cos\Pi(y)}, \\ \cot\Pi(x+y) = \dfrac{\cos\Pi(x)+\cos\Pi(y)}{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)} \end{cases}$$

und:

$$19)\;\ldots\;\begin{cases}\operatorname{tang}\Pi(x-y)=\dfrac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{\cos\Pi(x)-\cos\Pi(y)},\\[2ex] \cot\Pi(x-y)=\dfrac{\cos\Pi(x)-\cos\Pi(y)}{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}\end{cases}$$

oder:

$$20)\;\ldots\;\begin{cases}\operatorname{tang}\Pi(x+y)=\dfrac{1}{\dfrac{\cot\Pi(x)}{\sin\Pi(y)}+\dfrac{\cot\Pi(y)}{\sin\Pi(x)}},\\[2ex] \cot\Pi(x+y)=\dfrac{\cot\Pi(x)}{\sin\Pi(y)}+\dfrac{\cot\Pi(y)}{\sin\Pi(x)}\end{cases}$$

und:

$$21)\;\ldots\;\begin{cases}\operatorname{tang}\Pi(x-y)=\dfrac{1}{\dfrac{\cot\Pi(x)}{\sin\Pi(y)}-\dfrac{\cot\Pi(y)}{\sin\Pi(x)}},\\[2ex] \cot\Pi(x-y)=\dfrac{\cot\Pi(x)}{\sin\Pi(y)}-\dfrac{\cot\Pi(y)}{\sin\Pi(x)}.\end{cases}$$

Für $x=y$ erhält man aus dem Vorhergehenden sogleich:

$$22)\ldots\;\begin{cases}\sin\Pi(2x)=\dfrac{\sin\Pi(x)^2}{1+\cos\Pi(x)^2}=\dfrac{1-\cos\Pi(x)^2}{1+\cos\Pi(x)^2},\\[2ex] \cos\Pi(2x)=\dfrac{2\cos\Pi(x)}{1+\cos\Pi(x)^2}\end{cases}$$

und:

$$23)\ldots\;\begin{cases}\operatorname{tang}\Pi(2x)=\dfrac{\sin\Pi(x)^2}{2\cos\Pi(x)}=\tfrac{1}{2}\sin\Pi(x)\operatorname{tang}\Pi(x),\\[2ex] \cot\Pi(2x)=\dfrac{2\cos\Pi(x)}{\sin\Pi(x)^2}=\dfrac{2\cot\Pi(x)}{\sin\Pi(x)}.\end{cases}$$

Also ist:

$$\sin\Pi(x)=\frac{1-\cos\Pi(\frac{1}{2}x)^2}{1+\cos\Pi(\frac{1}{2}x)^2},$$

woraus man leicht:

$$\cos\Pi(\tfrac{1}{2}x)^2=\frac{1-\sin\Pi(x)}{1+\sin\Pi(x},$$

und hieraus ferner:

$$\sin \Pi(\tfrac{1}{2}x)^2 = \frac{2 \sin \Pi(x)}{1 + \sin \Pi(x)}$$

findet; folglich ist:

$$24) \ldots \begin{cases} \sin \Pi(\tfrac{1}{2}x) = \sqrt{\dfrac{2 \sin \Pi(x)}{1 + \sin \Pi(x)}}, \\ \cos \Pi(\tfrac{1}{2}x) = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \sin \Pi(x)}{1 + \sin \Pi(x)}} \end{cases}$$

und:

$$25) \ldots \begin{cases} \operatorname{tang} \Pi(\tfrac{1}{2}x) = \pm \sqrt{\dfrac{2 \sin \Pi(x)}{1 - \sin \Pi(x)}}, \\ \cot \Pi(\tfrac{1}{2}x) = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \sin \Pi(x)}{2 \sin \Pi(x)}}; \end{cases}$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist.

Es ist auch:

$$\cos \Pi(\tfrac{1}{2}x) = \pm \sqrt{\frac{1 - \sin \Pi(x)^2}{\{1 + \sin \Pi(x)\}^2}} = \pm \sqrt{\frac{\{1 - \sin \Pi(x)\}^2}{1 - \sin \Pi(x)^2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{\cos \Pi(x)^2}{\{1 + \sin \Pi(x)\}^2}} = \pm \sqrt{\frac{\{1 - \sin \Pi(x)\}^2}{\cos \Pi(x)^2}},$$

also offenbar allgemein:

$$26) \ldots \cos \Pi(\tfrac{1}{2}x) = \frac{\cos \Pi(x)}{1 + \sin \Pi(x)} = \frac{1 - \sin \Pi(x)}{\cos \Pi(x)}.$$

§. 5.

Durch Differentiation erhält man:

$$\frac{\partial \sin \Pi(x)}{\partial x} = \cos \Pi(x) \frac{\partial \Pi(x)}{\partial x}.$$

Nun ist aber:

$$\sin \Pi(x) = 2(e^x + e^{-x})^{-1},$$

also:

$$\frac{\partial \sin \Pi(x)}{\partial x} = -2(e^x + e^{-x})^{-2}(e^x - e^{-x})$$

$$= -\frac{2}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

folglich:

$$27) \ldots \frac{\partial \sin \Pi(x)}{\partial x} = -\sin \Pi(x) \cos \Pi(x) = -\tfrac{1}{2} \sin 2\,\Pi(x),$$

und wenn man dies mit dem Obigen vergleicht:

$$28) \ldots \ldots \frac{\partial \Pi(x)}{\partial x} = -\sin \Pi(x),$$

also:

$$29) \ldots \ldots \frac{\partial^n \Pi(x)}{\partial x^n} = -\frac{\partial^{n-1} \sin \Pi(x)}{\partial x^{n-1}}.$$

Aus

$$\cos \Pi(x)^2 + \sin \Pi(x)^2 = 1$$

ergiebt sich:

$$\cos \Pi(x) \frac{\partial \cos \Pi(x)}{\partial x} + \sin \Pi(x) \frac{\partial \sin \Pi(x)}{\partial x} = 0,$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\cos \Pi(x) \frac{\partial \cos \Pi(x)}{\partial x} - \sin \Pi(x)^2 \cos \Pi(x) = 0,$$

also:

$$30) \ldots \ldots \frac{\partial \cos \Pi(x)}{\partial x} = \sin \Pi(x)^2,$$

was sich auch durch Differentiation aus der Gleichung

$$\cos \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

leicht ergiebt, indem hiernach

$$\begin{aligned}\frac{\partial \cos \Pi(x)}{\partial x} &= -(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})^{-2}(e^x - e^{-x}) \\ &\quad + (e^x + e^{-x})^{-1}(e^x + e^{-x}) \\ &= 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = 1 - \cos \Pi(x)^2 = \sin \Pi(x)^2\end{aligned}$$

ist, wie vorher in 30).

Weil

$$\operatorname{tang} \Pi(x) = \frac{\sin \Pi(x)}{\cos \Pi(x)}, \quad \cot \Pi(x) = \frac{\cos \Pi(x)}{\sin \Pi(x)}$$

ist, so ist:

$$\frac{\partial \operatorname{tang} \Pi(x)}{\partial x} = \frac{\cos \Pi(x) \frac{\partial \sin \Pi(x)}{\partial x} - \sin \Pi(x) \frac{\partial \cos \Pi(x)}{\partial x}}{\cos \Pi(x)^2},$$

$$\frac{\partial \cot \Pi(x)}{\partial x} = \frac{\sin \Pi(x) \frac{\partial \cos \Pi(x)}{\partial x} - \cos \Pi(x) \frac{\partial \sin \Pi(x)}{\partial x}}{\sin \Pi(x)^2};$$

also nach 27) und 30):

$$\frac{\partial \operatorname{tang} \Pi(x)}{\partial x} = \frac{-\sin \Pi(x) \cos \Pi(x)^2 - \sin \Pi(x)^3}{\cos \Pi(x)^2},$$

$$\frac{\partial \cot \Pi(x)}{\partial x} = \frac{\sin \Pi(x)^3 + \sin \Pi(x) \cos \Pi(x)^2}{\sin \Pi(x)^2};$$

folglich offenbar:

31)

$$\frac{\partial \operatorname{tang} \Pi(x)}{\partial x} = -\frac{\sin \Pi(x)}{\cos \Pi(x)^2} = -\frac{\operatorname{tang} \Pi(x)}{\cos \Pi(x)}, \quad \frac{\partial \cot \Pi(x)}{\partial x} = \frac{1}{\sin \Pi(x)}.$$

Den Differentialquotienten von $\cot \Pi(x)$ findet man auch leicht aus dem Differentialquotienten von $\operatorname{tang} \Pi(x)$ mittelst der Gleichung

$$\operatorname{tang} \Pi(x) \cot \Pi(x) = 1.$$

Zweites Kapitel.

Das imaginäre oder eingebildete Dreieck.

§. 6.

Es seien a, b, c drei beliebige Grössen und A, B, C drei beliebige zwischen 0 und 180° liegende Winkel, so dass

$$0 < A < 180^0, \quad 0 < B < 180^0, \quad 0 < C < 180^0$$

ist, und daher die Sinus $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ dieser drei Winkel positiv sind und nicht verschwinden.

Nimmt man nun von den sechs Grössen a, b, c; A, B, C etwa die drei letzten A, B, C als gegeben an, so bestimme man, insofern dies möglich ist, was wir für jetzt annehmen, aber nachher näher untersuchen wollen, die Grösse a mittelst der Formel:

32) . . . . . $\sin\Pi(a)=\frac{\sin B\sin C}{\cos A+\cos B\cos C}$,

und hierauf b, c mittelst der Formeln:

33)... $\operatorname{tang}\Pi(b)=\frac{\sin A}{\sin B}\operatorname{tang}\Pi(a)$, $\operatorname{tang}\Pi(c)=\frac{\sin A}{\sin C}\operatorname{tang}\Pi(a)$,

was unter den gemachten Voraussetzungen immer möglich ist; dann hat man die Gleichungen:

34)... $\sin A\operatorname{tang}\Pi(a)=\sin B\operatorname{tang}\Pi(b)=\sin C\operatorname{tang}\Pi(c)$.

Hiernach ist nun:

$$\operatorname{tang}\Pi(a)=\frac{\sin B}{\sin A}\operatorname{tang}\Pi(b),\quad \operatorname{tang}\Pi(a)=\frac{\sin C}{\sin A}\operatorname{tang}\Pi(c);$$

also:

$$\sin\Pi(a)^2=\frac{\operatorname{tang}\Pi(a)^2}{1+\operatorname{tang}\Pi(a)^2}=\frac{\sin B^2\sin\Pi(b)^2}{\sin A^2\cos\Pi(b)^2+\sin B^2\sin\Pi(b)^2},$$

$$\sin\Pi(a)^2=\frac{\operatorname{tang}\Pi(a)^2}{1+\operatorname{tang}\Pi(a)^2}=\frac{\sin C^2\sin\Pi(c)^2}{\sin A^2\cos\Pi(c)^2+\sin C^2\sin\Pi(c)^2};$$

folglich, weil nach 32)

$$\cos A+\cos B\cos C=\frac{\sin B\sin C}{\sin\Pi(a)}$$

ist:

$$(\cos A+\cos B\cos C)^2=\frac{\sin C^2\{\sin A^2\cos\Pi(b)^2+\sin B^2\sin\Pi(b)^2\}}{\sin\Pi(b)^2},$$

$$(\cos A+\cos B\cos C)^2=\frac{\sin B^2\{\sin A^2\cos\Pi(c)^2+\sin C^2\sin\Pi(c)^2\}}{\sin\Pi(c)^2};$$

also:

$$(\cos A+\cos B\cos C)^2\sin\Pi(b)^2=\sin C^2\{\sin A^2+(\cos A^2-\cos B^2)\sin\Pi(b)^2\},$$

$$(\cos A+\cos B\cos C)^2\sin\Pi(c)^2=\sin B^2\{\sin A^2+(\cos A^2-\cos C^2)\sin\Pi(c)^2\};$$

und hieraus:

$$\{(\cos A+\cos B\cos C)^2-(\cos A^2-\cos B^2)\sin C^2\}\sin\Pi(b)^2=\sin C^2\sin A^2,$$

$$\{(\cos A+\cos B\cos C)^2-(\cos A^2-\cos C^2)\sin B^2\}\sin\Pi(c)^2=\sin A^2\sin B^2;$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$(\cos B^2+2\cos A\cos B\cos C+\cos C^2\cos A^2)\sin\Pi(b)^2=\sin C^2\sin A^2,$$

$$(\cos C^2+2\cos A\cos B\cos C+\cos A^2\cos B^2)\sin\Pi(c)^2=\sin A^2\sin B^2;$$

folglich:

$$(\cos B + \cos C \cos A)^2 \sin \Pi(b)^2 = \sin C^2 \sin A^2,$$

$$(\cos C + \cos A \cos B)^2 \sin \Pi(c)^2 = \sin A^2 \sin B^2.$$

Da nun bekanntlich $\sin \Pi(b)$, $\sin \Pi(c)$ und auch die Producte $\sin C \sin A$, $\sin A \sin B$ stets positiv sind, so lassen sich aus diesen Gleichungen die Gleichungen

$$(\cos B + \cos C \cos A) \sin \Pi(b) = \sin C \sin A,$$

$$(\cos C + \cos A \cos B) \sin \Pi(c) = \sin A \sin B$$

nur schliessen, wenn

$$\cos B + \cos C \cos A > 0,$$

$$\cos C + \cos A \cos B > 0$$

ist; ferner lässt sich $\sin \Pi(a)$ oder a mittelst der Gleichung

$$\sin \Pi(a) = \frac{\sin B \sin C}{\cos A + \cos B \cos C}$$

nur dann bestimmen, wenn

$$\cos A + \cos B \cos C \overset{=}{>} \sin B \sin C$$

und also auch

$$\cos A + \cos B \cos C > 0$$

ist.

Wir wollen daher jetzt annehmen, dass

$$\cos A + \cos B \cos C > 0,$$

$$\cos B + \cos C \cos A > 0,$$

$$\cos C + \cos A \cos B > 0$$

und

$$\cos A + \cos B \cos C \overset{=}{>} \sin B \sin C$$

sei, und untersuchen, was sich hieraus schliessen lässt.

Wenn man je zwei der drei ersten Beziehungen durch Addition mit einander verbindet, so erhält man:

$$(\cos A + \cos B)(1 + \cos C) > 0,$$

$$(\cos B + \cos C)(1 + \cos A) > 0,$$

$$(\cos C + \cos A)(1 + \cos B) > 0;$$

oder:

$$(\cos A + \cos B) \cos \tfrac{1}{2}C^2 > 0,$$

$$(\cos B + \cos C) \cos \tfrac{1}{2}A^2 > 0,$$

$$(\cos C + \cos A) \cos \tfrac{1}{2}B^2 > 0;$$

folglich, weil unter den gemachten Voraussetzungen offenbar keiner der drei Cosinusse

$$\cos \tfrac{1}{2}A, \quad \cos \tfrac{1}{2}B, \quad \cos \tfrac{1}{2}C$$

verschwindet:

$$\cos A + \cos B > 0,$$

$$\cos B + \cos C > 0,$$

$$\cos C + \cos A > 0;$$

also:

$$\cos \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B) > 0,$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(B + C) \cos \tfrac{1}{2}(B - C) > 0,$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(C + A) \cos \tfrac{1}{2}(C - A) > 0.$$

Weil nun aber offenbar

$$-90^0 < \tfrac{1}{2}(A - B) < +90^0,$$

$$-90^0 < \tfrac{1}{2}(B - C) < +90^0,$$

$$-90^0 < \tfrac{1}{2}(C - A) < +90^0$$

ist, und folglich

$$\cos \tfrac{1}{2}(A - B), \quad \cos \tfrac{1}{2}(B - C), \quad \cos \tfrac{1}{2}(C - A)$$

positiv sind und nicht verschwinden, so ist:

$$\cos \tfrac{1}{2}(A + B) > 0, \quad \cos \tfrac{1}{2}(B + C) > 0, \quad \cos \tfrac{1}{2}(C + A) > 0;$$

also, weil unter den gemachten Voraussetzungen offenbar

$$0 < \tfrac{1}{2}(A + B) < 180^0,$$

$$0 < \tfrac{1}{2}(B + C) < 180^0,$$

$$0 < \tfrac{1}{2}(C + A) < 180^0$$

ist, jedenfalls:

$$0 < \tfrac{1}{2}(A + B) < 90^0,$$

$$0 < \tfrac{1}{2}(B + C) < 90^0,$$

$$0 < \tfrac{1}{2}(C + A) < 90^0;$$

folglich:

$$0 < A + B < 180^\circ,$$

$$0 < B + C < 180^\circ,$$

$$0 < C + A < 180^\circ.$$

Nun ist aber nach den gemachten Voraussetzungen:

$$\cos A + \cos B \cos C \overset{=}{>} \sin B \sin C,$$

also:

$$\cos A + \cos B \cos C - \sin B \sin C \overset{=}{>} 0;$$

folglich:

$$\cos A + \cos(B + C) \overset{=}{>} 0,$$

$$\cos(B + C) \overset{=}{>} -\cos A$$

oder:

$$\cos(B + C) \overset{=}{>} \cos(180^\circ - A);$$

woraus sich, weil

$$0 < B + C < 180^\circ, \quad 0 < 180^\circ - A < 180^\circ$$

ist, unmittelbar

$$B + C \overset{=}{<} 180^\circ - A,$$

also:

$$A + B + C \overset{=}{<} 180^\circ$$

ergiebt, welche Bedingung also aus den gemachten Voraussetzungen mit aller Strenge folgt.

Jetzt wollen wir aber untersuchen, ob umgekehrt, wenn

$$A + B + C \overset{=}{<} 180^\circ$$

ist, daraus alle oben gemachten Voraussetzungen folgen, natürlich immer unter der Annahme, dass, wie früher:

$$0 < A < 180^\circ, \quad 0 < B < 180^\circ, \quad 0 < C < 180^\circ$$

sei

Aus

$$A+B+C \overset{=}{<} 180^0$$

folgt:

$$B+C \overset{=}{<} 180^0-A,$$

$$C+A \overset{=}{<} 180^0-B,$$

$$A+B \overset{=}{<} 180^0-C;$$

und es ist also, weil

$$0 < 180^0-A < 180^0,$$
$$0 < 180^0-B < 180^0,$$
$$0 < 180^0-C < 180^0$$

ist, offenbar auch:

$$0 < B+C < 180^0,$$
$$0 < C+A < 180^0,$$
$$0 < A+B < 180^0.$$

Weil nun hiernach:

$$0 < B+C < 180^0,$$
$$0 < C+A < 180^0,$$
$$0 < A+B < 180^0$$

und

$$0 < 180^0-A < 180^0,$$
$$0 < 180^0-B < 180^0,$$
$$0 < 180^0-C < 180^0$$

so wie

$$B+C \overset{=}{<} 180^0-A,$$

$$C+A \overset{=}{<} 180^0-B,$$

$$A+B \overset{=}{<} 180^0-C$$

ist; so ist offenbar:

$$\cos(B+C) \overset{=}{>} \cos(180^0-A),$$

$$\cos(C+A) \overset{=}{>} \cos(180^0-B),$$

$$\cos(A+B) \overset{=}{>} \cos(180^0-C);$$

also:

$$\cos(B+C) \geqq -\cos A,$$

$$\cos(C+A) \geqq -\cos B,$$

$$\cos(A+B) \geqq -\cos C;$$

folglich:

$$\cos A + \cos(B+C) \geqq 0,$$

$$\cos B + \cos(C+A) \geqq 0,$$

$$\cos C + \cos(A+B) \geqq 0;$$

also:

$$\cos A + \cos B \cos C - \sin B \sin C \geqq 0,$$

$$\cos B + \cos C \cos A - \sin C \sin A \geqq 0,$$

$$\cos C + \cos A \cos B - \sin A \sin B \geqq 0;$$

und hieraus:

$$\cos A + \cos B \cos C \geqq \sin B \sin C,$$

$$\cos B + \cos C \cos A \geqq \sin C \sin A,$$

$$\cos C + \cos A \cos B \geqq \sin A \sin B;$$

folglich unter den gemachten Voraussetzungen auch:

$$\cos A + \cos B \cos C > 0,$$

$$\cos B + \cos C \cos A > 0,$$

$$\cos C + \cos A \cos B > 0;$$

wodurch wir also wiederum zu den Voraussetzungen, von denen früher ausgegangen wurde, gelangt sind.

Ueberhaupt ergiebt sich nun hieraus, dass

$$A + B + C \leqq 180^{\circ},$$

natürlich immer vorausgesetzt, dass

$$0 < A < 180^\circ,$$
$$0 < B < 180^\circ,$$
$$0 < C < 180^\circ$$

sei, die nothwendige Bedingung ist, welche erfüllt sein muss, wenn aus den als bekannt angenommenen Winkeln A, B, C sich a, b, c sollen so bestimmen lassen, dass

$$\sin \Pi(a) = \frac{\sin B \sin C}{\cos A + \cos B \cos C}$$

oder

$$(\cos A + \cos B \cos C) \sin \Pi(a) = \sin B \sin C$$

und

$$\sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(b) = \sin C \operatorname{tang} \Pi(c),$$

und dann, als Folge hieraus, auch

$$(\cos B + \cos C \cos A) \sin \Pi(b) = \sin C \sin A,$$
$$(\cos C + \cos A \cos B) \sin \Pi(c) = \sin A \sin B$$

ist.

Es werden sich also hiernach die sechs Grössen

$$a,\ b,\ c;\quad A,\ B,\ C$$

immer so bestimmt annehmen lassen, dass

$$0 < A < 180^\circ,$$
$$0 < B < 180^\circ,$$
$$0 < C < 180^\circ$$

und

$$A + B + C \overline{\gtrless} 180^\circ$$

ist, und dass die sechs Gleichungen:

$$35) \ldots \left\{\begin{array}{l} \sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(b), \\ \sin B \operatorname{tang} \Pi(b) = \sin C \operatorname{tang} \Pi(c), \\ \sin C \operatorname{tang} \Pi(c) = \sin A \operatorname{tang} \Pi(a); \\ \\ (\cos A + \cos B \cos C) \sin \Pi(a) = \sin B \sin C, \\ (\cos B + \cos C \cos A) \sin \Pi(b) = \sin C \sin A, \\ (\cos C + \cos A \cos B) \sin \Pi(c) = \sin A \sin B \end{array}\right.$$

vollständig erfüllt sind.

Wir wollen nun sehen, welche weiteren Folgerungen sich aus diesen sechs Gleichungen, die als die eigentliche Grundlage aller unserer folgenden Untersuchungen zu betrachten sind, ziehen lassen.

§. 7.

Nach den drei letzten Gleichungen in 35) ist:

$$\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\cos B+\cos C\cos A}\cdot\frac{\sin\Pi(a)}{\sin\Pi(b)}=\frac{\sin B}{\sin A},$$

und da nun nach den drei ersten Gleichungen in 35)

$$\frac{\sin\Pi(a)}{\sin\Pi(b)}=\frac{\sin B}{\sin A}\cdot\frac{\cos\Pi(a)}{\cos\Pi(b)}$$

ist, so ist:

$$\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\cos B+\cos C\cos A}\cdot\frac{\cos\Pi(a)}{\cos\Pi(b)}=1;$$

also hat man überhaupt die Relationen:

$$36)\;\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}&(\cos A+\cos B\cos C)\cos\Pi(a)\\ =\;&(\cos B+\cos C\cos A)\cos\Pi(b)\\ =\;&(\cos C+\cos A\cos B)\cos\Pi(c),\end{aligned}\right.$$

aus denen sich leicht:

$$37)\;\ldots\left\{\begin{aligned}\cos A&=\frac{\cos B\cos\Pi(b)-\cos C\cos\Pi(c)}{\cos B\cos\Pi(c)-\cos C\cos\Pi(b)},\\ \cos B&=\frac{\cos C\cos\Pi(c)-\cos A\cos\Pi(a)}{\cos C\cos\Pi(a)-\cos A\cos\Pi(c)},\\ \cos C&=\frac{\cos A\cos\Pi(a)-\cos B\cos\Pi(b)}{\cos A\cos\Pi(b)-\cos B\cos\Pi(a)};\end{aligned}\right.$$

und hieraus ferner:

$$38)\ldots\left\{\begin{aligned}\sin A^2&=-\frac{(\cos B^2-\cos C^2)\{\cos\Pi(b)^2-\cos\Pi(c)^2\}}{\{\cos B\cos\Pi(c)-\cos C\cos\Pi(b)\}^2},\\ \sin B^2&=-\frac{(\cos C^2-\cos A^2)\{\cos\Pi(c)^2-\cos\Pi(a)^2\}}{\{\cos C\cos\Pi(a)-\cos A\cos\Pi(c)\}^2},\\ \sin C^2&=-\frac{(\cos A^2-\cos B^2)\{\cos\Pi(a)^2-\cos\Pi(b)^2\}}{\{\cos A\cos\Pi(b)-\cos B\cos\Pi(a)\}^2}\end{aligned}\right.$$

oder:

$$39)\ldots\left\{\begin{aligned}\sin A^2&=-\frac{(\sin B^2-\sin C^2)\{\sin\Pi(b)^2-\sin\Pi(c)^2\}}{\{\cos B\cos\Pi(c)-\cos C\cos\Pi(b)\}^2},\\ \sin B^2&=-\frac{(\sin C^2-\sin A^2)\{\sin\Pi(c)^2-\sin\Pi(a)^2\}}{\{\cos C\cos\Pi(a)-\cos A\cos\Pi(c)\}^2},\\ \sin C^2&=-\frac{(\sin A^2-\sin B^2)\{\sin\Pi(a)^2-\sin\Pi(b)^2\}}{\{\cos A\cos\Pi(b)-\cos B\cos\Pi(a)\}^2}\end{aligned}\right.$$

ergiebt.

§. 8.

Aus der ersten der drei letzten Gleichungen in 35) folgt:

$$\cos A=\frac{\sin B\sin C-\cos B\cos C\sin\Pi(a)}{\sin\Pi(a)},$$

also ist, wie man leicht findet:

$$\cos B+\cos C\cos A=\sin C\,\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C\sin\Pi(a)}{\sin\Pi(a)},$$

$$\cos C+\cos A\cos B=\sin B\,\frac{\cos B\sin C+\sin B\cos C\sin\Pi(a)}{\sin\Pi(a)};$$

folglich:

$$\frac{\cos B+\cos C\cos A}{\cos C+\cos A\cos B}=\frac{\sin C}{\sin B}\cdot\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C\sin\Pi(a)}{\cos B\sin C+\sin B\cos C\sin\Pi(a)};$$

nun ist aber ferner nach 35):

$$\frac{\cos B+\cos C\cos A}{\cos C+\cos A\cos B}\cdot\frac{\sin\Pi(b)}{\sin\Pi(c)}=\frac{\sin C}{\sin B},$$

also offenbar:

$$\frac{\sin\Pi(b)}{\sin\Pi(c)}\cdot\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C\sin\Pi(a)}{\cos B\sin C+\sin B\cos C\sin\Pi(a)}=1.$$

Daher hat man überhaupt die folgenden Gleichungen:

$$40)\ldots\left\{\begin{aligned}\frac{\sin\Pi(a)}{\sin\Pi(b)}\cdot\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B\sin\Pi(c)}{\cos A\sin B+\sin A\cos B\sin\Pi(c)}&=1,\\ \frac{\sin\Pi(b)}{\sin\Pi(c)}\cdot\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C\sin\Pi(a)}{\cos B\sin C+\sin B\cos C\sin\Pi(a)}&=1,\\ \frac{\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)}\cdot\frac{\sin C\cos A+\cos C\sin A\sin\Pi(b)}{\cos C\sin A+\sin C\cos A\sin\Pi(b)}&=1;\end{aligned}\right.$$

aus denen sich leicht:

41)

$$\sin\Pi(a) = -\frac{\sin B\cos C\sin\Pi(b) - \cos B\sin C\sin\Pi(c)}{\cos B\sin C\sin\Pi(b) - \sin B\cos C\sin\Pi(c)},$$

$$\sin\Pi(b) = -\frac{\sin C\cos A\sin\Pi(c) - \cos C\sin A\sin\Pi(a)}{\cos C\sin A\sin\Pi(c) - \sin C\cos A\sin\Pi(a)},$$

$$\sin\Pi(c) = -\frac{\sin A\cos B\sin\Pi(a) - \cos A\sin B\sin\Pi(b)}{\cos A\sin B\sin\Pi(a) - \sin A\cos B\sin\Pi(b)};$$

und hieraus ferner:

42)

$$\cos\Pi(a)^2 = -\frac{\sin(B-C)^2\{\sin\Pi(b)^2 - \sin\Pi(c)^2\}}{\{\cos B\sin C\sin\Pi(b) - \sin B\cos C\sin\Pi(c)\}^2},$$

$$\cos\Pi(b)^2 = -\frac{\sin(C-A)^2\{\sin\Pi(c)^2 - \sin\Pi(a)^2\}}{\{\cos C\sin A\sin\Pi(c) - \sin C\cos A\sin\Pi(a)\}^2},$$

$$\cos\Pi(c)^2 = -\frac{\sin(A-B)^2\{\sin\Pi(a)^2 - \sin\Pi(b)^2\}}{\{\cos A\sin B\sin\Pi(a) - \sin A\cos B\sin\Pi(b)\}^2};$$

oder:

43)

$$\cos\Pi(a)^2 = \frac{\sin(B-C)^2\{\cos\Pi(b)^2 - \cos\Pi(c)^2\}}{\{\cos B\sin C\sin\Pi(b) - \sin B\cos C\sin\Pi(c)\}^2},$$

$$\cos\Pi(b)^2 = \frac{\sin(C-A)^2\{\cos\Pi(c)^2 - \cos\Pi(a)^2\}}{\{\cos C\sin A\sin\Pi(c) - \sin C\cos A\sin\Pi(a)\}^2},$$

$$\cos\Pi(c)^2 = \frac{\sin(A-B)^2\{\cos\Pi(a)^2 - \cos\Pi(b)^2\}}{\{\cos A\sin B\sin\Pi(a) - \sin A\cos B\sin\Pi(b)\}^2}$$

ergiebt.

§. 9.

Nach 35) ist:

$$(\cos A + \cos B\cos C)\sin\Pi(a) = \sin B\sin C,$$

$$(\cos B + \cos C\cos A)\sin\Pi(b) = \sin C\sin A;$$

also, wenn man aus diesen beiden Gleichungen $\cos B$ eliminirt, und dann durch $\sin C$ dividirt:

$$\cos A\sin C\sin\Pi(a)\sin\Pi(b) = \sin B\sin\Pi(b) - \sin A\cos C\sin\Pi(a),$$

folglich:

$$\sin B = \frac{\sin A \cos C + \cos A \sin C \sin \Pi(b)}{\sin \Pi(b)} \sin \Pi(a).$$

Weil nun aber nach 35)

$$\sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(b)$$

ist, so erhält man offenbar die Gleichung:

$$\sin A \cos \Pi(b) = \{\sin A \cos C + \cos A \sin C \sin \Pi(b)\} \cos \Pi(a),$$

und hieraus ferner:

$$\cot A = \frac{\cos \Pi(b) - \cos C \cos \Pi(a)}{\sin C \sin \Pi(b) \cos \Pi(a)},$$

also überhaupt die Gleichungen:

$$44) \ldots \left\{ \begin{aligned} \cot A &= \frac{\cos \Pi(b) - \cos C \cos \Pi(a)}{\sin C \sin \Pi(b) \cos \Pi(a)} \\ &= \frac{\cos \Pi(c) - \cos B \cos \Pi(a)}{\sin B \sin \Pi(c) \cos \Pi(a)}, \\ \cot B &= \frac{\cos \Pi(c) - \cos A \cos \Pi(b)}{\sin A \sin \Pi(c) \cos \Pi(b)} \\ &= \frac{\cos \Pi(a) - \cos C \cos \Pi(b)}{\sin C \sin \Pi(a) \cos \Pi(b)}, \\ \cot C &= \frac{\cos \Pi(a) - \cos B \cos \Pi(c)}{\sin B \sin \Pi(a) \cos \Pi(c)} \\ &= \frac{\cos \Pi(b) - \cos A \cos \Pi(c)}{\sin A \sin \Pi(b) \cos \Pi(c)}. \end{aligned} \right.$$

§. 10.

Nach 40) ist:

$$\frac{\sin \Pi(c)}{\sin \Pi(b)} \cdot \frac{\cos B \sin C + \sin B \cos C \sin \Pi(a)}{\sin B \cos C + \cos B \sin C \sin \Pi(a)} = 1,$$

also:

$$\frac{\sin \Pi(c)}{\sin \Pi(b)} \cdot \frac{1 + \frac{\sin B}{\sin C} \cdot \frac{\cos C}{\cos B} \sin \Pi(a)}{\frac{\sin B}{\sin C} \cdot \frac{\cos C}{\cos B} + \sin \Pi(a)} = 1,$$

und folglich nach 35):

$$\frac{\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(b)}\cdot\frac{1+\dfrac{\operatorname{tang}\Pi(c)}{\operatorname{tang}\Pi(b)}\sin\Pi(a)\cdot\dfrac{\cos C}{\cos B}}{\dfrac{\operatorname{tang}\Pi(c)}{\operatorname{tang}\Pi(b)}\cdot\dfrac{\cos C}{\cos B}+\sin\Pi(a)}=1,$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$\frac{\cos C}{\cos B}=\frac{\operatorname{tang}\Pi(b)}{\operatorname{tang}\Pi(c)}\cdot\frac{\sin\Pi(c)-\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)}{\sin\Pi(b)-\sin\Pi(a)\sin\Pi(c)}.$$

Nun ist aber nach 37):

$$\cos A=\frac{\cos B\cos\Pi(b)-\cos C\cos\Pi(c)}{\cos B\cos\Pi(c)-\cos C\cos\Pi(b)},$$

also:

$$\cos A=\frac{\cos\Pi(b)-\dfrac{\cos C}{\cos B}\cos\Pi(c)}{\cos\Pi(c)-\dfrac{\cos C}{\cos B}\cos\Pi(b)},$$

und man erhält nun, wenn man in diese Formel den vorhergehenden Ausdruck von $\cos C:\cos B$ einführt und der Kürze wegen

$$\begin{aligned}Z=\;&\{\sin\Pi(b)-\sin\Pi(a)\sin\Pi(c)\}\cos\Pi(b)^2\sin\Pi(c)\\&-\{\sin\Pi(c)-\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\}\sin\Pi(b)\cos\Pi(c)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N=\;&\{\sin\Pi(b)-\sin\Pi(a)\sin\Pi(c)\}\cos\Pi(b)\sin\Pi(c)\cos\Pi(c)\\&-\{\sin\Pi(c)-\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\}\sin\Pi(b)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\end{aligned}$$

setzt, leicht:

$$\cos A=\frac{Z}{N}.$$

Ferner findet man ohne alle Schwierigkeit:

$$\begin{aligned}Z=\;&\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)\{\cos\Pi(b)^2-\cos\Pi(c)^2\}\\&-\sin\Pi(a)\{\cos\Pi(b)^2\sin\Pi(c)^2-\sin\Pi(b)^2\cos\Pi(c)^2\}\\=\;&\{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)-\sin\Pi(a)\}\{\cos\Pi(b)^2-\cos\Pi(c)^2\}\\=\;&\{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)\}\{\sin\Pi(b)^2-\sin\Pi(c)^2\}\end{aligned}$$

und

$$N=\sin\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\{\sin\Pi(b)^2-\sin\Pi(c)^2\},$$

so dass also nach dem Vorhergehenden:

$$\cos A=\frac{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)}$$

ist, und wir daher überhaupt die folgenden Formeln haben:

$$45)\ \ldots\ \begin{cases} \cos A = \dfrac{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)}, \\[2ex] \cos B = \dfrac{\sin\Pi(b)-\sin\Pi(c)\sin\Pi(a)}{\sin\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)}, \\[2ex] \cos C = \dfrac{\sin\Pi(c)-\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)}{\sin\Pi(c)\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)}. \end{cases}$$

§. 11.

Wenn man die Formeln 35), 44), 45), nämlich überhaupt das System der Formeln:

46)

$$\sin A \tang \Pi(a) = \sin B \tang \Pi(b),$$

$$\sin B \tang \Pi(b) = \sin C \tang \Pi(c),$$

$$\sin C \tang \Pi(c) = \sin A \tang \Pi(a);$$

$$(\cos A + \cos B\cos C)\sin\Pi(a) = \sin B\sin C,$$

$$(\cos B + \cos C\cos A)\sin\Pi(b) = \sin C\sin A,$$

$$(\cos C + \cos A\cos B)\sin\Pi(c) = \sin A\sin B;$$

$$\cot A = \frac{\cos\Pi(b)-\cos C\cos\Pi(a)}{\sin C\sin\Pi(b)\cos\Pi(a)} = \frac{\cos\Pi(c)-\cos B\cos\Pi(a)}{\sin B\sin\Pi(c)\cos\Pi(a)},$$

$$\cot B = \frac{\cos\Pi(c)-\cos A\cos\Pi(b)}{\sin A\sin\Pi(c)\cos\Pi(b)} = \frac{\cos\Pi(a)-\cos C\cos\Pi(b)}{\sin C\sin\Pi(a)\cos\Pi(b)},$$

$$\cot C = \frac{\cos\Pi(a)-\cos B\cos\Pi(c)}{\sin B\sin\Pi(a)\cos\Pi(c)} = \frac{\cos\Pi(b)-\cos A\cos\Pi(c)}{\sin A\sin\Pi(b)\cos\Pi(c)};$$

$$\cos A = \frac{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)},$$

$$\cos B = \frac{\sin\Pi(b)-\sin\Pi(c)\sin\Pi(a)}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)},$$

$$\cos C = \frac{\sin\Pi(c)-\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)}{\sin\Pi(c)\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)}.$$

überblickt, so ist eine gewisse Analogie dieser Formeln mit den Grundformeln der ebenen und noch mehr der sphärischen Trigonometrie nicht zu verkennen, und es scheint eine weitere Ver-

folgung des sich hieraus ergebenden Gesichtspunktes sich in mehrfacher Beziehung sehr zu empfehlen. Deshalb wollen wir von jetzt an ein System von sechs Grössen

$$a, b, c; \quad A, B, C$$

welche den Gleichungen 46) genügen oder durch welche diese Gleichungen erfüllt werden, ein imaginäres oder eingebildetes Dreieck nennen, und es sollen a, b, c die Seiten*), dagegen A, B, C die diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel dieses imaginären oder eingebildeten Dreiecks genannt werden, wodurch — wenn auch andere Vortheile dadurch nicht erreicht werden sollten — doch jedenfalls eine leichte und bestimmte Ausdrucksweise ermöglicht werden wird, was für das Folgende von besonderer Bedeutung ist. Wir werden daher im Folgenden auch von gleichseitigen, gleichschenkligen, rechtwinkligen u. s. w. imaginären oder eingebildeten Dreiecken sprechen, was nach dem vorher Gesagten ohne alle weitere Erläuterung verständlich sein wird. Es versteht sich von selbst, dass alle früher gemachten Voraussetzungen auch im Folgenden stets festgehalten werden müssen, in welcher Beziehung wir besonders auf die Bedingungen oder Voraussetzungen

$$0 < A < 180^0,$$

$$0 < B < 180^0,$$

$$0 < C < 180^0$$

und

$$A + B + C \overset{=}{<} 180^0$$

nochmals aufmerksam machen wollen.

§. 12.

Wegen der Bedingung

$$A + B + C \overset{=}{<} 180^0$$

kann jedes imaginäre oder eingebildete Dreieck höchstens einen rechten Winkel haben, und setzen wir also $A = 90^0$, so erhalten

---

*) Es ist wohl kaum die besondere Bemerkung nöthig, dass a, b, c hier durchaus nur als reine Zahlen aufzufassen sind, und also auch in diesem Sinne der Ausdruck „Seiten" zu nehmen ist, wobei Weiteres noch vorbehalten wird.

wir für das imaginäre oder eingebildete rechtwinklige Dreieck aus den Formeln 46) die folgenden Formeln:

47)

$$\operatorname{tang}\Pi(a) = \sin B \operatorname{tang}\Pi(b),$$

$$\sin B \operatorname{tang}\Pi(b) = \sin C \operatorname{tang}\Pi(c),$$

$$\operatorname{tang}\Pi(a) = \sin C \operatorname{tang}\Pi(c);$$

$$\sin\Pi(a) = \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C,$$

$$\sin C = \cos B \sin\Pi(b),$$

$$\sin B = \cos C \sin\Pi(c);$$

$$\cos\Pi(b) = \cos C\cos\Pi(a),\ \cos\Pi(c) = \cos B\cos\Pi(a),$$

$$\cot B = \frac{\cot\Pi(c)}{\cos\Pi(b)} = \frac{\cos\Pi(a) - \cos C\cos\Pi(b)}{\sin C\sin\Pi(a)\cos\Pi(b)},$$

$$\cot C = \frac{\cos\Pi(a) - \cos B\cos\Pi(c)}{\sin B\sin\Pi(a)\cos\Pi(c)} = \frac{\cot\Pi(b)}{\cos\Pi(c)};$$

$$\sin\Pi(a) = \sin\Pi(b)\sin\Pi(c),$$

$$\cos B = \frac{\sin\Pi(b) - \sin\Pi(c)\sin\Pi(a)}{\sin\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)} = \frac{\cos\Pi(c)}{\cos\Pi(a)},$$

$$\cos C = \frac{\sin\Pi(c) - \sin\Pi(a)\sin\Pi(b)}{\sin\Pi(c)\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)} = \frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(a)}.$$

Anmerkung. In dem Falle $A + B + C = 180^0$, welcher ja hier nicht ausgeschlossen ist, ist, weil $A = 90^0$ ist, $B + C = 90^0$, also offenbar

$$\cos B^2 + \cos C^2 = 1,$$

und folglich nach vorstehenden Formeln:

$$\frac{\cos\Pi(b)^2}{\cos\Pi(a)^2} + \frac{\cos\Pi(c)^2}{\cos\Pi(a)^2} = 1,$$

also

$$\cos\Pi(a)^2 = \cos\Pi(b)^2 + \cos\Pi(c)^2.$$

Man bedenke nun aber, dass in diesem Falle

$$\operatorname{tang} B \operatorname{tang} C = 1,$$

$$\sin C = \cos B,\ \sin B = \cos C;$$

also nach dem zweiten Systeme der vorstehenden Formeln:

$$\sin \Pi(a) = \sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) = 1,$$

folglich:

$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) = 0$$

ist. Weitere Betrachtungen hierüber setzen wir jetzt bei Seite, wollten Vorstehendes aber nicht unbemerkt lassen, auch um einige Vorsicht bei diesen Gegenständen zu empfehlen.

Nach Vorstehendem haben wir die Gleichung

$$\sin C = \cos B \sin \Pi(b).$$

Nehmen wir nun an, dass, indem b ungeändert bleibt, B sich der Gränze Null nähert, so wird $\sin C$ sich der Gränze $\sin \Pi(b)$ bis zu jedem beliebigen Grade nähern, oder es wird:

$$\sin \Pi(b) = \operatorname{Lim} \sin C$$

sein.

Wir wollen nun einmal setzen, dass

$$\sin C = \sin \Pi(b)$$

sei, so wird sich, da sowohl, wenn $\operatorname{Arc} C$ den den Winkel C messenden Kreisbogen in einem mit der Längeneinheit als Halbmesser beschriebenen Kreise bezeichnet, $\operatorname{Arc} C$ als auch $\Pi(b)$ zwischen 0 und π liegt, aus der obigen Gleichung nur schliessen lassen, dass

$$\operatorname{Arc} C = \Pi(b) \quad \text{oder} \quad \operatorname{Arc} C = \pi - \Pi(b)$$

sei. Bekanntlich ist immer

$$\operatorname{Arc} A + \operatorname{Arc} B + \operatorname{Arc} C \overset{=}{<} \pi,$$

also, weil nach der Voraussetzung

$$\operatorname{Arc} A = \tfrac{1}{2}\pi$$

ist:

$$\operatorname{Arc} B + \operatorname{Arc} C \overset{=}{<} \tfrac{1}{2}\pi,$$

folglich immer

$$\operatorname{Arc} C < \tfrac{1}{2}\pi,$$

weil niemals

$$\operatorname{Arc} B = 0$$

sein kann, da ja bekanntlich immer

$$0 < B < 180^0$$

sein muss. Ist nun

$$\Pi(b) < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{also} \quad \pi - \Pi(b) > \tfrac{1}{2}\pi,$$

so kann man nur

$$\operatorname{Arc} C = \Pi(b)$$

setzen; ist dagegen

$$\Pi(b) > \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{also} \quad \pi - \Pi(b) < \tfrac{1}{2}\pi,$$

so kann man nur

$$\operatorname{Arc} C = \pi - \Pi(b)$$

setzen; wollte man noch

$$\Pi(b) = \tfrac{1}{2}\pi$$

annehmen, so würde aus der Gleichung

$$\sin C = \sin \Pi(b) = 1$$

offenbar

$$\operatorname{Arc} C = \tfrac{1}{2}\pi$$

folgen, was unzulässig ist, da ja nach dem Obigen immer

$$\operatorname{Arc} C < \tfrac{1}{2}\pi$$

ist.

Offenbar wird nun aus der Gleichung

$$\operatorname{Lim} \sin C = \sin \Pi(b),$$

jenachdem

$$\Pi(b) < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{oder} \quad \Pi(b) > \tfrac{1}{2}\pi$$

ist, auch beziehungsweise zu folgern sein:

$$\operatorname{Lim} \operatorname{Arc} C = \Pi(b) \quad \text{oder} \quad \operatorname{Lim} \operatorname{Arc} C = \pi - \Pi(b) \text{ *)}.$$

---

*) Ich erinnere hierbei an Lobatschewsky's „Angle de parallélisme" (m. s. Études géométriques sur la Théorie des parallèles par N. J. Lobatschewsky; traduit de l'Allemand par J. Hoüel. Paris. 1866. Nr. 16. p. 4.). Bei Bolyai findet sich dieser Winkel auch, aber ohne besondere Benennung (m. s. La science absolue de l'espace, indépendante de la vérité ou fausseté de l'Axiôme XI d'Euclide, par Jean Bolyai; (traduit par J. Hoüel). Paris. 1868. p. 37.).

§. 13.

Betrachten wir jetzt das gleichschenklige imaginäre oder eingebildete Dreieck, in welchem $b=c$ ist, so ist nach 46):

$$\cos B = \frac{1-\sin\Pi(a)}{\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)}, \quad \cos C = \frac{1-\sin\Pi(a)}{\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)};$$

also $\cos B = \cos C$, und folglich, weil alle Winkel zwischen 0 und 180° liegen, $B=C$. Daher sind im gleichschenkligen imaginären oder eingebildeten Dreieck die Winkel an der Grundlinie einander gleich, und im gleichseitigen imaginären oder eingebildeten Dreieck sind folglich alle drei Winkel unter einander gleich.

Umgekehrt folgt aus der Gleichung

$$\sin B \operatorname{tang}\Pi(b) = \sin C \operatorname{tang}\Pi(c)$$

in 46) für $B=C$ unmittelbar

$$\operatorname{tang}\Pi(b) = \operatorname{tang}\Pi(c),$$

also, weil $\Pi(b)$ und $\Pi(c)$ zwischen 0 und π liegen:

$$\Pi(b) = \Pi(c),$$

folglich $b=c$, so dass also in jedem imaginären oder eingebildeten Dreiecke mit zwei gleichen Winkeln die diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind; also ist ein gleichwinkliges imaginäres oder eingebildetes Dreieck auch jederzeit ein gleichseitiges.

Aus den Formeln 46) ergiebt sich in diesem Falle auch:

$$\cos A = \frac{\sin\Pi(a) - \sin\Pi(b)^2}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(b)^2},$$

folglich:

$$1-\cos A = \frac{\sin\Pi(b)^2\{1-\sin\Pi(a)\}}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(b)^2}$$

oder:

$$2\sin\tfrac{1}{2}A^2 = \operatorname{tang}\Pi(b)^2\frac{1-\sin\Pi(a)}{\sin\Pi(a)}.$$

Nun ist aber nach 22):

$$\sin\Pi(a) = \frac{\sin\Pi(\tfrac{1}{2}a)^2}{1+\cos\Pi(\tfrac{1}{2}a)^2},$$

also:

$$1-\sin\Pi(a)=\frac{1+\cos\Pi(\tfrac{1}{2}a)^2-\sin\Pi(\tfrac{1}{2}a)^2}{1+\cos\Pi(\tfrac{1}{2}a)^2}=\frac{2\cos\Pi(\tfrac{1}{2}a)^2}{1+\cos\Pi(\tfrac{1}{2}a)^2},$$

und folglich:

$$\frac{1-\sin\Pi(a)}{\sin\Pi(a)}=\frac{2\cos\Pi(\tfrac{1}{2}a)^2}{\sin\Pi(\tfrac{1}{2}a)^2}=2\cot\Pi(\tfrac{1}{2}a)^2,$$

also nach dem Obigen:

$$\sin\tfrac{1}{2}A^2=\cot\Pi(\tfrac{1}{2}a)^2\tan\Pi(b)^2,$$

oder:

$$\tan\Pi(b)^2=\sin\tfrac{1}{2}A^2\tan\Pi(\tfrac{1}{2}a)^2.$$

Nach 23) ist:

$$\tan\Pi(a)=\tfrac{1}{2}\sin\Pi(\tfrac{1}{2}a)\tan\Pi(\tfrac{1}{2}a),$$

und es haben also, weil $\sin\Pi(\frac{1}{2}a)$ stets positiv ist, $\tan\Pi(\frac{1}{2}a)$ und $\tan\Pi(a)$ gleiche Vorzeichen; wegen der Gleichung

$$\sin A\tan\Pi(a)=\sin B\tan\Pi(b)$$

haben aber $\tan\Pi(a)$ und $\tan\Pi(b)$ gleiche Vorzeichen; also haben auch $\tan\Pi(\frac{1}{2}a)$ und $\tan\Pi(b)$ gleiche Vorzeichen, und es folgt daher aus der Gleichung

$$\tan\Pi(b)^2=\sin\tfrac{1}{2}A^2\tan\Pi(\tfrac{1}{2}a)^2$$

die Gleichung:

48) . . . . . . $\tan\Pi(b)=\sin\tfrac{1}{2}A\tan\Pi(\tfrac{1}{2}a).$

Im gleichseitigen imaginären oder eingebildeten Dreiecke ist $a=b$, also nach der vorstehenden Formel:

$$\tan\Pi(a)=\sin\tfrac{1}{2}A\tan\Pi(\tfrac{1}{2}a),$$

also, weil

$$\tan\Pi(a)=\tfrac{1}{2}\sin\Pi(\tfrac{1}{2}a)\tan\Pi(\tfrac{1}{2}a)$$

ist:

49) . . . . $\sin\Pi(\tfrac{1}{2}a)=2\sin\tfrac{1}{2}A.$

Die Betrachtung des gleichschenkligen und gleichseitigen imaginären oder eingebildeten Dreiecks wollen wir jetzt nicht weiter ausführen.

§. 14.

Es lassen sich noch viele andere merkwürdige Relationen zwischen den Seiten und Winkeln des imaginären oder eingebil-

deten Dreiecks entwickeln, über die wir, ohne diesen Gegenstand zu erschöpfen die Absicht zu haben, jetzt noch Einiges sagen wollen.

Nach 37) ist:

$$\cos A = \frac{\cos B \cos \Pi(b) - \cos C \cos \Pi(c)}{\cos B \cos \Pi(c) - \cos C \cos \Pi(b)},$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$\cos B + \cos B \cos C = \frac{\cos B \sin C^2 \cos \Pi(b) - \cos C \sin B^2 \cos \Pi(c)}{\cos B \cos \Pi(c) - \cos C \cos \Pi(b)},$$

$$\cos B + \cos C \cos A = \frac{(\cos B^2 - \cos C^2) \cos \Pi(c)}{\cos B \cos \Pi(c) - \cos C \cos \Pi(b)};$$

weil nun nach 36)

$$(\cos A + \cos B \cos C) \cos \Pi(a) = (\cos B + \cos C \cos A) \cos \Pi(b)$$

ist, so ist:

$$\cos \Pi(a) = \frac{(\cos B^2 - \cos C^2) \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)}{\cos B \sin C^2 \cos \Pi(b) - \cos C \sin B^2 \cos \Pi(c)}.$$

Nach 46) ist:

$$\sin B \sin \Pi(b) \cos \Pi(c) = \sin C \cos \Pi(b) \sin \Pi(c),$$

also:

$$\sin B^2 \sin \Pi(b)^2 \cos \Pi(c)^2 = \sin C^2 \cos \Pi(b)^2 \sin \Pi(c)^2,$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten $\cos \Pi(b)^2 \cos \Pi(c)^2$ addirt:

$$\begin{aligned} &\cos \Pi(c)^2 \{\cos \Pi(b)^2 + \sin B^2 \sin \Pi(b)^2\} \\ &= \cos \Pi(b)^2 \{\cos \Pi(c)^2 + \sin C^2 \sin \Pi(c)^2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cos \Pi(c)^2 \{\sin B^2 + \cos B^2 \cos \Pi(b)^2\} \\ &= \cos \Pi(b)^2 \{\sin C^2 + \cos C^2 \cos \Pi(c)^2\}; \end{aligned}$$

also:

$$\sin C^2 \cos \Pi(b)^2 - \sin B^2 \cos \Pi(c)^2 - (\cos B^2 - \cos C^2) \cos \Pi(b)^2 \cos \Pi(c)^2 = 0,$$

und hieraus:

$$\left.\begin{aligned} &\cos B \cos C \sin C^2 \cos \Pi(b)^2 - \cos B \cos C \sin B^2 \cos \Pi(c)^2 \\ &- \cos B \cos C (\cos B^2 - \cos C^2) \cos \Pi(b)^2 \cos \Pi(c)^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Weil nun offenbar identisch

$$(\cos B^2 - \cos C^2 - \cos B^2 \sin C^2 + \sin B^2 \cos C^2) \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) = 0$$

ist, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned}(\cos B^2-\cos C^2-\cos B^2\sin C^2+\sin B^2\cos C^2)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\\ =\quad \cos B\cos C\sin C^2\cos\Pi(b)^2-\cos B\cos C\sin B^2\cos\Pi(c)^2\\ -\cos B\cos C(\cos B^2-\cos C^2)\cos\Pi(b)^2\cos\Pi(c)^2,\end{aligned}$$

und hieraus ferner:

$$\begin{aligned}(\cos B^2-\cos C^2)\{1+\cos B\cos C\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\}\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\\ =\quad \cos B\sin C^2\cos\Pi(b)\{\cos B\cos\Pi(c)+\cos C\cos\Pi(b)\}\\ -\cos C\sin B^2\cos\Pi(c)\{\cos B\cos\Pi(c)+\cos C\cos\Pi(b)\}\\ =\quad \{\cos B\sin C^2\cos\Pi(b)-\cos C\sin B^2\cos\Pi(c)\}\\ \times\{\cos B\cos\Pi(c)+\cos C\cos\Pi(b)\},\end{aligned}$$

also:

$$\frac{(\cos B^2-\cos C^2)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)}{\cos B\sin C^2\cos\Pi(b)-\cos C\sin B^2\cos\Pi(c)}$$
$$=\frac{\cos B\cos\Pi(c)+\cos C\cos\Pi(b)}{1+\cos B\cos C\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)}.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$\cos\Pi(a)=\frac{\cos B\cos\Pi(c)+\cos C\cos\Pi(b)}{1+\cos B\cos C\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)},$$

und mit gehöriger Vertauschung der Zeichen hat man also die folgenden Gleichungen:

$$50)\ldots\left\{\begin{aligned}\cos\Pi(a)&=\frac{\cos B\cos\Pi(c)+\cos C\cos\Pi(b)}{1+\cos B\cos C\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)},\\ \cos\Pi(b)&=\frac{\cos C\cos\Pi(a)+\cos A\cos\Pi(c)}{1+\cos C\cos A\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)},\\ \cos\Pi(c)&=\frac{\cos A\cos\Pi(b)+\cos B\cos\Pi(a)}{1+\cos A\cos B\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)}.\end{aligned}\right.$$

§. 15.

Nach 46) ist:

$$51)\ldots.\left\{\begin{aligned}1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)&=\frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)},\\ 1-\cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)&=\frac{\sin\Pi(c)\sin\Pi(a)}{\sin\Pi(b)},\\ 1-\cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)&=\frac{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)}{\sin\Pi(c)};\end{aligned}\right.$$

also durch Multiplication:

52)

$$\{1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\}\{1-\cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)\}=\sin\Pi(c)^2,$$

$$\{1-\cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)\}\{1-\cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\}=\sin\Pi(a)^2,$$

$$\{1-\cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\}\{1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\}=\sin\Pi(b)^2;$$

und hieraus ferner:

$$\{1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\}^2\{1-\cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)\}^2 \times\{1-\cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\}^2 =\sin\Pi(a)^2\sin\Pi(b)^2\sin\Pi(c)^2,$$

also, weil bekanntlich

$$\sin\Pi(a),\quad \sin\Pi(b),\quad \sin\Pi(c)$$

und offenbar auch

$$1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c),$$

$$1-\cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a),$$

$$1-\cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)$$

lauter positive Grössen sind:

53)

$$\{1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\}\{1-\cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)\} \times\{1-\cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\} =\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\sin\Pi(c).$$

Durch Entwickelung der Producte in 52) erhält man sehr leicht die folgenden Gleichungen:

54)

$$\frac{\cos\Pi(a)}{\cos A}+\frac{\cos\Pi(b)}{\cos B}-\frac{\cos\Pi(c)}{\cos A\cos B}-\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)=0,$$

$$\frac{\cos\Pi(b)}{\cos B}+\frac{\cos\Pi(c)}{\cos C}-\frac{\cos\Pi(a)}{\cos B\cos C}-\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)=0,$$

$$\frac{\cos\Pi(c)}{\cos C}+\frac{\cos\Pi(a)}{\cos A}-\frac{\cos\Pi(b)}{\cos C\cos A}-\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)=0.$$

§. 16.

Aus der aus 46) bekannten Gleichung

$$\cos A = \frac{\sin \Pi(a) - \sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)}$$

erhält man, wenn der Kürze wegen:

$$55) \ldots\ldots G = \sqrt{\left\{1 - \frac{1}{\sin \Pi(a)^2} - \frac{1}{\sin \Pi(b)^2} - \frac{1}{\sin \Pi(c)^2} + \frac{2}{\sin \Pi(a) \sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}\right\}}$$

oder auch

$$55^*) \ldots\ldots G = \sqrt{\left\{2\left(1 + \frac{1}{\sin \Pi(a)}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin \Pi(b)}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin \Pi(c)}\right) - \left(1 + \frac{1}{\sin \Pi(a)} + \frac{1}{\sin \Pi(b)} + \frac{1}{\sin \Pi(c)}\right)^2\right\}}$$

gesetzt wird:

$$\sin A^2 = G^2 \operatorname{tang} \Pi(b)^2 \operatorname{tang} \Pi(c)^2.$$

Weil nun aber wegen der aus 46) bekannten Gleichung

$$\sin B \operatorname{tang} \Pi(b) = \sin C \operatorname{tang} \Pi(c)$$

offenbar $\operatorname{tang} \Pi(b)$ und $\operatorname{tang} \Pi(c)$ gleiche Vorzeichen haben, also das Product $\operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(c)$ positiv ist, und auch $\sin A$ positiv ist; so haben wir die folgenden Gleichungen:

$$56) \ldots\ldots \begin{cases} \sin A = G \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(c), \\ \sin B = G \operatorname{tang} \Pi(c) \operatorname{tang} \Pi(a), \\ \sin C = G \operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(b). \end{cases}$$

§. 17.

Nach 46) ist:

$$\frac{1}{\sin \Pi(a)} = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

und folglich, wie man, weil

$$\cot \Pi(a)^2 = \frac{1}{\sin \Pi(a)^2} - 1$$

ist, hieraus leicht findet:

$$\cot \Pi(a)^2 = -\frac{1-\cos A^2-\cos B^2-\cos C^2-2\cos A\cos B\cos C}{\sin B^2 \sin C^2},$$

also:

$$\frac{\cot \Pi(a)^2}{\sin A^2} = -\frac{1-\cos A^2-\cos B^2-\cos C^2-2\cos A\cos B\cos C}{\sin A^2 \sin B^2 \sin C^2},$$

folglich überhaupt:

$$57) \ldots\ldots \frac{\cot \Pi(a)^2}{\sin A^2} = \frac{\cot \Pi(b)^2}{\sin B^2} = \frac{\cot \Pi(c)^2}{\sin C^2}$$

$$= -\frac{1-\cos A^2-\cos B^2-\cos C^2-2\cos A\cos B\cos C}{\sin A^2 \sin B^2 \sin C^2}.$$

Weil nun, wie schon früher bemerkt worden ist, die Grössen $\tang \Pi(a)$, $\tang \Pi(b)$, $\tang \Pi(c)$, und daher auch $\cot \Pi(a)$, $\cot \Pi(b)$, $\cot \Pi(c)$ gleiche Vorzeichen haben, so ist:

$$58) \ldots\ldots \frac{\cot \Pi(a)}{\sin A} = \frac{\cot \Pi(b)}{\sin B} = \frac{\cot \Pi(c)}{\sin C},$$

was wieder auf die drei ersten Gleichungen in 46) zurückführt:

Leicht erhält man auch die folgenden Formeln:

$$1-\frac{\tang B \tang C}{\sin \Pi(a)} = -\frac{\cos A}{\cos B \cos C},$$

$$1-\frac{\tang C \tang A}{\sin \Pi(b)} = -\frac{\cos B}{\cos C \cos A},$$

$$1-\frac{\tang A \tang B}{\sin \Pi(c)} = -\frac{\cos C}{\cos A \cos B};$$

und hieraus:

59)

$$\left\{1-\frac{\tang B \tang C}{\sin \Pi(a)}\right\}\left\{1-\frac{\tang C \tang A}{\sin \Pi(b)}\right\} = \frac{1}{\cos C^2},$$

$$\left\{1-\frac{\tang C \tang A}{\sin \Pi(b)}\right\}\left\{1-\frac{\tang A \tang B}{\sin \Pi(c)}\right\} = \frac{1}{\cos A^2},$$

$$\left\{1-\frac{\tang A \tang B}{\sin \Pi(c)}\right\}\left\{1-\frac{\tang B \tang C}{\sin \Pi(a)}\right\} = \frac{1}{\cos B^2}.$$

Entwickelt man die Producte auf den linken Seiten dieser Gleichungen, so erhält man die Gleichungen:

60)

$$\left.\begin{array}{r}\sin\Pi(a)\,\text{tang}\,A+\sin\Pi(b)\,\text{tang}\,B+\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\,\text{tang}\,C\\ -\text{tang}\,A\,\text{tang}\,B\,\text{tang}\,C\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}\sin\Pi(b)\,\text{tang}\,B+\sin\Pi(c)\,\text{tang}\,C+\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)\,\text{tang}\,A\\ -\text{tang}\,A\,\text{tang}\,B\,\text{tang}\,C\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}\sin\Pi(c)\,\text{tang}\,C+\sin\Pi(a)\,\text{tang}\,A+\sin\Pi(c)\sin\Pi(a)\,\text{tang}\,B\\ -\text{tang}\,A\,\text{tang}\,B\,\text{tang}\,C\end{array}\right\}=0.$$

Durch Multiplication erhält man aus den Gleichungen 59) die Gleichungen:

$$\left\{1-\frac{\text{tang}\,B\,\text{tang}\,C}{\sin\Pi(a)}\right\}^2\left\{1-\frac{\text{tang}\,C\,\text{tang}\,A}{\sin\Pi(b)}\right\}^2\left\{1-\frac{\text{tang}\,A\,\text{tang}\,B}{\sin\Pi(c)}\right\}^2$$
$$=\frac{1}{\cos A^2\cos B^2\cos C^2}.$$

Im spitzwinkligen imaginären oder eingebildeten Dreieck sind die Winkel A, B, C sämmtlich spitz, ihre Cosinus also sämmtlich positiv, folglich die Grössen

$$\frac{\cos A}{\cos B\cos C},\quad \frac{\cos B}{\cos C\cos A},\quad \frac{\cos C}{\cos A\cos B}$$

gleichfalls sämmtlich positiv. Im stumpfwinkligen imaginären oder eingebildeten Dreieck ist von den Winkeln A, B, C der eine stumpf, die beiden anderen sind spitz, und die Grössen

$$\frac{\cos A}{\cos B\cos C},\quad \frac{\cos B}{\cos C\cos A},\quad \frac{\cos C}{\cos A\cos B}$$

sind also offenbar sämmtlich negativ. Wegen der aus dem Obigen bekannten Gleichungen:

$$1-\frac{\text{tang}\,B\,\text{tang}\,C}{\sin\Pi(a)}=-\frac{\cos A}{\cos B\cos C},$$

$$1-\frac{\text{tang}\,C\,\text{tang}\,A}{\sin\Pi(b)}=-\frac{\cos B}{\cos C\cos A},$$

$$1-\frac{\text{tang}\,A\,\text{tang}\,B}{\sin\Pi(c)}=-\frac{\cos C}{\cos A\cos B}$$

sind folglich die Grössen

$$1-\frac{\text{tang}\,B\,\text{tang}\,C}{\sin\Pi(a)},\quad 1-\frac{\text{tang}\,C\,\text{tang}\,A}{\sin\Pi(b)},\quad 1-\frac{\text{tang}\,A\,\text{tang}\,B}{\sin\Pi(c)}$$

im spitzwinkligen Dreieck sämmtlich negativ, im stumpfwinkligen Dreieck sämmtlich positiv, so dass also das Product

$$\left\{1-\frac{\tan B\tan C}{\sin\Pi(a)}\right\}\left\{1-\frac{\tan C\tan A}{\sin\Pi(b)}\right\}\left\{1-\frac{\tan A\tan B}{\sin\Pi(c)}\right\}$$

im spitzwinkligen Dreieck negativ, im stumpwinkligen Dreieck positiv ist; und da nun das Product

$$\cos A\cos B\cos C$$

im spitzwinkligen Dreieck positiv, im stumpfwinkligen Dreieck negativ ist, so ergiebt sich aus dem Obigen offenbar die Gleichung:

61)

$$\left\{1-\frac{\tan B\tan C}{\sin\Pi(a)}\right\}\left\{1-\frac{\tan C\tan A}{\sin\Pi(b)}\right\}\left\{1-\frac{\tan A\tan B}{\sin\Pi(c)}\right\}$$
$$=-\frac{1}{\cos A\cos B\cos C}.$$

§. 18.

Nach 56) ist:

$$\sin A=G\tan\Pi(b)\tan\Pi(c),$$
$$\sin B=G\tan\Pi(c)\tan\Pi(a),$$
$$\sin C=G\tan\Pi(a)\tan\Pi(b);$$

und die Ausdrücke von

$$\cos A,\quad \cos B,\quad \cos C$$

in 46) kann man auf folgende Art darstellen:

$$\cos A=\tan\Pi(b)\tan\Pi(c)\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}-\frac{1}{\sin\Pi(a)}\right\},$$
$$\cos B=\tan\Pi(c)\tan\Pi(a)\left\{\frac{1}{\sin\Pi(c)\sin\Pi(a)}-\frac{1}{\sin\Pi(b)}\right\},$$
$$\cos C=\tan\Pi(a)\tan\Pi(b)\left\{\frac{1}{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)}-\frac{1}{\sin\Pi(c)}\right\}.$$

Also ist:

$$\sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$$
$$= G \operatorname{tang} \Pi(a)^2 \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(c) \times \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(a) \sin \Pi(b)} - \frac{1}{\sin \Pi(c)} \right\}$$
$$+ G \operatorname{tang} \Pi(a)^2 \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(c) \times \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(c) \sin \Pi(a)} - \frac{1}{\sin \Pi(b)} \right\}$$

und folglich:

$$\sin(B+C) = G \operatorname{tang} \Pi(a)^2 \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(c) \times \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1 \right\} \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(b)} + \frac{1}{\sin \Pi(c)} \right\}.$$

Aus der Gleichung

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}$$

ergiebt sich leicht:

$$\cos A + \cos(B+C) = \sin B \sin C \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1 \right\},$$

also:

$$\cos(B+C) = -\cos A + \sin B \sin C \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1 \right\},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\cos(B+C)$$
$$= -\cos A + G^2 \operatorname{tang} \Pi(a)^2 \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(c) \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1 \right\}.$$

Also ist nun:

$$\cos(A+B+C) = \cos A \cos(B+C) - \sin A \sin(B+C)$$
$$= -\cos A^2 + G^2 \operatorname{tang} \Pi(a)^2 \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(c) \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1 \right\} \cos A$$
$$- G \operatorname{tang} \Pi(a)^2 \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(c) \times \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1 \right\} \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(b)} + \frac{1}{\sin \Pi(c)} \right\} \sin A,$$

folglich, wenn man für $\cos A$ und $\sin A$ ihre Werthe aus dem Obigen einführt:

$$\cos(A+B+C)$$
$$= -\cos A^2 + G^2 \tang \Pi(a)^2 \tang \Pi(b)^2 \tang \Pi(c)^2$$
$$\times \left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1\right\} \left\{\frac{1}{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)} - \frac{1}{\sin \Pi(a)}\right\}$$
$$- G^2 \tang \Pi(a)^2 \tang \Pi(b)^2 \tang \Pi(c)^2$$
$$\times \left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1\right\} \left\{\frac{1}{\sin \Pi(b)} + \frac{1}{\sin \Pi(c)}\right\},$$

also:

$$2\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)^2$$
$$= \sin A^2 + G^2 \tang \Pi(a)^2 \tang \Pi(b)^2 \tang \Pi(c)^2$$
$$\times \left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1\right\} \left\{\frac{1}{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)} - \frac{1}{\sin \Pi(a)}\right\}$$
$$- G^2 \tang \Pi(a)^2 \tang \Pi(b)^2 \tang \Pi(c)^2$$
$$\times \left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1\right\} \left\{\frac{1}{\sin \Pi(b)} + \frac{1}{\sin \Pi(c)}\right\},$$

woraus sich endlich, weil

$$\sin A^2 = G^2 \tang \Pi(b)^2 \tang \Pi(c)^2$$
$$= G^2 \tang \Pi(a)^2 \tang \Pi(b)^2 \tang \Pi(c)^2 . \cot \Pi(a)^2$$
$$= G^2 \tang \Pi(a)^2 \tang \Pi(b)^2 \tang \Pi(c)^2 \left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)^2} - 1\right\}$$
$$= G^2 \tang \Pi(a)^2 \tang \Pi(b)^2 \tang \Pi(c)^2$$
$$\times \left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1\right\} \left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)} + 1\right\}$$

ist:

$$2\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)^2$$
$$= \quad G^2 \tang \Pi(a)^2 \tang \Pi(b)^2 \tang \Pi(c)^2 \left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1\right\} \left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)} + 1\right\}$$
$$+ G^2 \tang \Pi(a)^2 \tang \Pi(b)^2 \tang \Pi(c)^2$$
$$\times \left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1\right\} \left\{\frac{1}{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)} - \frac{1}{\sin \Pi(a)}\right\}$$
$$- G^2 \tang \Pi(a)^2 \tang \Pi(b)^2 \tang \Pi(c)^2$$
$$\times \left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1\right\} \left\{\frac{1}{\sin \Pi(b)} + \frac{1}{\sin \Pi(c)}\right\},$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$2\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)^2$$
$$= G^2 \tang \Pi(a)^2 \tang \Pi(b)^2 \tang \Pi(c)^2$$
$$\times \left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1\right\} \left\{\frac{1}{\sin \Pi(b)} - 1\right\} \left\{\frac{1}{\sin \Pi(c)} - 1\right\}$$

ergiebt. Setzen wir nun

$$\varDelta = \pi - (A + B + C),$$

so ist

$$\cos\tfrac{1}{2}(A + B + C) = \sin\tfrac{1}{2}\varDelta,$$

und folglich:

62)

$$\sin\tfrac{1}{2}\varDelta = \pm\frac{G\,\mathrm{tang}\,\Pi(a)\,\mathrm{tang}\,\Pi(b)\,\mathrm{tang}\,\Pi(c)}{\sqrt{2}}$$

$$\times\sqrt{\left\{\frac{1}{\sin\Pi(a)}-1\right\}\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b)}-1\right\}\left\{\frac{1}{\sin\Pi(c)}-1\right\}},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem das Product

$$\mathrm{tang}\,\Pi(a)\,\mathrm{tang}\,\Pi(b)\,\mathrm{tang}\,\Pi(c)$$

positiv oder negativ ist, indem $\sin\frac{1}{2}\varDelta$ offenbar immer positiv ist. Wir wissen, dass

$$\mathrm{tang}\,\Pi(a),\quad \mathrm{tang}\,\Pi(b),\quad \mathrm{tang}\,\Pi(c)$$

immer gleiche Vorzeichen haben, und aus der Formel

$$\mathrm{tang}\,\Pi(x) = \frac{\sin\Pi(x)}{\cos\Pi(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

oder:

$$\mathrm{tang}\,\Pi(x) = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

erhellet auf der Stelle, dass $\mathrm{tang}\,\Pi(x)$ positiv oder negativ ist, jenachdem x positiv oder negativ ist. Wir können also sagen, dass man in der Formel 62) das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem

$$\mathrm{tang}\,\Pi(a),\quad \mathrm{tang}\,\Pi(b),\quad \mathrm{tang}\,\Pi(c)$$

sämmtlich positiv oder negativ sind, oder auch jenachdem die Grössen a, b, c sämmtlich positiv oder negativ sind.

Drittes Kapitel.

Weitere Betrachtung des imaginären oder eingebildeten Dreiecks.

§. 19.

Wir wollen jetzt untersuchen, ob zwischen dem imaginären oder eingebildeten Dreiecke, in dem aus dem Obigen bekannten Sinne, und dem wirklichen oder realen Dreiecke gewisse Analogien Statt finden, und stellen in dieser Beziehung zuerst die folgende Betrachtung an.

Wenn man in der Seite AB eines wirklichen Dreiecks ABC einen Punkt D annimmt, so dass also die Summe der Strecken AD und BD der Seite AB des Dreiecks ABC gleich ist, und dann die Linie CD zieht: so entstehen zwei Dreiecke ACD und BCD, welche die Seite CD mit einander gemein haben, und die zu dem Dreiecke ABC in den folgenden Beziehungen stehen. Der Winkel CAD des Dreiecks ACD ist dem Winkel A des Dreiecks ABC gleich, der Winkel CBD des Dreiecks BCD ist dem Winkel B des Dreiecks ABC gleich; die Summe der Winkel ADC und BDC der beiden Dreiecke ACD und BCD beträgt 180^0; die Summe der Winkel ACD und BCD der beiden Dreiecke ACD und BCD ist dem Winkel C des Dreiecks ABC gleich.

Wenn man ferner in der Verlängerung der Seite AB eines wirklichen Dreiecks ABC, etwa über B hinaus, einen Punkt D annimmt, so dass also die Differenz der Strecken AD und BD der Seite AB des Dreiecks ABC gleich ist, und dann die Linie CD zieht: so entstehen zwei Dreiecke ACD und BCD, welche die Seite CD mit einander gemein haben, und die zu dem Dreiecke ABC in den folgenden Beziehungen stehen. Der Winkel CAD des Dreiecks ACD ist dem Winkel A des Dreiecks ABC gleich, der Winkel CBD des Dreiecks BCD ergänzt den Winkel B des Dreiecks ABC zu 180^0; die Winkel ADC und BDC der beiden Dreiecke ACD und BCD sind einander gleich; die Differenz der Winkel ACD und BCD der beiden Dreiecke ACD und BCD ist dem Winkel C des Dreiecks ABC gleich.

Es frägt sich nun, ob bei einer gewissen, nachher besonders anzugebenden Auffassungsweise ähnliche Beziehungen auch für das imaginäre oder eingebildete Dreieck gelten, was wir jetzt untersuchen wollen.

§. 20.

Die Seiten und Winkel eines imaginären oder eingebildeten Dreiecks seien wie gewöhnlich a, b, c und A, B, C. Wir denken uns nun zwei andere imaginäre oder eingebildete Dreiecke. Das erste habe die Seiten b und x, welche den Winkel A einschliessen; dem Winkel A stehe die Seite y, der Seite b stehe der Winkel ω, der Seite x stehe der Winkel $\overline{\omega}$ gegenüber. Das zweite Dreieck habe die Seiten a und x', welche den Winkel B einschliessen; dem Winkel B stehe die Seite y', der Seite a stehe der Winkel ω', der Seite x' stehe der Winkel $\overline{\omega}'$ gegenüber. Wenn nun zwischen der Seite c des gegebenen Dreiecks und den Seiten x und x' der beiden anderen Dreiecke die Beziehung

$$x + x' = c$$

Statt findet, so frägt sich, ob wie bei'm wirklichen Dreiecke:

$$y = y', \quad \omega + \omega' = 180^0, \quad \overline{\omega} + \overline{\omega}' = C$$

ist, welche Frage wir jetzt beantworten wollen.

Nach 46) ist:

$$\sin \Pi(y) = \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(x) \cos A};$$

ferner ist:

$$\sin \Pi(y') = \frac{\sin \Pi(a) \sin \Pi(x')}{1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(x') \cos B},$$

also, weil nach der Voraussetzung

$$x' = c - x$$

ist:

$$\sin \Pi(y') = \frac{\sin \Pi(a) \sin \Pi(c - x)}{1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(c - x) \cos B},$$

und weil nun nach 17):

$$\sin \Pi(c - x) = \frac{\sin \Pi(c) \sin \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)},$$

$$\cos \Pi(c - x) = \frac{\cos \Pi(c) - \cos \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)}$$

ist, so ist, wie man sogleich übersieht:

$$\sin \Pi(y') = \frac{\sin \Pi(a) \sin \Pi(c) \sin \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x) - \cos \Pi(a) \{\cos \Pi(c) - \cos \Pi(x)\} \cos B}.$$

Soll nun

$$\sin \Pi(y) = \sin \Pi(y')$$

sein, so muss

$$\frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(x) \cos A}$$
$$= \frac{\sin \Pi(a) \sin \Pi(c) \sin \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x) - \cos \Pi(a) \{\cos \Pi(c) - \cos \Pi(x)\} \cos B},$$

also:

$$\sin \Pi(b) \{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x) - \cos \Pi(a) [\cos \Pi(c) - \cos \Pi(x)] \cos B\}$$
$$= \sin \Pi(a) \sin \Pi(c) \{1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(x) \cos A\}$$

oder:

$$\sin \Pi(b) - \sin \Pi(a) \sin \Pi(c) - \cos \Pi(a) \sin \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos B$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \sin \Pi(b) \cos \Pi(c) - \sin \Pi(a) \cos \Pi(b) \sin \Pi(c) \cos A \\ \qquad - \cos \Pi(a) \sin \Pi(b) \cos B \end{array} \right\} \cos \Pi(x)$$

sein. Nun ist aber nach 46):

$$\cos A = \frac{\sin \Pi(a) - \sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)},$$

$$\cos B = \frac{\sin \Pi(b) - \sin \Pi(c) \sin \Pi(a)}{\sin \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)},$$

woraus sich auf der Stelle ergiebt, dass der Theil auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung verschwindet. Der Factor von $\cos \Pi(x)$ auf der rechten Seite dieser Gleichung ist:

$$\sin \Pi(b) \cos \Pi(c) - \frac{\sin \Pi(a) - \sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\cos \Pi(c)} \sin \Pi(c)$$
$$- \frac{\sin \Pi(b) - \sin \Pi(c) \sin \Pi(a)}{\cos \Pi(c)},$$

und verschwindet folglich, weil offenbar

$$\left. \begin{array}{l} \sin \Pi(b) \cos \Pi(c)^2 - \sin \Pi(a) \sin \Pi(c) + \sin \Pi(b) \sin \Pi(c)^2 \\ \qquad - \sin \Pi(b) + \sin \Pi(c) \sin \Pi(a) \end{array} \right\} = 0$$

ist, ebenfalls. Also ist die obige Gleichung identisch erfüllt, und es ist folglich in der That

$$\sin\Pi(y) = \sin\Pi(y'),$$

wo sich nun frägt, was sich aus dieser Gleichung schliessen lässt.

Nach 46) ist für jedes imaginäre oder eingebildete Dreieck:

$$\sin A \operatorname{tang}\Pi(a) = \sin B \operatorname{tang}\Pi(a) = \sin C \operatorname{tang}\Pi(c),$$

und es haben also, weil die Winkel A, B, C zwischen 0 und 180^0 liegen, offenbar

$$\operatorname{tang}\Pi(a),\quad \operatorname{tang}\Pi(b),\quad \operatorname{tang}\Pi(c)$$

gleiche Vorzeichen; nach §. 2. sind

$$\sin\Pi(a),\quad \sin\Pi(b),\quad \sin\Pi(c)$$

sämmtlich positiv, also haben

$$\cos\Pi(a),\quad \cos\Pi(b),\quad \cos\Pi(c)$$

sämmtlich gleiche Vorzeichen; nach §. 2. haben aber

$$\cos\Pi(a),\quad \cos\Pi(b),\quad \cos\Pi(c)$$

beziehungsweise mit

$$a,\quad b,\quad c$$

gleiche Vorzeichen; also haben a, b, c gleiche Vorzeichen.

Da dies hiernach von jedem imaginären oder eingebildeten Dreieck allgemein gilt, so haben auch b, y und a, y', folglich, weil a, b gleiche Vorzeichen haben, auch y, y' gleiche Vorzeichen.

Weil nun nach 5)

$$\sin\Pi(y) = \frac{2}{e^y + e^{-y}},\quad \sin\Pi(y') = \frac{2}{e^{y'} + e^{-y'}}$$

ist, so ist, weil

$$\sin\Pi(y) = \sin\Pi(y')$$

ist:

$$e^y + e^{-y} = e^{y'} + e^{-y'},$$

also:

$$e^y - e^{y'} = e^{-y'} - e^{-y} = \frac{1}{e^{y'}} - \frac{1}{e^y} = \frac{e^y - e^{y'}}{e^y e^{y'}},$$

und wäre nun nicht $y = y'$, also nicht $e^y = e^{y'}$, also nicht $e^y - e^{y'} = 0$, so wäre

$$e^y e^{y'} = e^{y+y'} = 1,$$

folglich $y + y' = 0$, und es müssten also y, y' ungleiche Vorzeichen haben, was gegen das Obige, wonach y, y' gleiche Vorzeichen haben, streitet; daher ist es falsch, dass nicht $y = y'$ wäre, und es ist also $y = y'$, wie bei jedem wirklichen Dreiecke.

Ferner ist nach 46):

$$\cos\omega = \frac{\sin\Pi(b) - \sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}$$

und

$$\cos\omega' = \frac{\sin\Pi(a) - \sin\Pi(x')\sin\Pi(y')}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(x')\cos\Pi(y')},$$

also, weil nach dem Obigen

$$x' = c - x, \quad y' = y$$

ist:

$$\cos\omega' = \frac{\sin\Pi(a) - \sin\Pi(c-x)\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(c-x)\cos\Pi(y)},$$

also, wenn man für $\sin\Pi(c-x)$ und $\cos\Pi(c-x)$ wieder ihre obigen Ausdrücke einführt:

$$\cos\omega'$$
$$= \frac{\sin\Pi(a) - \sin\Pi(a)\cos\Pi(c)\cos\Pi(x) - \sin\Pi(c)\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(a)\{\cos\Pi(c) - \cos\Pi(x)\}\cos\Pi(y)}.$$

Soll nun $\cos\omega = -\cos\omega'$ sein, so muss

$$\frac{\sin\Pi(b) - \sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)} =$$
$$-\frac{\sin\Pi(a) - \sin\Pi(a)\cos\Pi(c)\cos\Pi(x) - \sin\Pi(c)\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(a)\{\cos\Pi(c) - \cos\Pi(x)\}\cos\Pi(y)},$$

also:

$$\begin{aligned}&\sin\Pi(a)\{\sin\Pi(b) - \sin\Pi(x)\sin\Pi(y)\}\{\cos\Pi(c) - \cos\Pi(x)\}\\ &= -\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)\left\{\begin{aligned}&\sin\Pi(a) - \sin\Pi(a)\cos\Pi(c)\cos\Pi(x)\\ &-\sin\Pi(c)\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)\end{aligned}\right\},\end{aligned}$$

also, wie man hieraus sehr leicht findet:

$$\begin{aligned}&\sin\Pi(a)\cos\Pi(c)\{\sin\Pi(y) - \sin\Pi(b)\sin\Pi(x)\}\\ &= \cos\Pi(x)\sin\Pi(y)\{\sin\Pi(a) - \sin\Pi(b)\sin\Pi(c)\}\end{aligned}$$

oder:

$$\frac{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(c)}=\frac{\sin\Pi(y)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(x)}{\cos\Pi(x)\sin\Pi(y)}$$

sein, was wirklich der Fall ist, weil nach 46):

$$\cos A=\frac{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)},$$

$$\cos A=\frac{\sin\Pi(y)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(x)}{\sin\Pi(y)\cos\Pi(b)\cos\Pi(x)}$$

ist. Daher ist

$$\cos\omega=-\cos\omega'=\cos(180^0-\omega'),$$

und folglich, weil ω und ω', also auch ω und $180^0-\omega'$, zwischen 0 und 180^0 liegen:

$$\omega=180^0-\omega',\quad \text{also}\quad \omega+\omega'=180^0,$$

ganz wie im wirklichen Dreiecke.

Endlich ist nach 46):

$$\cot\omega=\frac{\cos\Pi(y)-\cos\omega\cos\Pi(x)}{\sin\omega\cos\Pi(x)\sin\Pi(y)},$$

$$\cot\omega'=\frac{\cos\Pi(y')-\cos\omega'\cos\Pi(x')}{\sin\omega'\cos\Pi(x')\sin\Pi(y')};$$

also, weil nach dem Vorhergehenden:

$$y'=y,\quad \cos\Pi(y')=\cos\Pi(y),\quad \sin\Pi(y')=\sin\Pi(y);$$

$$\omega+\omega'=180,\quad \cos\omega'=-\cos\omega,\quad \sin\omega'=\sin\omega$$

ist:

$$\cot\overline{\omega}=\frac{\cos\Pi(y)-\cos\omega\cos\Pi(x)}{\sin\omega\cos\Pi(x)\sin\Pi(y)},$$

$$\cot\overline{\omega}'=\frac{\cos\Pi(y)+\cos\omega\cos\Pi(x')}{\sin\omega\cos\Pi(x')\sin\Pi(y)}.$$

Hieraus ergiebt sich leicht:

$$\cot\overline{\omega}+\cot\overline{\omega}'=\frac{\cos\Pi(y)\{\cos\Pi(x)+\cos\Pi(x')\}}{\sin\omega\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')\sin\Pi(y)}.$$

Ferner ist:

$$\cot\overline{\omega}\cot\overline{\omega}'-1$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{r}\{\cos\Pi(y)-\cos\omega\cos\Pi(x)\}\{\cos\Pi(y)+\cos\omega\cos\Pi(x')\}\\ -\sin\omega^2\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')\sin\Pi(y)^2\end{array}\right\}}{\sin\omega^2\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')\sin\Pi(y)^2}.$$

Den Zähler dieses Bruches bringt man leicht auf den folgenden Ausdruck:

$$-\sin\Pi(y)^2\{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')\}$$

$$+\{1-\cos\omega\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)\}\{1+\cos\omega\cos\Pi(x')\cos\Pi(y)\}.$$

Nun ist aber nach 46):

$$\cos\omega=\frac{\sin\Pi(b)-\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)},$$

$$\cos\omega'=\frac{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(x')\sin\Pi(y')}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(x')\cos\Pi(y')};$$

also nach dem Obigen:

$$\cos\omega=\frac{\sin\Pi(b)-\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)},$$

$$\cos\omega=-\frac{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(x')\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(x')\cos\Pi(y)};$$

folglich:

$$1-\cos\omega\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)=\frac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(b)},$$

$$1+\cos\omega\cos\Pi(x')\cos\Pi(y)=\frac{\sin\Pi(x')\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(a)};$$

daher ist der obige Zähler:

$$-\sin\Pi(y)^2.\frac{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')\}-\sin\Pi(x)\sin\Pi(x')}{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)},$$

also:

$$\cot\overline{\omega}\cot\overline{\omega}'-1$$

$$=-\frac{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')\}-\sin\Pi(x)\sin\Pi(x')}{\sin\omega^2\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')}.$$

Folglich ist, wie man leicht übersieht:

$$\cot(\overline{\omega}+\overline{\omega}')=\frac{\cot\overline{\omega}\cot\overline{\omega}'-1}{\cot\overline{\omega}+\cot\overline{\omega}'}=$$

$$-\frac{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')\}-\sin\Pi(x)\sin\Pi(x')}{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\{\cos\Pi(x)+\cos\Pi(x')\}}.\frac{\tang\Pi(y)}{\sin\omega}.$$

Nach 46) ist:

$$\sin A \operatorname{tang} \Pi(y) = \sin \omega \operatorname{tang} \Pi(b),$$

$$\sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin C \operatorname{tang} \Pi(c);$$

also offenbar:

$$\frac{\operatorname{tang} \Pi(y)}{\sin \omega} = \frac{\operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(b)}{\sin C \operatorname{tang} \Pi(c)},$$

und folglich:

$$\sin C \operatorname{tang} \Pi(c) \cot(\overline{\omega} + \overline{\omega}')$$
$$= \frac{\sin \Pi(x) \sin \Pi(x') - \sin \Pi(a) \sin \Pi(b) \{1 + \cos \Pi(x) \cos \Pi(x')\}}{\cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(x')\}},$$

also, weil nach 16):

$$\sin \Pi(x + x') = \frac{\sin \Pi(x) \sin \Pi(x')}{1 + \cos \Pi(x) \cos \Pi(x')} = \sin \Pi(c),$$

$$\cos \Pi(x + x') = \frac{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(x')}{1 + \cos \Pi(x) \cos \Pi(x')} = \cos \Pi(c)$$

ist:

$$\sin C \operatorname{tang} \Pi(c) \cot(\overline{\omega} + \overline{\omega}') = \frac{\sin \Pi(c) - \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)}{\cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)},$$

folglich:

$$\sin C \cot(\overline{\omega} + \overline{\omega}') = \frac{\sin \Pi(c) - \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)}{\cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \sin \Pi(c)},$$

also nach 46):

$$\sin C \cot(\overline{\omega} + \overline{\omega}') = \cos C,$$

folglich:

$$\cot(\overline{\omega} + \overline{\omega}') = \cot C.$$

Weil nun

$$A + \omega + \overline{\omega} \overline{\underline{<}}\, 180^{\circ},$$

$$B + \omega' + \overline{\omega}' \overline{\underline{<}}\, 180$$

ist, so ist:

$$A + B + \omega + \omega' + \overline{\omega} + \overline{\omega}' \overline{\underline{<}}\, 360^{\circ},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$\omega + \omega' = 180^{\circ}$$

ist:

$$A+B+\overline{\omega}+\overline{\omega}' \overline{\overline{<}}\, 180^{\circ};$$

also liegt, eben so wie bekanntlich C, auch $\overline{\omega}+\overline{\omega}'$ zwischen 0 und 180°, und aus der Gleichung

$$\cot(\overline{\omega}+\overline{\omega}')=\cot C$$

folgt also:

$$\overline{\omega}+\overline{\omega}'=C,$$

ganz eben so wie bei'm wirklichen Dreiecke.

§. 21.

Die Seiten und Winkel eines imaginären oder eingebildeten Dreiecks seien wieder a, b, c und A, B, C. Wir denken uns zwei andere imaginäre oder eingebildete Dreiecke. Das erste habe die Seiten b und x, welche den Winkel A einschliessen; dem Winkel A stehe die Seite y, der Seite b stehe der Winkel ω, der Seite x stehe der Winkel $\overline{\omega}$ gegenüber. Das zweite Dreieck habe die Seiten a und x', welche den Winkel $180^{\circ}-B$ einschliessen; dem Winkel $180^{\circ}-B$ stehe die Seite y', der Seite a stehe der Winkel ω', der Seite x' stehe der Winkel $\overline{\omega}'$ gegenüber. Wenn nun zwischen der Seite c des gegebenen Dreiecks und den Seiten x und x' der beiden anderen Dreiecke die Beziehung

$$x-x'=c$$

Statt findet, so frägt es sich, ob wie bei'm wirklichen Dreiecke:

$$y=y',\quad \omega=\omega',\quad \overline{\omega}-\overline{\omega}'=C$$

ist, welche Frage wir jetzt beantworten wollen.

Nach 46) ist:

$$\sin\Pi(y)=\frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(x)}{1-\cos\Pi(b)\cos\Pi(x)\cos A};$$

ferner ist:

$$\sin\Pi(y')=\frac{\sin\Pi(a)\sin\Pi(x')}{1-\cos\Pi(a)\cos\Pi(x')\cos(180^{\circ}-B)},$$

also, weil nach der Voraussetzung

$$x'=x-c$$

ist:

$$\sin\Pi(y') = \frac{\sin\Pi(a)\sin\Pi(x-c)}{1+\cos\Pi(a)\cos\Pi(x-c)\cos B},$$

und folglich, weil nach 12):

$$\sin\Pi(x-c) = \sin\Pi(c-x),\ \cos\Pi(x-c) = -\cos\Pi(c-x)$$

ist:

$$\sin\Pi(y') = \frac{\sin\Pi(a)\sin\Pi(c-x)}{1-\cos\Pi(a)\cos\Pi(c-x)\cos B}.$$

Man hat also jetzt für $\sin\Pi(y)$ und $\sin\Pi(y')$ ganz dieselben Ausdrücke wie im vorhergehenden Paragraphen, und schliesst daraus ferner ganz auf dieselbe Weise wie dort, dass $y=y'$ ist.

Ferner ist nach 46):

$$\cos\omega = \frac{\sin\Pi(b)-\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}$$

und

$$\cos\omega' = \frac{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(x')\sin\Pi(y')}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(x')\cos\Pi(y')},$$

also, weil nach dem Obigen:

$$x' = x-c,\quad y'=y$$

ist:

$$\cos\omega' = \frac{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(x-c)\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(x-c)\cos\Pi(y)},$$

und folglich, weil

$$\sin\Pi(x-c) = \sin\Pi(c-x),\ \cos\Pi(x-c) = -\cos\Pi(c-x)$$

ist:

$$\cos\omega' = -\frac{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(c-x)\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(c-x)\cos\Pi(y)}.$$

Man hat also jetzt für $\cos\omega$ und $\cos\omega'$, mit dem einzigen Unterschiede, dass vor dem Ausdrucke von $\cos\omega'$ das Minuszeichen steht, ganz dieselben Ausdrücke wie im vorhergehenden Paragraphen, und man erhält daher offenbar, wenn $\cos\omega = \cos\omega'$ sein soll, genau dieselbe Bedingungsgleichung wie im vorhergehenden Paragraphen, deren Richtigkeit dann ferner ganz eben so wie dort gerechtfertigt wird. Es ist folglich wirklich $\cos\omega = \cos\omega'$, also, weil wie in jedem imaginären oder eingebildeten Dreieck ω und ω' zwischen 0 und 180° liegen, $\omega = \omega'$.

Endlich ist nach 46):

$$\cot\bar{\omega} = \frac{\cos\Pi(y) - \cos\omega\cos\Pi(x)}{\sin\omega\cos\Pi(x)\sin\Pi(y)},$$

$$\cot\bar{\omega}' = \frac{\cos\Pi(y') - \cos\omega'\cos\Pi(x')}{\sin\omega'\cos\Pi(x')\sin\Pi(y')};$$

also, weil nach dem Vorhergehenden:

$$y' = y, \quad \cos\Pi(y') = \cos\Pi(y), \quad \sin\Pi(y') = \sin\Pi(y);$$

$$\omega' = \omega, \quad \cos\omega' = \cos\omega, \quad \sin\omega' = \sin\omega$$

ist:

$$\cot\bar{\omega} = \frac{\cos\Pi(y) - \cos\omega\cos\Pi(x)}{\sin\omega\cos\Pi(x)\sin\Pi(y)},$$

$$\cot\bar{\omega}' = \frac{\cos\Pi(y) - \cos\omega\cos\Pi(x')}{\sin\omega\cos\Pi(x')\sin\Pi(y)}.$$

Hieraus ergiebt sich leicht:

$$\cot\bar{\omega}' - \cot\bar{\omega} = \frac{\cos\Pi(y)\{\cos\Pi(x) - \cos\Pi(x')\}}{\sin\omega\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')\sin\Pi(y)}.$$

Ferner ist:

$$\cot\bar{\omega}\cot\bar{\omega}' + 1$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{r}\{\cos\Pi(y) - \cos\omega\cos\Pi(x)\}\{\cos\Pi(y) - \cos\omega\cos\Pi(x')\} \\ + \sin\omega^2\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')\sin\Pi(y)^2\end{array}\right\}}{\sin\omega^2\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')\sin\Pi(y)^2}.$$

Den Zähler dieses Bruches bringt man leicht auf den folgenden Ausdruck:

$$-\sin\Pi(y)^2\{1 - \cos\Pi(x)\cos\Pi(x')\}$$
$$+\{1 - \cos\omega\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)\}\{1 - \cos\omega\cos\Pi(x')\cos\Pi(y)\}.$$

Nun ist aber nach 46):

$$\cos\omega = \frac{\sin\Pi(b) - \sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)},$$

$$\cos\omega' = \frac{\sin\Pi(a) - \sin\Pi(x')\sin\Pi(y')}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(x')\cos\Pi(y')};$$

also nach dem Obigen:

$$\cos\omega = \frac{\sin\Pi(b) - \sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)},$$

$$\cos\omega = \frac{\sin\Pi(a) - \sin\Pi(x')\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(x')\cos\Pi(y)};$$

folglich:

$$1-\cos\omega\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)=\frac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(b)},$$

$$1-\cos\omega\cos\Pi(x')\cos\Pi(y)=\frac{\sin\Pi(x')\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(a)};$$

daher ist der obige Zähler:

$$-\sin\Pi(y)^2.\frac{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\{1-\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')\}-\sin\Pi(x)\sin\Pi(x')}{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)},$$

also:

$$\cot\overline{\omega}\cot\overline{\omega}'+1$$
$$=-\frac{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\{1-\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')\}-\sin\Pi(x)\sin\Pi(x')}{\sin\omega^2\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')}.$$

Folglich ist, wie man sogleich übersieht:

$$\cot(\overline{\omega}-\overline{\omega}')=\frac{\cot\overline{\omega}\cot\overline{\omega}'+1}{\cot\overline{\omega}'-\cot\overline{\omega}}=$$
$$-\frac{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\{1-\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')\}-\sin\Pi(x)\sin\Pi(x')}{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\{\cos\Pi(x)-\cos\Pi(x')\}}.\frac{\tang\Pi(y)}{\sin\omega}.$$

Nach 46) ist:

$$\sin A\tang\Pi(y)=\sin\omega\tang\Pi(b),$$

$$\sin A\tang\Pi(a)=\sin C\tang\Pi(c);$$

also offenbar:

$$\frac{\tang\Pi(y)}{\sin\omega}=\frac{\tang\Pi(a)\tang\Pi(b)}{\sin C\tang\Pi(c)},$$

und folglich:

$$\sin C\tang\Pi(c)\cot(\overline{\omega}-\overline{\omega}')$$
$$=\frac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(x')-\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\{1-\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')\}}{\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\{\cos\Pi(x)-\cos\Pi(x')\}},$$

also, weil nach 17):

$$\sin\Pi(x-x')=\frac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(x')}{1-\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')}=\sin\Pi(c),$$

$$\cos\Pi(x-x')=\frac{\cos\Pi(x)-\cos\Pi(x')}{1-\cos\Pi(x)\cos\Pi(x')}=\cos\Pi(c)$$

ist:

$$\sin C\tang\Pi(c)\cot(\overline{\omega}-\overline{\omega}')=\frac{\sin\Pi(c)-\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)}{\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)},$$

folglich:

$$\sin C \cot(\varpi - \varpi') = \frac{\sin \Pi(c) - \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)}{\cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \sin \Pi(c)},$$

also nach 46):

$$\sin C \cot(\varpi - \varpi') = \cos C,$$

folglich:

$$\cot(\varpi - \varpi') = \cot C.$$

Weil nun

$$A + B + C \leqq 180^0,$$

$$\omega' + (180^0 - B) + \varpi' \leqq 180^0$$

oder nach dem Obigen:

$$A + B + C \leqq 180^0,$$

$$\omega + (180^0 - B) + \varpi' \leqq 180^0$$

ist, so ist:

$$A + \omega + 180^0 + C + \varpi' \leqq 360^0,$$

also:

$$A + \omega + C + \varpi' \leqq 180^0,$$

und folglich:

$$C + \varpi' < 180^0.$$

Weil ferner

$$0 < \varpi < 180^0, \quad 0 < \varpi' < 180^0$$

ist, so ist offenbar

$$-180^0 < \varpi - \varpi' < +180^0,$$

und aus der Gleichung

$$\cot(\varpi - \varpi') = \cot C$$

folgt also, wie man sogleich übersieht,

$$\text{entweder} \quad \varpi - \varpi' = C \quad \text{oder} \quad \varpi - \varpi' = C - 180^0;$$

aus der zweiten dieser beiden Gleichungen würde aber folgen:

$$C + \varpi' = 180^0 + \varpi,$$

also

$$C+\overline{\omega}' > 180^0,$$

was gegen das Obige streitet; daher kann nur

$$\overline{\omega}-\overline{\omega}' = C$$

sein.

§. 22.

In dem in §. 20. betrachteten Falle haben wir die Gleichung:

$$\begin{aligned}&\sin\Pi(a)\cos\Pi(c)\{\sin\Pi(y)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(x)\}\\&=\cos\Pi(x)\sin\Pi(y)\{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)\}\end{aligned}$$

gefunden. Setzen wir nun in diesem Falle $\omega=\omega'=90^0$, so ist nach 47):

$$\sin\Pi(b)=\sin\Pi(x)\sin\Pi(y),\quad \text{also}\quad \sin\Pi(y)=\frac{\sin\Pi(b)}{\sin\Pi(x)}$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}&\sin\Pi(a)\cos\Pi(c)\left\{\frac{\sin\Pi(b)}{\sin\Pi(x)}-\sin\Pi(b)\sin\Pi(x)\right\}\\&=\cos\Pi(x)\frac{\sin\Pi(b)}{\sin\Pi(x)}\{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)\},\end{aligned}$$

woraus man leicht:

$$\cos\Pi(x)=\frac{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(c)},$$

und hieraus ferner:

$$\sin\Pi(x)^2=\frac{\sin\Pi(a)^2\cos\Pi(c)^2-\{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)\}^2}{\sin\Pi(a)^2\cos\Pi(c)^2}$$

ableitet. Also ist nach dem Obigen:

$$\sin\Pi(y)^2=\frac{\sin\Pi(a)^2\sin\Pi(b)^2\cos\Pi(c)^2}{\sin\Pi(a)^2\cos\Pi(c)^2-\{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)\}^2},$$

folglich, wie man leicht findet:

$$\cos\Pi(y)^2=\frac{\sin\Pi(a)^2\cos\Pi(b)^2\cos\Pi(c)^2-\{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)\}^2}{\sin\Pi(a)^2\cos\Pi(c)^2-\{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)\}^2},$$

also:

$$\cot\Pi(y)^2=\frac{\sin\Pi(a)^2\cos\Pi(b)^2\cos\Pi(c)^2-\{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)\}^2}{\sin\Pi(a)^2\sin\Pi(b)^2\cos\Pi(c)^2},$$

und hieraus ferner:

$$\cot \Pi(c)^2 \cot \Pi(y)^2$$
$$= \frac{\sin \Pi(a)^2 \cos \Pi(b)^2 \cos \Pi(c)^2 - \{\sin \Pi(a) - \sin \Pi(b) \sin \Pi(c)\}^2}{\sin \Pi(a)^2 \sin \Pi(b)^2 \sin \Pi(c)^2}.$$

Nach 46) ist:

$$\cos C = \frac{\sin \Pi(c) - \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)}{\cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \sin \Pi(c)},$$

also:

$$\sin C^2 = \frac{\cos \Pi(a)^2 \cos \Pi(b)^2 \sin \Pi(c)^2 - \{\sin \Pi(c) - \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)\}^2}{\cos \Pi(a)^2 \cos \Pi(b)^2 \sin \Pi(c)^2},$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$\sin C^2 = \frac{\sin \Pi(a)^2 \cos \Pi(b)^2 \cos \Pi(c)^2 - \{\sin \Pi(a) - \sin \Pi(b) \sin \Pi(c)\}^2}{\cos \Pi(a)^2 \cos \Pi(b)^2 \sin \Pi(c)^2}.$$

Vergleicht man dies mit dem Obigen, so ergiebt sich auf der Stelle:

$$\cot \Pi(c)^2 \cot \Pi(y)^2 = \cot \Pi(a)^2 \cot \Pi(b)^2 \sin C^2.$$

Bekanntlich haben

$$\cot \Pi(a), \quad \cot \Pi(b), \quad \cot \Pi(c)$$

gleiche Vorzeichen, und auch

$$\cot \Pi(a), \quad \cot \Pi(y)$$

haben gleiche Vorzeichen; also haben

$$\cot \Pi(a), \quad \cot \Pi(b), \quad \cot \Pi(c), \quad \cot \Pi(y)$$

gleiche Vorzeichen, und $\sin C$ ist positiv; daher ist:

$$\cot \Pi(c) \cot \Pi(y) = \cot \Pi(a) \cot \Pi(b) \sin C,$$

welche sehr bemerkenswerthe Gleichung offenbar auch eine Analogie mit einer anderen bekannten Gleichung bei'm wirklichen Dreieck enthält.

Ganz dieselbe Gleichung gilt auch für den in §. 21. betrachteten Fall, und die Ableitung derselben ist von der vorhergehenden nicht im Geringsten verschieden.

Ueber die vorstehende Gleichung ist nun aber noch zu bemerken, dass nach 56)

$$\sin C = G \tang \Pi(a) \tang \Pi(b)$$

ist, wenn wie in 55) und 55*) der Kürze wegen:

$$G = \sqrt{\{1 - \frac{1}{\sin \Pi(a)^2} - \frac{1}{\sin \Pi(b)^2} - \frac{1}{\sin \Pi(c)^2} + \frac{2}{\sin \Pi(a) \sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}\}}$$

oder

$$G = \sqrt{\{2(1 + \frac{1}{\sin \Pi(a)})(1 + \frac{1}{\sin \Pi(b)})(1 + \frac{1}{\sin \Pi(c)}) - (1 + \frac{1}{\sin \Pi(a)} + \frac{1}{\sin \Pi(b)} + \frac{1}{\sin \Pi(c)})^2\}}$$

gesetzt wird. Also ist nach der in Rede stehenden Gleichung:

$$\cot \Pi(c) \cot \Pi(y) = G.$$

Bezeichnen wir daher jetzt die Grösse y, welche zu der Grösse c in der aus dem Obigen bekannten Beziehung steht, durch h_c, und die Grössen, welche zu a und b in derselben Beziehung stehen wie h_c zu c, beziehungsweise durch h_a und h_b; so ist, weil G eine aus a, b, c ganz symmetrisch gebildete Grösse ist:

$$\cot \Pi(a) \cot \Pi(h_a) = \cot \Pi(b) \cot \Pi(h_b) = \cot \Pi(c) \cot \Pi(h_c) = G,$$

so dass also die Producte:

$$\cot \Pi(a) \cot \Pi(h_a), \quad \cot \Pi(b) \cot \Pi(h_b), \quad \cot \Pi(c) \cot \Pi(h_c)$$

einander gleich oder constant sind, worin man wieder eine leicht ersichtliche Analogie mit dem wirklichen Dreiecke erkennen wird.

§. 23.

Wenn in dem in §. 20. betrachteten Falle $\overline{\omega} = \overline{\omega}' = \frac{1}{2}C$ ist, so ist $\cot \overline{\omega} = \cot \overline{\omega}'$, und folglich, weil

$$\cot \overline{\omega} = \frac{\cos \Pi(y) - \cos \omega \cos \Pi(x)}{\sin \omega \cos \Pi(x) \sin \Pi(y)},$$

$$\cot \overline{\omega}' = \frac{\cos \Pi(y) - \cos \omega' \cos \Pi(x')}{\sin \omega \cos \Pi(x') \sin \Pi(y)}$$

ist:

$$\frac{\cos \Pi(y) - \cos \omega \cos \Pi(x)}{\cos \Pi(x)} = \frac{\cos \Pi(y) - \cos \omega' \cos \Pi(x')}{\cos \Pi(\pi')}$$

oder:

$$\frac{\cos \Pi(y)}{\cos \Pi(x)} - \cos \omega = \frac{\cos \Pi(y)}{\cos \Pi(x')} - \cos \omega',$$

also:

$$\frac{\cos\Pi(y)}{\cos\Pi(x)}-\frac{\sin\Pi(b)-\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}$$
$$=\frac{\cos\Pi(y)}{\cos\Pi(x')}-\frac{\sin\Pi(a)-\sin\Pi(x')\sin\Pi(y)}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(x')\cos\Pi(y)},$$

welche Gleichung man leicht auf die folgende Form bringt:

$$\frac{\sin\Pi(x)}{\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)}-\frac{\sin\Pi(x')}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(x')}$$
$$=\left\{\frac{1}{\cos\Pi(x)}-\frac{1}{\cos\Pi(x')}\right\}\sin\Pi(y).$$

Ferner ist nach 46):

$$\cos\overline{\omega}=\frac{\sin\Pi(x)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(y)}{\cos\Pi(b)\sin\Pi(x)\cos\Pi(y)},$$

$$\cos\overline{\omega}'=\frac{\sin\Pi(x')-\sin\Pi(a)\sin\Pi(y)}{\cos\Pi(a)\sin\Pi(x')\cos\Pi(y)};$$

also, weil $\cos\overline{\omega}=\cos\overline{\omega}'$ ist:

$$\frac{\sin\Pi(x)-\sin\Pi(b)\sin\Pi(y)}{\cos\Pi(b)\sin\Pi(x)}=\frac{\sin\Pi(x')-\sin\Pi(a)\sin\Pi(y)}{\cos\Pi(a)\sin\Pi(x')},$$

woraus man leicht:

$$\sin\Pi(y)=\frac{\{\cos\Pi(a)-\cos\Pi(b)\}\sin\Pi(x)\sin\Pi(x')}{\cos\Pi(a)\sin\Pi(b)\sin\Pi(x')-\sin\Pi(a)\cos\Pi(b)\sin\Pi(x)}$$

erhält; und wir haben daher nach dem Obigen die Gleichung:

$$\frac{\sin\Pi(x)}{\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)}-\frac{\sin\Pi(x')}{\sin\Pi(a)\cos\Pi(x')}=\left\{\frac{1}{\cos\Pi(x)}-\frac{1}{\cos\Pi(x')}\right\}$$
$$\times\frac{\{\cos\Pi(a)-\cos\Pi(b)\}\sin\Pi(x)\sin\Pi(x')}{\cos\Pi(a)\sin\Pi(b)\sin\Pi(x')-\sin\Pi(a)\cos\Pi(b)\sin\Pi(x)}$$

oder:

$$\sin\Pi(a)\sin\Pi(x)\cos\Pi(x')-\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)\sin\Pi(x')$$
$$=\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\{\cos\Pi(x')-\cos\Pi(x)\}$$
$$\times\frac{\{\cos\Pi(a)-\cos\Pi(b)\}\sin\Pi(x)\sin\Pi(x')}{\cos\Pi(a)\sin\Pi(b)\sin\Pi(x')-\sin\Pi(a)\cos\Pi(b)\sin\Pi(x)},$$

aus welcher man nach einigen Reductionen leicht die Gleichung:

$$\sin\Pi(a)\cos\Pi(b)\sin\Pi(x)\cos\Pi(x')\{\sin\Pi(b)\sin\Pi(x')-\sin\Pi(a)\sin\Pi(x)\}$$
$$=$$
$$\cos\Pi(a)\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)\sin\Pi(x')\{\sin\Pi(b)\sin\Pi(x')-\sin\Pi(a)\sin\Pi(x)\},$$

also die Gleichung:

$$\sin\Pi(a)\cos\Pi(b)\sin\Pi(x)\cos\Pi(x')=\cos\Pi(a)\sin\Pi(b)\cos\Pi(x)\sin\Pi(x'),$$

oder die Gleichung:

$$\operatorname{tang}\Pi(a)\operatorname{tang}\Pi(x)=\operatorname{tang}\Pi(b)\operatorname{tang}\Pi(x'),$$

oder die Proportion:

$$\operatorname{tang}\Pi(a):\operatorname{tang}\Pi(b)=\operatorname{tang}\Pi(x'):\operatorname{tang}\Pi(x)$$

ableitet, in welcher man auch sogleich eine Analogie mit einem bekannten Satze von dem wirklichen Dreieck erkennen wird.

§. 24.

Wir denken uns, alle Grössen jetzt als positiv voraussetzend, ein gleichschenkliges imaginäres oder eingebildetes Dreieck; der Winkel an der Spitze dieses Dreiecks sei $\frac{2\pi}{n}$, die denselben einschliessenden einander gleichen Schenkel seien r, und s sei die Grundlinie; die nach §. 13. einander gleichen Winkel, oder vielmehr die diese Winkel messenden Bogen in einem mit der Längeneinheit als Halbmesser beschriebenen Kreise seien Ω.

Dies vorausgesetzt, ist nach 46) offenbar:

$$\sin\Pi(s)=\frac{\sin\Pi(r)^2}{1-\cos\Pi(r)^2\cos\frac{2\pi}{n}},$$

also nach 5):

$$\frac{e^s+e^{-s}}{2}=\frac{1}{\sin\Pi(s)}=\frac{1-\cos\Pi(r)^2\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\Pi(r)^2},$$

folglich:

$$\frac{e^s+e^{-s}}{2}-1=\frac{e^s+e^{-s}-2}{2}=\frac{e^s-2e^{\frac{1}{2}s}e^{-\frac{1}{2}s}+e^{-s}}{2}=\frac{(e^{\frac{1}{2}s}-e^{-\frac{1}{2}s})^2}{2}$$

$$=\frac{1-\cos\Pi(r)^2\cos\frac{2\pi}{n}-\sin\Pi(r)^2}{\sin\Pi(r)^2}$$

$$=\frac{\cos\Pi(r)^2}{\sin\Pi(r)^2}(1-\cos\frac{2\pi}{n})=2\cot\Pi(r)^2\sin\frac{\pi}{n}^2,$$

und folglich, weil alle Grössen als positiv vorausgesetzt worden sind, weshalb also

$$\cot\Pi(r)\quad\text{und}\quad e^{\frac{1}{2}s}-e^{-\frac{1}{2}s},$$

natürlich auch $\sin\frac{\pi}{n}$, positive Grössen sind:

$$63) \ldots\ldots \quad \cot \Pi(r) \sin\frac{\pi}{n} = \frac{e^{\frac{1}{2}s} - e^{-\frac{1}{2}s}}{2},$$

welche Gleichung wir auch auf den folgenden Ausdruck bringen können:

$$64) \ldots\ldots \quad \pi \cot \Pi(r) \, . \, \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = n\frac{e^{\frac{1}{2}s} - e^{-\frac{1}{2}s}}{2}.$$

Wenn wir uns nun eine Reihe von n solchen Dreiecken wie das vorher betrachtete gleichschenklige Dreieck denken, so ist ns die Summe der Grundlinien dieser Dreiecke, und wir wollen jetzt untersuchen, ob diese Summe sich, wenn n in's Unendliche wächst, einer bestimmten Gränze nähert, und welches — insofern dies der Fall ist — diese Gränze ist.

Wir schicken dieser Untersuchung die folgende allgemeine analytische Bemerkung voraus.

Bekanntlich ist allgemein für jedes x:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \;\;\,1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} + \ldots \\ -1 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^4}{1\ldots4} + \ldots \end{array}\right\}$$

$$= \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} + \frac{x^7}{1\ldots7} + \ldots,$$

und da nun, wenn x sich der Null nähert, offenbar auch

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

sich der Null nähert, so nähert unter derselben Voraussetzung auch

$$\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} + \frac{x^7}{1\ldots7} + \ldots$$

sich der Null. Jedes Glied der Reihe

$$\frac{x^2}{1.2.3}, \quad \frac{x^4}{1\ldots5}, \quad \frac{x^6}{1\ldots7}, \quad \frac{x^8}{1\ldots9}, \ldots$$

ist, wenigstens dann, wenn x kleiner als die Einheit geworden

ist, kleiner als das darüber stehende Glied der vorhergehenden Reihe, und es wird also offenbar, wenn x sich der Null nähert, auch

$$\frac{x^2}{1.2.3}+\frac{x^4}{1\ldots5}+\frac{x^6}{1\ldots7}+\frac{x^8}{1\ldots9}+\ldots.$$

sich der Null nähern.

Weil nach dem Obigen:

$$\frac{e^{\frac{1}{2}s}-e^{-\frac{1}{2}s}}{2}=\frac{\frac{s}{2}}{1}+\frac{\left(\frac{s}{2}\right)^3}{1.2.3}+\frac{\left(\frac{s}{2}\right)^5}{1\ldots5}+\frac{\left(\frac{s}{2}\right)^7}{1\ldots7}+\ldots.$$

ist, so ist:

$$n\frac{e^{\frac{1}{2}s}-e^{-\frac{1}{2}s}}{2}=\frac{\frac{ns}{2}}{1}+\frac{\frac{ns}{2}\cdot\left(\frac{ns}{2n}\right)^2}{1.2.3}+\frac{\frac{ns}{2}\cdot\left(\frac{ns}{2n}\right)^4}{1\ldots5}+\ldots.$$

$$=\tfrac{1}{2}(ns)\left\{1+\frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^2}{1.2.3}+\frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^4}{1\ldots5}+\frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^6}{1\ldots7}+\ldots.\right\}.$$

Nach der Gleichung 64) nähert sich, wenn n in's Unendliche wächst, die Grösse

$$n\frac{e^{\frac{1}{2}s}-e^{-\frac{1}{2}s}}{2}$$

offenbar der endlichen völlig bestimmten Gränze

$$\pi\cot\Pi(r).\text{Lim}\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\pi\cot\Pi(r).1=\pi\cot\Pi(r),$$

und es nähert sich also unter derselben Voraussetzung auch

$$\tfrac{1}{2}(ns)\left\{1+\frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^2}{1.2.3}+\frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^4}{1\ldots5}+\frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^6}{1\ldots7}+\ldots.\right\}$$

der endlichen völlig bestimmten Gränze $\pi\cot\Pi(r)$, woraus sich ergiebt, dass, wenn n in's Unendliche wächst, die Summe ns nicht in's Unendliche wachsen kann, weil, wenn dies der Fall wäre, offenbar auch

$$\tfrac{1}{2}(ns)\left\{1+\frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^2}{1.2.3}+\frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^4}{1\ldots5}+\frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^6}{1\ldots7}+\ldots.\right\}$$

in's Unendliche wachsen würde, was gegen das Obige streitet. Weil also ns nicht in's Unendliche wächst, wenn n in's Unendliche wächst, so nähert sich $\frac{ns}{2n}$ der Null, wenn n in's Unendliche wächst, folglich nähert sich nach dem Obigen

$$\frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^2}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^4}{1...5} + \frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^6}{1...7} + \frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^8}{1...9} + \ldots\ldots$$

der Null, und

$$1 + \frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^2}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^4}{1...5} + \frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^6}{1...7} + \frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^8}{1...9} + \ldots\ldots$$

nähert sich folglich der Einheit als Gränze. Weil nun, wenn n in's Unendliche wächst, das Product

$$\tfrac{1}{2}(ns).\left\{1 + \frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^2}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^4}{1...5} + \frac{\left(\frac{ns}{2n}\right)^6}{1...7} + \ldots\right\}$$

sich der endlichen völlig bestimmten Gränze $\pi \cot \Pi(r)$, und der zweite Factor sich der Einheit nähert, so muss der erste Factor $\frac{1}{2}(ns)$ sich der Gränze $\pi \cot \Pi(r)$, also (ns) sich der Gränze $2\pi \cot \Pi(r)$ nähern, wodurch bewiesen ist, dass (ns) sich, wenn n in's Unendliche wächst, einer endlichen Gränze nähert, und diese Gränze selbst auch bestimmt ist. Wir haben daher unter Voraussetzung eines in's Unendliche wachsenden n die Gleichung:

65) . . . . $\text{Lim}\,(ns) = 2\pi \cot \Pi(r)$. *)

Nach 46) ist ferner in unserem gleichschenkligen Dreiecke:

---

*) Lobatschewsky nennt dies die „circonferenza del cerchio di raggio r“ wobei ich bemerke, dass ich die italienische Uebersetzung seiner Schrift in dem Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane. Anno V. Settembre e Ottobre 1867. zu benutzen genöthigt bin, da mir das Original gerade jetzt nicht zu Gebote steht.

$$\cot\Omega = \frac{\cos\Pi(r) - \cos\frac{2\pi}{n}\cos\Pi(r)}{\sin\frac{2\pi}{n}\sin\Pi(r)\cos\Pi(r)}$$

$$= \frac{1}{\sin\Pi(r)} \cdot \frac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}} = \frac{\tang\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)},$$

und folglich

$$\Omega = \operatorname{Arc\,cot}\frac{\tang\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)}.$$

Weil

$$\frac{2\pi}{n} + \Omega + \Omega = \frac{2\pi}{n} + 2\Omega \overset{=}{<} \pi$$

ist, so ist offenbar $\Omega < \frac{1}{2}\pi$, und daher der Bogen

$$\operatorname{Arc\,cot}\frac{\tang\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)},$$

dessen Cotangente man offenbar als positiv vorauszusetzen berechtigt ist, da man sich n beliebig gross angenommen denken kann, zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen. Setzen wir nun

$$\varDelta = \pi - \left(\frac{2\pi}{n} + \Omega + \Omega\right) = \frac{(n-2)\pi}{n} - 2\Omega,$$

so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\varDelta = \frac{(n-2)\pi}{n} - 2\operatorname{Arc\,cot}\frac{\tang\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)},$$

folglich:

$$n\varDelta = n\{\pi - 2\operatorname{Arc\,cot}\frac{\tang\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)}\} - 2\pi$$

$$= 2n\{\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{Arc\,cot}\frac{\tang\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)}\} - 2\pi$$

$$= 2n\operatorname{Arctang}\frac{\tang\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)}\} - 2\pi,$$

wo man auch jetzt den Bogen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen hat; also ist:

$$\frac{(n\varDelta)}{2} = n \operatorname{Arc tang} \frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)} - \pi.$$

Weil

$$\frac{\operatorname{tang} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

ist, so ist für ein der Null sich näherndes x:

$$\operatorname{Lim} \frac{\operatorname{tang} x}{x} = \operatorname{Lim} \frac{\sin x}{x} \cdot \operatorname{Lim} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Also ist für ein in's Unendliche wachsendes n offenbar:

$$\operatorname{Lim} \frac{\operatorname{tang} \operatorname{Arc tang} \dfrac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)}}{\operatorname{Arc tang} \dfrac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)}} = 1,$$

daher:

$$\operatorname{Lim} \frac{\dfrac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)}}{\operatorname{Arc tang} \dfrac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)}} = 1,$$

und folglich auch:

$$\operatorname{Lim} \frac{n \dfrac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)}}{n \operatorname{Arc tang} \dfrac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)}} = 1,$$

oder:

$$\operatorname{Lim} \frac{\dfrac{\pi}{\sin\Pi(r)} \cdot \dfrac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}}{n \operatorname{Arc tang} \dfrac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)}} = 1,$$

und weil nun offenbar

$$\operatorname{Lim}\left\{\frac{\pi}{\sin\Pi(r)}\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right\}=\frac{\pi}{\sin\Pi(r)}\operatorname{Lim}\frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\frac{\pi}{\sin\Pi(r)}$$

ist, der obige ganze Bruch sich aber der Einheit als Gränze nähert, so muss sein Nenner

$$n\operatorname{Arc}\operatorname{tang}\frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)}$$

sich offenbar der Gränze $\frac{\pi}{\sin\Pi(r)}$ nähern, so dass also:

$$\operatorname{Lim}\left\{n\operatorname{Arc}\operatorname{tang}\frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)}\right\}=\frac{\pi}{\sin\Pi(r)}$$

ist. Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{(n\Delta)}{2}=n\operatorname{Arc}\operatorname{tang}\frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)}-\pi,$$

also:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Lim}(n\Delta)=\operatorname{Lim}\left\{n\operatorname{Arc}\operatorname{tang}\frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\sin\Pi(r)}\right\}-\pi$$

ist, so ist:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Lim}(n\Delta)=\frac{\pi}{\sin\Pi(r)}-\pi=\pi\left\{\frac{1}{\sin\Pi(r)}-1\right\},$$

folglich:

$$66)\ \ldots\ldots\quad \operatorname{Lim}(n\Delta)=2\pi\left\{\frac{1}{\sin\Pi(r)}-1\right\}.$$

Nach 5) ist:

$$\cot\Pi(r)=\frac{\cos\Pi(r)}{\sin\Pi(r)}=\frac{e^r-e^{-r}}{e^r+e^{-r}}\cdot\frac{e^r+e^{-r}}{2}=\frac{e^r-e^{-r}}{2},$$

also nach 65):

$$67)\ \ldots\ldots\quad \operatorname{Lim}(ns)=2\pi\frac{e^r-e^{-r}}{2}=\pi(e^r-e^{-r}).$$

Ferner ist nach 5):

$$\frac{1}{\sin\Pi(r)}-1=\frac{e^r+e^{-r}}{2}-1=\frac{e^r+e^{-r}-2}{2}$$

$$=\frac{e^r-2e^{\frac{1}{2}r}e^{-\frac{1}{2}r}+e^{-r}}{2}=\frac{(e^{\frac{1}{2}r}-e^{-\frac{1}{2}r})^2}{2},$$

also nach 66):

68) . . . . $\operatorname{Lim}(n\Delta) = \pi(e^{\frac{1}{2}r} - e^{-\frac{1}{2}r})^2$.

Nach 67) und 68) ist:

$$\frac{\operatorname{Lim}(ns)}{\operatorname{Lim}(n\Delta)} = \frac{e^r - e^{-r}}{(e^{\frac{1}{2}r} - e^{-\frac{1}{2}r})^2} = \frac{(e^{\frac{1}{2}r} + e^{-\frac{1}{2}r})(e^{\frac{1}{2}r} - e^{-\frac{1}{2}r})}{(e^{\frac{1}{2}r} - e^{-\frac{1}{2}r})^2},$$

also:

69) . . . . $\dfrac{\operatorname{Lim}(ns)}{\operatorname{Lim}(n\Delta)} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}r} + e^{-\frac{1}{2}r}}{e^{\frac{1}{2}r} - e^{-\frac{1}{2}r}}$,

oder, weil nach 5):

$$\cos\Pi(\tfrac{1}{2}r) = \frac{e^{\frac{1}{2}r} - e^{-\frac{1}{2}r}}{e^{\frac{1}{2}r} + e^{-\frac{1}{2}r}}, \quad \sec\Pi(\tfrac{1}{2}r) = \frac{e^{\frac{1}{2}r} + e^{-\frac{1}{2}r}}{e^{\frac{1}{2}r} - e^{-\frac{1}{2}r}}$$

ist:

70) . . . . $\dfrac{\operatorname{Lim}(ns)}{\operatorname{Lim}(n\Delta)} = \sec\Pi(\tfrac{1}{2}r)$,

folglich:

71) . . . . . $\operatorname{Lim}(ns) = \sec\Pi(\tfrac{1}{2}r) \,.\, \operatorname{Lim}(n\Delta)$

und:

72) . . . . . $\operatorname{Lim}(n\Delta) = \cos\Pi(\tfrac{1}{2}r) \,.\, \operatorname{Lim}(ns)$.

Viertes Kapitel.

Das imaginäre oder eingebildete Viereck.

§. 25.

Wir denken uns zwei imaginäre oder eingebildete Dreiecke: das eine mit den Seiten und Winkeln

$$a', b', c \quad \text{und} \quad A', B', C;$$

das andere mit den Seiten und Winkeln

$$a'', b'', c \quad \text{und} \quad A'', B'', D;$$

so dass also diese beiden Dreiecke die Seite c mit einander gemein haben; und setzen ferner voraus, dass

$$A' + A'' = A, \quad B' + B'' = B$$

sei. Dann können wir das System der Grössen

$$a', b', a'', b'' \quad \text{und} \quad A, B, C, D$$

ein imaginäres oder eingebildetes Viereck mit den Seiten a', b', a'', b'' und den Winkeln A, B, C, D nennen, von welchem c als eine Diagonale zu betrachten ist.

Es liegt jetzt keineswegs in unserer Absicht, über solche imaginäre oder eingebildete Vierecke ausführliche Untersuchungen anzustellen, jedoch wollen wir eine zwischen zwei Seiten, etwa a' und b', und den drei daran liegenden Winkeln A, B, C, und einer der beiden anderen Seiten, etwa der Seite b'', Statt findende allgemeine Relation beweisen, von welcher Lobatschewsky nur einen besonderen Fall betrachtet hat, auf den wir nachher zurückkommen werden.

§. 26.

In dem ersten der beiden imaginären oder eingebildeten Dreiecke, von denen wir ausgehen, haben wir nach 46) die folgenden Relationen:

73)

$$\sin A' \tang \Pi(a') = \sin B' \tang \Pi(b') = \sin C \tang \Pi(c)$$

und:

74)

$$\cot A' \sin B' \sin \Pi(c) + \cos B' = \frac{\cos \Pi(c)}{\cos \Pi(a')},$$

$$\cot A' \sin C \sin \Pi(b') + \cos C = \frac{\cos \Pi(b')}{\cos \Pi(a')};$$

$$\cot B' \sin A' \sin \Pi(c) + \cos A' = \frac{\cos \Pi(c)}{\cos \Pi(b')},$$

$$\cot B' \sin C \sin \Pi(a') + \cos C = \frac{\cos \Pi(a')}{\cos \Pi(b')};$$

$$\cot C \sin A' \sin \Pi(b') + \cos A' = \frac{\cos \Pi(b')}{\cos \Pi(c)},$$

$$\cot C \sin B' \sin \Pi(a') + \cos B' = \frac{\cos \Pi(a')}{\cos \Pi(c)}.$$

In dem zweiten der beiden die Grundlage unserer Untersuchung bildenden Dreiecke ist:

$$\cot B'' \sin A'' \sin \Pi(c) + \cos A'' = \frac{\cos \Pi(c)}{\cos \Pi(b'')},$$

also, weil

$$A' + A'' = A, \quad B' + B'' = B$$

gesetzt worden ist:

$$\cot(B - B')\sin(A - A')\sin \Pi(c) + \cos(A - A') = \frac{\cos \Pi(c)}{\cos \Pi(b'')},$$

folglich:

$$\begin{aligned}&\{\cot(B - B')\sin A \sin \Pi(c) + \cos A\}\cos A' \\ -&\{\cot(B - B')\cos A \sin \Pi(c) - \sin A\}\sin A' \\ &= \frac{\cos \Pi(c)}{\cos \Pi(b'')},\end{aligned}$$

und daher auch:

75)

$$\begin{aligned}&\{\cot(B - B')\sin A \sin \Pi(c) + \cos A\}.\cos A' \cos \Pi(c) \\ -&\{\cot(B - B')\cos A \sin \Pi(c) - \sin A\}.\sin A' \cos \Pi(c) \\ &= \frac{\cos \Pi(c)^2}{\cos \Pi(b'')}.\end{aligned}$$

Nach der vierten der Gleichungen 74) ist:

$$\cot B' = \frac{\cos \Pi(a') - \cos \Pi(b') \cos C}{\sin \Pi(a') \cos \Pi(b') \sin C},$$

woraus man, wenn der Kürze wegen:

76)

$$G = \{\cos \Pi(a') - \cos \Pi(b') \cos C\}\sin B - \sin \Pi(a') \cos \Pi(b') \cos B \sin C,$$

$$G' = \{\cos \Pi(a') - \cos \Pi(b') \cos C\}\sin B + \sin \Pi(a') \cos \Pi(b') \sin B \sin C$$

gesetzt wird, leicht erhält:

77) . . . $$\cot(B - B') = \frac{\cot B \cot B' + 1}{\cot B' - \cot B} = \frac{G'}{G}.$$

Nach 73) ist:

$$\sin A' \cos \Pi(c) = \sin C \cot \Pi(a') \sin \Pi(c)$$

und nach 46):

$$\sin \Pi(c) = \frac{\sin \Pi(a') \sin \Pi(b')}{1 - \cos \Pi(a') \cos \Pi(b') \cos C},$$

also:

$$78) \ldots \sin A' \cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(a') \sin \Pi(b') \sin C}{1 - \cos \Pi(a') \cos \Pi(b') \cos C}.$$

Nach der fünften der Gleichungen 74) ist:

$$\cot C \sin \Pi(b').\sin A' \cos \Pi(c) + \cos A' \cos \Pi(c) = \cos \Pi(b'),$$

also nach 78):

$$\cos A' \cos \Pi(c)$$
$$= \cos \Pi(b') - \frac{\cos \Pi(a') \sin \Pi(b')^2 \cos C}{1 - \cos \Pi(a') \cos \Pi(b') \cos C},$$

und folglich offenbar:

$$79) \ldots \cos A' \cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(b') - \cos \Pi(a') \cos C}{1 - \cos \Pi(a') \cos \Pi(b') \cos C}.$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$80) \ldots \left\{ \begin{array}{l} J = 1 - \cos \Pi(a') \cos \Pi(b') \cos C, \\ J' = \sin \Pi(a') \sin \Pi(b'); \end{array} \right.$$

so ist:

$$\sin \Pi(c) = \frac{J'}{J}, \quad \sin A' \cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(a') \sin \Pi(b') \sin C}{J},$$
$$\cos A' \cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(b') - \cos \Pi(a') \cos C}{J}.$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichung 75) ein, so wird dieselbe:

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{G'}{G} \cdot \frac{J'}{J} \sin A + \cos A\right) \cdot \frac{\cos \Pi(b') - \cos \Pi(a') \cos C}{J} \\ - \left(\frac{G'}{G} \cdot \frac{J'}{J} \cos A - \sin A\right) \cdot \frac{\cos \Pi(a') \sin \Pi(b') \sin C}{J} \end{array} \right\} = \frac{\cos \Pi(c)^2}{\cos \Pi(b'')}.$$

Weil aber nach dem Obigen:

$$\cos \Pi(c)^2 = \frac{\{1 - \cos \Pi(a') \cos \Pi(b') \cos C\}^2 - \sin \Pi(a')^2 \sin \Pi(b')^2}{\{1 - \cos \Pi(a') \cos \Pi(b') \cos C\}^2},$$

also nach 80):

$$\cos \Pi(c)^2 = \frac{J^2 - J'^2}{J^2}$$

ist, so wird die vorstehende Gleichung:

$$\left(\frac{G'}{G}\cdot\frac{J'}{J}\sin A+\cos A\right)\cdot\frac{\cos\Pi(b')-\cos\Pi(a')\cos C}{J}$$
$$-\left(\frac{G'}{G}\cdot\frac{J'}{J}\cos A-\sin A\right)\cdot\frac{\cos\Pi(a')\sin\Pi(b')\sin C}{J}$$
$$=\frac{J^2-J'^2}{J^2}\cdot\frac{1}{\cos\Pi(b'')},$$

folglich, wenn man der Kürze wegen noch:

81)

$$H=\{\cos\Pi(b')-\cos\Pi(a')\cos C\}\cos A+\cos\Pi(a')\sin\Pi(b')\sin A\sin C,$$
$$H'=\{\cos\Pi(b')-\cos\Pi(a')\cos C\}\sin A-\cos\Pi(a')\sin\Pi(b')\cos A\sin C$$

setzt:

82) . . . . . $$GHJ+G'H'J'=\frac{G(J^2-J'^2)}{\cos\Pi(b'')},$$

oder:

83) . . . . . . $$\cos\Pi(b'')=\frac{G(J^2-J'^2)}{GHJ+G'H'J'},$$

oder auch:

84) . . . . . $$\cos\Pi(b'')=\frac{G(J+J')(J-J')}{GHJ+G'H'J'},$$

oder:

85) . . . . . $$\cos\Pi(b'')=\frac{G\left(\frac{J}{J'}-\frac{J'}{J}\right)}{G\frac{H}{J'}+G'\frac{H'}{J}}.$$

§. 27.

Für $A=C=90^0$ ist nach 76), 81), 80):

86)

$$G=\cos\Pi(a')\sin B-\sin\Pi(a')\cos\Pi(b')\cos B,$$
$$G'=\cos\Pi(a')\cos B+\sin\Pi(a')\cos\Pi(b')\sin B;$$

$$H=\cos\Pi(a')\sin\Pi(b'),$$
$$H'=\cos\Pi(b');$$

$$J=1,$$
$$J'=\sin\Pi(a')\sin\Pi(b');$$

also, wie man leicht findet:

$$GHJ + G'H'J' = \sin\Pi(b')\{\cos\Pi(a')^2 + \sin\Pi(a')^2\cos\Pi(b')^2\}\sin B$$
$$= \sin\Pi(b')\{1 - \sin\Pi(a')^2\sin\Pi(b')^2\}\sin B,$$

folglich, weil in diesem Falle nach dem Obigen:

$$J^2 - J'^2 = 1 - \sin\Pi(a')^2\sin\Pi(b')^2$$

ist, nach 83):

$$\cos\Pi(b'') = \frac{G}{\sin\Pi(b')\sin B},$$

und daher nach 86):

$$87) \ldots \cos\Pi(b'') = \frac{\cos\Pi(a')\sin B - \sin\Pi(a')\cos\Pi(b')\cos B}{\sin\Pi(b')\sin B},$$

oder:

$$88) \ldots \cos\Pi(b'') = \frac{\cos\Pi(a')}{\sin\Pi(b')} - \sin\Pi(a')\cot\Pi(b')\cot B.$$

Diese letztere dem vorhergehenden besonderen Falle entsprechende Formel hat schon Lobatschewsky gegeben, worüber man Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane. Anno V. — Settembre e Ottobre 1867. p. 301. Nr. 23.*) nachsehen kann.

Für $B = \Pi(a')$ — (m. vergl. §. 12.) — ist:

$$\cos\Pi(b'') = \frac{\cos\Pi(a')}{\sin\Pi(b')} - \frac{\cos\Pi(a')}{\operatorname{tang}\Pi(b')} = \cos\Pi(a') . \frac{1 - \cos\Pi(b')}{\sin\Pi(b')}$$
$$= \cos\Pi(a')\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Pi(b'),$$

also nach 9):

$$89) \ldots\ldots \cos\Pi(b'') = \cos\Pi(a') . e^{-b'}.$$

Für $B = \pi - \Pi(a')$ — (m. vergl. §. 12.) — ist:

$$\cos\Pi(b'') = \frac{\cos\Pi(a')}{\sin\Pi(b')} + \frac{\cos\Pi(b')}{\operatorname{tang}\Pi(b')} = \cos\Pi(a') . \frac{1 + \cos\Pi(b')}{\sin\Pi(b')}$$
$$= \cos\Pi(a')\cot\tfrac{1}{2}\Pi(b'),$$

also nach 9):

$$90) \ldots\ldots \cos\Pi(b'') = \cos\Pi(a') . e^{+b'}.$$

Ich hoffe später zu diesen Untersuchungen zurückzukehren.

---

*) Irrthümlich steht an diesem Orte $\operatorname{cotang}\Pi(L)$ statt des richtigen $\operatorname{cotang} L$.

XXXVI.

Integration der partiellen Differentialgleichung

$$(1) \ldots\ldots \frac{d^n z}{dx^n} = x^m \frac{d^{m+n} z}{dy^{m+n}} + F_1(y) + xF_2(y) + \ldots + x^{m-1} F_m(y)$$

in welcher m und n ganze positive Zahlen und

$$F_1(y), \quad F_2(y), \ldots\ldots F_m(y)$$

beliebige Functionen von y bezeichnen.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,
Professor am Polytechnikum in Wien.

Ich habe im X. Bande der Schlömilch'schen Zeitschrift die Integration der Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y + A_1 + A_2 x + \ldots + A_m x^{m-1}$$

gezeigt; auf ähnliche Weise will ich nun das Integrale der Gleichung (1) geben.

Für den Fall, wo $m = 1$ ist, lautet die Gleichung (1):

$$(2) \ldots\ldots\ldots \frac{d^n z}{dx^n} = x \frac{d^{n+1} z}{dy^{n+1}} + F_1(y),$$

und dieser Gleichung genügt folgender Werth von z:

(3)

$$z = \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} [\varphi_1(y + \lambda_1 ux) + \varphi_2(y + \lambda_2 ux) + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \varphi_{n+1}(y + \lambda_{n+1} ux)] \, du;$$

woselbst

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$$

Wurzeln der Gleichung

$$(4) \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \lambda^{n+1} = 1$$

sind, und

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$$

willkührliche Functionen bedeuten, zwischen welchen aber eine gewisse Bedingungsgleichung statt findet.

Um diess zu beweisen, schreibe ich das in (3) stehende z folgendermassen:

$$(5) \ldots \quad z = \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} [\varphi_r(y + \lambda_r ux)]\, du,$$

und habe sodann:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} u^n \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} [\lambda_r^n \varphi_r^{(n)}(y + \lambda_r ux)]\, du,$$

$$\frac{d^{n+1} z}{dy^{n+1}} = \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} [\varphi_r^{(n+1)}(y + \lambda_r ux)]\, du.$$

Diese Werthe führen, in die Gleichung (2) substituirt, zu folgender Gleichung:

$$(7) \ldots \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} u^n \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} [\lambda_r^n \varphi_r^{(n)}(y + \lambda_r ux)]\, du$$

$$= x \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} [\varphi_r^{(n+1)}(y + \lambda_r ux)]\, du + F_1(y).$$

Behandelt man nun den Ausdruck:

$$x \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} [\varphi_r^{(n+1)}(y + \lambda_r ux)]\, du,$$

der sich auch folgendermassen schreiben lässt:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \frac{d}{du} \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} \left[\frac{1}{\lambda_r} \varphi_r^{(n)}(y + \lambda_r ux)\right] du,$$

mittelst der Methode des theilweisen Integrirens, so erhält man:

$$\left\{e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} \left[\frac{1}{\lambda_r} \varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r ux)\right]\right\}_{u=0}^{u=\infty}$$

$$+\int_0^\infty u^n e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} \left[\frac{1}{\lambda_r} \varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r ux)\right] du,$$

und wenn vorausgesetzt wird, dass der Ausdruck

$$e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} \left[\frac{1}{\lambda_r} \varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r ux)\right]$$

für $u=\infty$ verschwindet:

$$-\mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} \left[\frac{1}{\lambda_r} \varphi_r^{(n)}(y)\right]$$

$$+\int_0^\infty u^n e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} \left[\frac{1}{\lambda_r} \varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r ux)\right] du.$$

Hierdurch nimmt aber die Gleichung (7) folgende Gestalt an:

$$(8)\ \ldots \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} u^n \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} [\lambda_r^n \varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r ux)]\, du$$

$$= -\mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} \left[\frac{1}{\lambda_r} \varphi_r^{(n)}(y)\right]$$

$$+\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} u^n \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} \left[\frac{1}{\lambda_r} \varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r ux)\right] du + F_1(y).$$

Bemerkt man nun, dass vermöge der Gleichung (4)

$$\lambda_r^n = \frac{1}{\lambda_r}$$

ist, so sieht man, dass die Gleichung (8) identisch erfüllt wird, wenn

$$\mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+1} [\lambda_r^n \varphi_r^{(n)}(y)] = F_1(y)$$

gesetzt wird; folglich ist in der That das in (3) stehende z das Integrale der Gleichung (2), wenn zwischen den $n+1$ willkührlichen Functionen die Bedingungsgleichung

$$\lambda_1{}^n \varphi_1{}^{(n)}(y) + \lambda_2{}^n \varphi_2{}^{(n)}(y) + \ldots + \lambda_{n+1}{}^n \varphi_{n+1}{}^{(n)}(y) = F_1(y)$$

obwaltet. — Für den speciellen Fall $F_1(y) = 0$ stimmt das hier gegebene Integrale mit dem von Lobatto im XVII. Bande von Crelle's Journal gegebenen, überein.

Für den Fall, wo $m = 2$ ist, lautet die Gleichung (1):

$$(9) \ldots \quad \frac{d^n z}{dx^n} = x^2 \frac{d^{n+2} z}{dy^{n+2}} + F_1(y) + x F_2(y),$$

und dieser Gleichung wird Genüge geleistet durch einen Ausdruck der Form:

$$(10) \ldots z = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} u[\varphi_1(y+\lambda_1 uvx) + \varphi_2(y+\lambda_2 uvx) + \ldots$$
$$\ldots + \varphi_{n+2}(y + \lambda_{n+2} uvx)]\, du dv,$$

woselbst

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}$$

Wurzeln der Gleichung

$$(11) \ldots \ldots \quad \lambda^{n+2} = 1$$

sind, und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+2}$ willkührliche Functionen bedeuten, zwischen welchen zwei Bedingungsgleichungen obwalten.

Um diess zu beweisen, schreiben wir vorerst z folgendermassen:

$$(12) \ldots z = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} u \underset{r=1}{\overset{r=n+2}{\mathrm{S}}} [\varphi_r(y + \lambda_r uvx)]\, du dv,$$

und construiren sodann die Ausdrücke für $\frac{d^n z}{dx^n}$ und $\frac{d^{n+2} z}{dy^{n+2}}$. Es ist:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} u^{n+1} v^n \underset{r=1}{\overset{r=n+2}{\mathrm{S}}} [\lambda_r{}^n \varphi_r{}^{(n)}(y+\lambda_r uvx)]\, du dv,$$

$$\frac{d^{n+2} z}{dy^{n+2}} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} u \underset{r=1}{\overset{r=n+2}{\mathrm{S}}} [\varphi_r{}^{(n+2)}(y + \lambda_r uvx)]\, du dv.$$

Diese Werthe führen nun, in (9) substituirt, zu folgender Gleichung:

(13)

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} u^{n+1} v^n \mathop{S}_{r=1}^{r=n+2} [\lambda_r^n \varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r uvx)]dudv$$

$$= x^2\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} u \mathop{S}_{r=1}^{r=n+2} [\varphi_r^{(n+2)}(y+\lambda_r uvx)]dudv$$
$$+ F_1(y) + xF_2(y),$$

deren Identität nachzuweisen ist.

Behandelt man zu dem Zwecke das Integrale

$$x^2\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} u \mathop{S}_{r=1}^{r=n+2} [\varphi_r^{(n+2)}(y+\lambda_r uvx)]\, dudv$$

zweimal nach der Methode des theilweisen Integrirens, so erhält man, dieses successive thuend, für obiges Integrale vorerst:

$$x\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} \frac{d}{dv} \mathop{S}_{r=1}^{r=n+2} \left[\frac{1}{\lambda_r}\varphi_r^{(n+1)}(y+\lambda_r uvx)\right] dudv,$$

und diess ist gleich:

$$x\left\{e^{-\frac{v^{n+2}}{n+2}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}}{n+2}} \mathop{S}_{r=1}^{r=n+2} \left[\frac{1}{\lambda_r}\varphi_r^{(n+1)}(y+\lambda_r uvx)\right]du\right\}_{v=0}^{v=\infty}$$

$$+ x\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} v^{n+1} \mathop{S}_{r=1}^{r=n+2} \left[\frac{1}{\lambda_r}\varphi_r^{(n+1)}(y+\lambda_r uvx)\right]dudv.$$

Nimmt man nun an, dass für die Substitution $v=\infty$ der Ausdruck

$$xe^{-\frac{v^{n+2}}{n+2}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}}{n+2}} \mathop{S}_{r=1}^{r=n+2} \left[\frac{1}{\lambda_r}\varphi_r^{(n+1)}(y+\lambda_r uvx)\right]du$$

verschwindet, so hat man:

$$- x \mathop{S}_{r=1}^{r=n+2} \left[\frac{1}{\lambda_r}\varphi_r^{(n+1)}(y)\right]\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}}{n+2}} du$$

$$+ x\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} v^{n+1} \mathop{S}_{r=1}^{r=n+2} \left[\frac{1}{\lambda_r}\varphi_r^{(n+1)}(y+\lambda_r uvx)\right]dudv.$$

Diess lässt sich aber auch so schreiben:

$$-x \overset{r=n+2}{\underset{r=1}{S}} \left[\frac{1}{\lambda_r} \varphi_r^{(n+1)}(y)\right] \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}}{n+2}} du$$

$$+\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} v^n \frac{d}{du} \overset{r=n+2}{\underset{r=1}{S}} \left[\frac{1}{\lambda_r^2} \varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r uvx)\right] du dv,$$

und gibt nun wieder nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelt:

$$-x \overset{r=n+2}{\underset{r=1}{S}} \left[\frac{1}{\lambda_r} \varphi_r^{(n+1)}(y)\right] \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}}{n+2}} du$$

$$+ \left\{ e^{-\frac{u^{n+2}}{n+2}} \int_0^\infty v^n e^{-\frac{v^{n+2}}{n+2}} \overset{r=n+2}{\underset{r=1}{S}} \left[\frac{1}{\lambda_r^2} \varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r uvx)\right] dv \right\}_{u=0}^{u=\infty}$$

$$+\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} v^n u^{n+1} \overset{r=n+2}{\underset{r=1}{S}} \left[\frac{1}{\lambda_r^2} \varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r uvx)\right] du dv.$$

Nimmt man ferner an, dass für $u = \infty$ der Ausdruck

$$e^{-\frac{u^{n+2}}{n+2}} \int_0^\infty v^n e^{-\frac{v^{n+2}}{n+2}} \overset{r=n+2}{\underset{r=1}{S}} \left[\frac{1}{\lambda_r^2} \varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r uvx)\right] dv$$

verschwindet, so ist obiger Ausdruck gleich:

$$-x \overset{r=n+2}{\underset{r=1}{S}} \left[\frac{1}{\lambda_r} \varphi_r^{(n+1)}(y)\right] \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}}{n+2}} du$$

$$- \overset{r=n+2}{\underset{r=1}{S}} \left[\frac{1}{\lambda_r^2} \varphi_r^{(n)}(y)\right] \int_0^\infty v^n e^{-\frac{v^{n+2}}{n+2}} dv$$

$$+\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} v^n u^{n+1} \overset{r=n+2}{\underset{r=1}{S}} \left[\frac{1}{\lambda_r^2} \varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r uvx)\right] du dv.$$

Bemerkt man nun, dass vermöge der Gleichung (11):

$$\frac{1}{\lambda_r^2} = \lambda_r^n, \quad \frac{1}{\lambda_r} = \lambda_r^{n+1}$$

ist, so hat man, den oben gewonnenen aus drei Theilen bestehenden Ausdruck in (13) einführend, die Gleichung:

(14)

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} u^{n+1} v^n \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+2} [\lambda_r^n \varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r uvx)]\,du\,dv$$

$$= -x \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+2} [\lambda_r^{n+1} \varphi_r^{(n+1)}(y)] \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}}{n+2}} du$$

$$- \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+2} [\lambda_r^n \varphi_r^{(n)}(y)] \int_0^\infty v^n e^{-\frac{v^{n+2}}{n+2}} dv$$

$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} u^{n+1} v^n \mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+2} [\lambda_r^n \varphi_r^{(n)}(y+\lambda_r uvx)]\,du\,dv$$

$$+ F_1(y) + xF_2(y),$$

welche identisch wird, wenn man:

(15)

$$\mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+2} [\lambda_r^{n+1} \varphi_r^{(n+1)}(y)] \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}}{n+2}} du = F_2(y),$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{r=1}^{r=n+2} [\lambda_r^n \varphi_r^{(n)}(y)] \int_0^\infty v^n e^{-\frac{v^{n+2}}{n+2}} dv = F_1(y)$$

setzt. Es ist demnach das Integrale der Gleichung

$$(9) \ldots \quad \frac{d^n z}{dx^n} = x^2 \frac{d^{n+2} z}{dy^{n+2}} + F_1(y) + xF_2(y)$$

in der That von der Form:

$$(10) \ldots z = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}+v^{n+2}}{n+2}} u[\varphi_1(y+\lambda_1 uvx) + \varphi_2(y+\lambda_2 uvx) + \ldots$$
$$\ldots + \varphi_{n+2}(y+\lambda_{n+2} uvx)]\,du\,dv,$$

vorausgesetzt, dass

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}$$

die $n+2$ Wurzeln der Gleichung

$$(11) \ldots \ldots \quad \lambda^{n+2} = 1$$

repräsentiren, und dass zwischen den $n+2$ willkührlichen Functionen

$$\varphi_1,\quad \varphi_2,\ldots,\ \varphi_{n+2}$$

die zwei Gleichungen:

$$[\lambda_1{}^n\varphi_1{}^{(n)}(y)+\lambda_2{}^n\varphi_2{}^{(n)}(y)+\ldots+\lambda_{n+2}{}^n\varphi_{n+2}{}^{(n)}(y)]$$

$$\times\int_0^\infty u^n e^{-\frac{u^{n+2}}{n+2}}du=F_1(y),$$

$$[\lambda_1{}^{n+1}\varphi_1{}^{(n+1)}(y)+\lambda_2{}^{n+1}\varphi_2{}^{(n+1)}(y)+\ldots+\lambda_{n+2}{}^{n+1}\varphi_{n+2}{}^{(n+1)}(y)]$$

$$\times\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+2}}{n+2}}du=F_2(y)$$

stattfinden, u. s. w. u. s. w.

XXXVII.

Miscellen.

Einfacher Beweis der von Herrn Prof. Fasbender (Thl. 49. S. 115.) gefundenen Relation.

Von Herrn Dr. Bermann in Liegnitz.

Die von meinem geehrten Freunde Herrn Professor Fasbender in Thorn im Archiv Thl. 49. S. 115. mitgetheilte, von Herrn Professor Bretschneider zu Gotha in Thl. 50. S. 103. erweiterte und von Herrn Professor Hackel in Böhmisch-Leipa in Thl. 49. S. 346., so wie von Herrn Prof. Fasbender selbst in Thl. 51. S. 46. in einfacher Weise dargethane Relation zwischen den Cotangenten der Winkel, welche die Schwerlinien eines Dreiecks mit den Seiten bilden, nach denen sie gezogen sind, lässt sich auch folgendermassen ganz elementar und selbst für Secundaner leicht verständlich beweisen.

Sind (die Figur wird Jeder leicht selbst zeichnen können) t_1, t_2, t_3 die resp. nach den Seiten a, b, c des Dreiecks gezogenen Schwerlinien; v_1, v_2, v_3 die in Rede stehenden (nach derselben Richtung genommenen) Winkel, so hat man z. B. für $\angle v_1$:

$$\cos v_1 = \frac{\frac{a^2}{4} + t_1{}^2 - b^2}{at_1},$$

und, wegen

$$t_1{}^2 = \frac{b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}}{2}:$$

$$\cos v_1 = \frac{c^2 - b^2}{2at_1}.$$

Nun ist

$$\sin v_1 = \frac{\frac{1}{2}\Delta}{\frac{1}{4}at_1} = \frac{2\Delta}{at_1} \text{ (Δ Flächeninh. des Dreiecks.).}$$

Also:

$$\operatorname{cotang} v_1 = \frac{c^2 - b^2}{4\Delta},$$

analog:

$$\operatorname{cotang} v_2 = \frac{b^2 - a^2}{4\Delta},$$

$$\operatorname{cotang} v_3 = \frac{a^2 - c^2}{4\Delta}.$$

Mithin die Summe

$$\operatorname{cotang} v_1 + \operatorname{cotang} v_2 + \operatorname{cotang} v_3 = 0.$$

XXXVIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Professor Oelschläger in Stuttgart.

1) Beschreibt man aus den Halbirungspunkten der Seiten eines Dreiecks Kreise, welche durch die Endpunkte der Seiten gehen, so lassen sich aus den gleichen Mittelpunkten je zwei concentrische Kreise beschreiben, von denen jeder die beiden andern Kreise um die Seiten berührt. (Kleinere und grössere Berührungskreise.).

2) Jedes Paar concentrischer Berührungskreise schneidet diejenige Seite des Dreiecks, auf welcher ihr Mittelpunkt liegt, in den Berührungspunkten der In- und Ankreise.

3) Die Berührungspunkte der drei kleineren Berührungskreise mit zwei Seitenkreisen liegen auf den Medianen des Dreiecks.

4) Die Berührungspunkte der drei grösseren Berührungskreise mit zwei Seitenkreisen liegen auf den Seiten des Mittelpunktdreiecks der Ankreise.

5) Die Verbindungslinien zweier auf den Verlängerungen der Seiten des gegebenen Dreiecks liegenden Berührungspunkte der Ankreise gehen durch die beiden Berührungspunkte eines grösseren Berührungskreises.

6) Diese Verbindungslinien (Nr. 5.) verlängert bilden ein Dreieck, dessen Umkreis den Durchschnittspunkt der Höhenlothe des gegebenen Dreiecks zum Mittelpunkt hat.

7) Die Höhenlothe des gegebenen Dreiecks gehen verlängert durch die Spitzen des Dreiecks Nr. 6.

8) Der Mittelpunkt des Inkreises des gegebenen Dreiecks ist Potenzcentrum für die kleineren Berührungskreise.

Diese wenigen Sätze mögen genügen, den grossen Reichthum von Wahrheiten, welche an dieser Figur sich auffinden lassen, anzudeuten. Nimmt man hiezu noch die Sätze über die Feuerbach'schen und Spieker'schen Kreise (Archiv Thl. LI. S. 10.) und andere bereits bekannte Sätze, so finden sich sicherlich noch eine Reihe von Wahrheiten, welche auf's Neue einen Beweis für die Unergründlichkeit des geometrischen Wissens abgeben.

Druckfehler.

S. 407. Z. 2. ist am Ende der Zeile vor Ω das Minuszeichen ausgefallen, so dass das letzte Glied $\sin(\omega_{n-1} - \Omega)$ heissen muss.

Literarischer Bericht
CCI.

Dr. Ludwig Oettinger,

Grossherzoglich Badischer Hofrath und ordentlicher Professor an der Universität zu Freiburg i. B. starb am 10. October 1869. Das „Archiv" verdankt demselben eine ziemliche Reihe sehr werthvoller Beiträge, und der unterzeichnete Herausgeber, dem er sich stets besonders freundlich erwiesen hat, wird ihm immer das dankbarste Andenken in seinem Herzen bewahren. Gewiss werden die Leser von dem nachfolgenden Necrologe des trefflichen Mannes, der zu unserer Freude uns gütigst mitgetheilt und von uns mit dem grössten Danke entgegen genommen worden ist, mit besonderem Interesse Kenntniss nehmen. G.

Am 10. October 1869 starb Hofrath Ludwig Oettinger, Professor der reinen und angewandten Mathematik an der Universität Freiburg.

Derselbe wurde am 7. Mai 1797 zu Edelfingen bei Mergentheim geboren. Nach seinen vorbereitenden Studien widmete er sich zu Heidelberg der Theologie und wurde im Jahre 1817 unter die Zahl der Pfarrcandidaten aufgenommen. Als solcher war er zuerst Vicar in Mundingen und Lörrach; an letzterem Orte zugleich Lehrer am Pädagogium. In dieser Eigenschaft wurde er unter dem 20. Dezember 1819 an die lateinische Schule in Durlach und am 6. August 1820 an das Gymnasium zu Heidelberg berufen, wo er schon im Jahre 1823 den Charakter als Professor erhielt und ausser den philologischen Fächern besonders Mathematik zu lehren hatte. In der Vorliebe für diese Wissenschaft

erwarb er den Doctorgrad und war neben seinem Lehramte noch Privatdocent an der Universität Heidelberg. Am 14. Januar 1836 wurde er als ordentlicher Professor der reinen und angewandten Mathematik auf den durch Professor Buzengeiger's Tod erledigten Lehrstuhl berufen. Diese Stellung hat er seitdem während 30 Jahren bekleidet. In den Jahren 1842 und 1843 trug er auch als Supplent die Physik vor.

In seiner Eigenschaft als akademischer Lehrer hat er mit dem grössten Erfolge gewirkt. Seine Vorlesungen über Algebra, Geometrie, politische Arithmetik, Mechanik, praktische Geometrie, sowie über Analysis, Differential- und Integral-Rechnung waren ihrer Klarheit und des wissenschaftlichen Gehaltes wegen beliebt.

Seine literarische Thätigkeit war die ausgebreitetste. Die ersten Producte derselben sind ein Lehrbuch des Differential- und Differenzen-Calculs, welches er noch in Heidelberg als Professor am Gymnasium schrieb, sowie ein Werk über die „aufsteigenden Funktionen“. (Berlin 1836.)

Seinen Vorlesungen legte er ein eigenes Lehrbuch der reinen Mathematik zu Grunde. (Freiburg 1837.)

Von seinen übrigen Werken ist besonders das Lehrbuch der politischen Arithmetik: „Anleitung zu finanziellen politischen und juridischen Rechnungen“ mit den weiteren Ausführungen der politischen Arithmetik (Greifswald 1863) in den weitesten Kreisen bekannt geworden.

Ausser zwei Lehrbüchern über Wahrscheinlichkeits-Rechnung und die Lehre von den Combinationen schrieb er über dieselben Gegenstände, sowie über Materien der Algebraischen Analysis, Zahlentheorie, Differential- und Integral-Rechnung zahlreiche Aufsätze in die Zeitschriften von Grunert und Crelle. Seine letzte Abhandlung in ersterer: über das Pell'sche Problem erschien in diesem Jahre. Seine letzte Abhandlung im Crelle'schen Journal findet sich im 67. Bande: über einige Probleme der Wahrscheinlichkeits-Rechnung u. s. w.

Der Verstorbene hat in den verschiedensten zum Theil auch ausserakademischen Würden und Aemtern, als Prorector, Decan, Wirthschafts-Rath, Inspector der Gewerbeschule, Kirchenältester u. s. w. das allgemeine Vertrauen welches er genoss stets befestigt. Insbesondere hat er sein warmes Interesse für die Universität bei jeder Gelegenheit bekundet. In Anerkennung seiner Verdienste wurde Oettinger vom Grossherzoge durch Ernen-

nung zum Hofrathe (1844) ausgezeichnet und im Jahre 1862 mit dem Ritterkreuze des Zähringer Löwen-Ordens geschmückt. Sein persönlicher Charakter war gerade, redlich, freundlich, gefällig, loyal im Verkehr mit seinen Collegen und in anderweitigen Beziehungen.

Er war immer rüstig und thätig bis kurz vor seinem Tode. Im Sommer dieses Jahres wurde er von einem leiblichen Uebel befallen, schien aber im Spätjahre wieder hergestellt zu sein. Mit Anfang October stellte sich jedoch eine plötzliche Erkrankung ein, die nach 10 Tagen seinen bedauernswerthen Tod zur Folge hatte.

Oettinger war zweimal verheirathet und hinterlässt seine Wittwe mit 3 Kindern, einem Sohn und zwei Töchtern, die ihn als liebevollen Familienvater betrauern. H. M.

Guglielmo Libri

geboren 1803 in Florenz, starb am 28. September 1869 auf einer Villa bei Florenz. Von 1830 bis 1840 in Frankreich lebend, war er als Generalinspector des öffentlichen Unterrichts, dann der Bibliotheken des Königreichs thätig, zugleich Mitglied des Instituts. Jeder kennt seine „Histoire des Mathématiques en Italie“. Wir wünschen sehr, dass man uns in den Stand setzen möge, durch einen ausführlicheren Necrolog diesem trefflichen — im Leben viel geprüften und angefeindeten — Mathematiker einen seinen grossen wissenschaftlichen Verdiensten würdigen Nachruf widmen zu können.

Eine grossartige Mystification

ist die Ueberschrift eines interessanten Artikels der „Allgemeinen Zeitung. Augsburg, Montag, 20. September 1869, Nr. 263“, auf welchen unsere Leser aufmerksam zu machen wir uns verpflichtet halten. Bekanntlich — auch in dem „Archiv“ ist davon einige Mal die Rede gewesen, z. B. in dem „Rapport fait à l'Académie Royale des sciences des Pays-Bas, Section Physique“ in Thl. XLIX. Nr. VII. S. 81, und auch in den Literarischen Berichten — hat Herr Chasles durch der Akademie der Wissenschaften in Paris vorgelegte Briefe die bis

jetzt allgemein anerkannten hohen Verdienste verschiedener grosser Mathematiker und Physiker, wie Newton's, Huygens's und Anderer, um die Wissenschaft in Zweifel zu ziehen, und zum Theil für andere Gelehrte in Anspruch zu nehmen gesucht. Die Aechtheit dieser Briefe ist vom Anfange an, namentlich auch von Mitgliedern der Pariser Akademie der Wissenschaften, wie z. B. von Herrn Leverrier, sehr stark bezweifelt, von Herrn Chasles bisher jedoch immer behauptet worden. Jetzt aber in der Sitzung der Akademie am 13. September 1869, hat Herr Chasles endlich mit einer von uns vollständig anerkannten und eines so hochverdienten, von uns aufrichtigst verehrten Gelehrten durchaus würdigen Offenheit die Erklärung abgegeben, dass er das beklagenswerthe Opfer einer nichtswürdigen Mystification, die in ihrer Grossartigkeit von keiner anderen übertroffen wird, geworden sei; zugleich hat derselbe ausführlich dargelegt, wie er nur mit den grössten Opfern in den Besitz jener Briefe, die von einem sehr geschickten, aber sehr gefährlichen Falsarius — noch wahrscheinlicher von einer ganzen sauberen Gesellschaft dieses Gelichters — fabricirt worden sind, gelangt sei.

Des Weiteren wegen müssen wir auf den obigen ausführlichen Artikel der „Allgemeinen Zeitung", der unseren deutschen Lesern am Leichtesten zugänglich sein wird, verweisen, und wollen nur noch bemerken, wie aufrichtig wir Herrn Chasles bedauern, und wie sehr wir aus dem Grunde unseres Herzens wünschen, dass die folgenden Schlussworte jenes Artikels:

„Der greise Michel Chasles wird seine Enttäuschung schwerlich lange überleben; denn als er seine Erklärungen abgab, erschien er gebrochen und wie vernichtet. Er wird in jedem Sinne das Opfer dieses grossartigen Betrugs sein"

noch auf lange Zeit hin nicht zur Wahrheit werden mögen. Herr Chasles hat Verdienste genug, um im Hinblick auf dieselben vollständig Trost finden zu können. Möge ihm vergönnt sein noch recht viele Jahre im Dienste der Wissenschaft in der bisherigen grossartigen Weise zu wirken!

Grunert.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Intorno alla vita ed alle opere di Luigi Lagrange, Discorso letto nel R. Liceo Galilei di Pisa, per la festa letteraria commemorativa dal **Cav. Angelo Forti**, Professore di Matematiche al R. Liceo, e di Matematiche e Meccanica alle scuole tecniche comunali di Pisa. Seconda edizione accresciuta di nuove notizie. Roma. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. Via Lata No. 211 A. MDCCCLXIX. 8.

Die erste Auflage dieser trefflichen Schrift des Herrn Professor A. Forti in Pisa ist von uns im Literarischen Berichte Nr. CLXXXXI. S. 7. angezeigt worden, und wir freuen uns sehr, schon jetzt eine zweite Auflage derselben hier anzeigen zu können. Diese neue Auflage wird mit vollem Recht auf dem Titel als „edizione accresciuta di nuove notizie" bezeichnet, welche Bereicherungen wir natürlich hier nicht sämmtlich näher angeben können. Jedoch wollen wir nicht unterlassen zu bemerken, dass auf S. 16 ff. sehr dankenswerthe und interessante Mittheilungen über Euler's Weggang von Berlin nach Petersburg (1766) und Lagrange's Berufung dahin, sowie über dessen Aufenthalt daselbst, gemacht werden, die wir unseren Lesern recht sehr empfehlen. Ferner sind der Schrift drei sehr lesenswerthe Noten beigefügt. Nota 1ª betrifft den im Archiv Theil XLIX. Nr. XVI. S. 223. von uns mitgetheilten Brief des jungen Lagrange an den Conte Fagnano und dessen Inhalt; Nota 2ª betrifft Mossotti's Vereinfachungen der bekannten Formeln Lagrange's zur Berechnung der Cometenbahnen, mit Bezug auf Schiaparelli's bekannte wichtige Entwickelungen und Untersuchungen über die Sternschnuppen; endlich ist Nota 3ª überschrieben: „Notizie intorno alla malattia e alla morte di Lagrange, e all' auttossia e imbalsamazione del suo corpo" worin vieles Interessante enthalten ist. Wie sehr Italien seine grossen Männer zu ehren bemüht ist, haben wir von Neuem mit dem grössten Interesse aus der folgenden auf pag. 21 sich findenden Notiz entnommen, nach welcher auch dem grossen Mathematiker u. s. w. Mossotti in Pisa ein Denkmal errichtet worden ist: „Il monumento del Mossotti, opera del Cav. Giovanni Dupré, fu eretto a Pisa il di 16 Giugno 1867 nel Camposanto urbano. Simboleggia l'Astronomia in atto di pensare. L'elogio era pronunziato dal dotto Prof. De Benedetti, collega e concittadino dell' illustre scienziato, alla presenza delle Autorità, del Municipio,

dei Presidenti del Senato e della Camera dei Deputati, e di grandissimo concorso di Professori, di allievi e di persone di ogni classe. L'epigrafe, dettata dal Senatore Centofanti e il Corpus conditum dal Cav. Prof. Ferrucci, rammentano col loro stile, il bel secolo della letteratura italiana."

Geometrie.

Sur le calcul des équipollences, méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis. Par M. J. Hoüel, Professeur de Mathématiques à la Faculté des sciences de Bordeaux. Paris. Gauthier-Villars. 1869. 8°.

Herr Professor Giusto Bellavitis in Padua hat schon vor einer Reihe von Jahren eine neue sinnreiche Methode für analytisch-geometrische Untersuchungen bekannt gemacht, welche weniger Beachtung gefunden zu haben scheint als sie jedenfalls verdient. Herr Hoüel hat sich daher ein neues sehr anerkennungswerthes Verdienst erworben, indem er in der vorliegenden sehr zur Beachtung zu empfehlenden Schrift diese Methode des in vielen Beziehungen hochverdienten Herrn Bellavitis den Mathematikern wieder in Erinnerung gebracht, zur Beachtung empfohlen, und ihre Anwendung an einer ziemlich grossen Anzahl sehr lehrreicher Beispiele erläutert hat. Wir müssen uns hier begnügen, nachstehend Das unseren Lesern mitzutheilen, was der Herr Verfasser auf pag. 5. zur Empfehlung dieser neuen méthode des équipollences sagt:

„La méthode des équipollences se distingue principalement par les avantages suivants: 1°. L'abondance des théorèmes, qui découlent d'un principe unique, toute propriété de points placés en ligne droite donnant immédiatement une propriété des points d'un plan, dès que l'on change les équations relatives aux premiers points en équipollences relatives aux seconds; 2°. La facilité avec laquelle on parvient à la solution graphique des problèmes: pour les questions mêmes qui passent pour difficiles, la méthode fournit directement des solutions plus courtes que celles que l'on avait découvertes par des combinaisons artificielles de théorèmes géométriques; 3°. La théorie des courbes, débarrassée de tout système spécial de coordonnées, conduit à des formules plus simples et en même temps plus générales, qui expriment les affections des courbes, sans qu'il soit besoin de les rapporter à

aucun système arbitraire; 4°. Elle fournit le type réel des quantités imaginaires, par lequel sont pleinement justifiés les calculs de l'Algèbre, de la manière que Cauchy regardait comme la seule satisfaisante."

Indem wir unsere vollkommene Uebereinstimmung hiermit aussprechen, empfehlen wir die Schrift nochmals zu sorgfältigster Beachtung.

Physik.

Sechszehn mathematisch-physikalische Probleme. Ein Ergänzungsheft zum Leitfaden der Physik an Realschulen und ähnlichen höheren Lehranstalten. Nebst einem Anhange, enthaltend 102 Aufgaben und deren Resultate. Von Dr. Gustav Emsmann, Oberlehrer an der Realschule erster Ordnung zu Frankfurt a. d. Oder. Mit einer Figurentafel. Leipzig. Quandt und Händel. 1869. 8°.

Wie schon der Titel besagt, verfolgt diese Schrift einen doppelten Zweck: Einmal sucht dieselbe den physikalischen Unterricht, so wie derselbe auf Grundlage der gangbaren physikalischen Lehrbücher gewöhnlich ertheilt wird, durch verschiedene, vorzugsweise einer elementar-mathematischen Behandlung fähige und dieselbe auch — wenn wahre Gründlichkeit erstrebt und erreicht werden soll — nothwendig für sich in Anspruch nehmende Lehren zu vervollständigen; dann aber auch durch Mittheilung einer grösseren Anzahl von Uebungsaufgaben, die gleichfalls hauptsächlich eine mathematische Behandlung beanspruchen, denjenigen Lehrern zu nützen und in ihren sehr löblichen Bestrebungen förderlich zu werden, welche wie zu unserer Freude der Herr Verfasser — dem wir dafür unsere besondere Anerkennung zollen — den Hauptzweck und Hauptnutzen des physikalischen Unterrichts für die allgemeine geistige Ausbildung der Schüler in einer strengen elementar-mathematischen Behandlung der dazu sich eignenden und dieselbe für sich in Anspruch nehmenden Lehren der Physik erkennen, ohne dabei das Experiment, bei richtiger Auffassung seines Werthes und Dem entsprechender Handhabung desselben, irgendwie zu vernachlässigen. In beiden Beziehungen können wir dem Herrn Verfasser unsere volle Anerkennung nicht versagen. In der ersten Abtheilung ist nach unserer Ansicht eine durchaus zweckmässige Auswahl der betreffenden Lehren getroffen, und die mathematische Behandlung bewegt sich im Allgemeinen ganz in

dem Kreise, welcher hier allein maassgebend und zulässig sein konnte, wenn wir auch nicht unterlassen können, die Frage aufzuwerfen: ob es in einem Buche wie das vorliegende ganz zweckmässig war, bei der Bestimmung einiger Minima, wie z. B. bei der Minimal-Ablenkung des Lichts u. s. w., die gewöhnlichen Regeln der Differenzialrechnung in Anwendung zu bringen, da sich diese Bestimmungen auch würden auf elementarem Wege haben geben lassen; natürlich kann man diese Frage aus verschiedenen Gesichtspunkten beantworten, indem es sich dabei immer darum handeln wird, welche Vorkenntnisse man voraussetzen kann und will. Von unserem Standpunkte aus würden wir einer mehr elementaren, d. h. die allgemeinen Regeln der Differentialrechnung nicht in Anwendung bringenden Behandlung den Vorzug gegeben haben. — Die Uebungsaufgaben der zweiten, Anhang bezeichneten Abtheilung, halten wir gleichfalls für durchgängig zweckentsprechend gewählt.

Hiernach glauben wir dieses Buch, welches zur Förderung gründlichen und bildenden physikalischen Unterrichts gewiss sehr geeignet ist, aus vollkommenster Ueberzeugung zur sorgfältigsten Beachtung und zum fleissigsten Gebrauche empfehlen zu können, und müssen uns im Uebrigen mit der folgenden Angabe des Hauptinhalts begnügen: I. Aus der Lehre von der Wärme. 1. Thermometer-Correction. 2. Specifische Wärme. 3. Latente Wärme. — II. Aus der Lehre vom Magnetismus und von der Electricität. 4. Declination der Magnetnadel. 5. Das Ohm'sche Gesetz und die Constanten galvanischer Rheomotoren. — III. Aus der Optik. 6. Die Minimal-Ablenkung des Lichts beim Durchgange durch ein Prisma. 7. Der Brechungsexponent. 8. Discussion der Formel $\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{f}$. 9. Newton'sche Ringe. 10. Die Dämmerung. — IV. Aus der Mechanik. 11. Das Kräfte-Parallelepiped. 12. Das physische Pendel. 13. Die Verminderung der Schwere durch die Rotation der Erde. 14. Die Archimedische Aufgabe. 15. Das barometrische Höhenmessen. 16. Die Grösse der Verdünnung der Luft durch die Luftpumpe. — Anhang. 102 Aufgaben und deren Resultate.

Anleitung zur Anstellung meteorologischer Beobachtungen und Sammlung von Hilfstafeln mit besonderer Rücksicht auf die meteorologischen Stationen in Oesterreich und Ungarn. Von Dr. Carl Jelinek, Director der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie

und Erdmagnetismus u. s. w. u. s. w. Wien. Druck der kaiserlich-königlichen Hof- und Staatsdruckerei. 1869. 8°.

Die in drei Auflagen erschienene „Anleitung zu den meteorologischen Beobachtungen in der österreichischen Monarchie“ von dem trefflichen, der Wissenschaft leider zu früh entrissenen Kreil ist vollständig vergriffen worden, wodurch zunächst der Herr Verfasser zu der Herausgabe der vorliegenden Schrift veranlasst wurde, welche man aber keineswegs als eine blosse neue Ausgabe des vorerwähnten Kreil'schen Buchs, sondern als ein ganz neues durchaus selbstständiges Werk zu betrachten hat. Zugleich beschränkt sich dasselbe nicht allein auf eine Anleitung zur Anstellung meteorologischer Beobachtungen, sondern ertheilt auch überaus lehrreiche Auskunft über die am häufigsten vorkommenden Fragen der praktischen Meteorologie, und kann daher in vielen Beziehungen die Stelle eines meteorologischen Lehrbuchs sehr zweckmässig vertreten, wodurch jeder mit meteorologischen Studien sich Beschäftigende dem Herrn Verfasser sich zu besonderem Danke verpflichtet fühlen wird. Ausserdem hat man wohl zu beachten, dass das Werk keineswegs bloss das österreichische meteorologische Beobachtungssystem — wenn dasselbe auch als eines der trefflichsten Muster angesehen werden kann, und als ein solches auch allgemein anerkannt wird, weshalb ihm auch hier mit Recht besondere Beachtung geschenkt worden ist, — berücksichtigt und in's Auge fasst, sondern so allgemein gehalten ist, dass es für jeden Beobachter der lehrreichste und trefflichste Wegweiser bei seinen Bestrebungen ist, welchem wir einen besseren gegenwärtig in der That nicht an die Seite zu stellen wüssten. Die Instrumente sind ausführlich beschrieben, durch sehr saubere Holzschnitte erläutert, ihre beste Beobachtungsart ist gelehrt und den anzubringenden Correctionen ist überall die sorgfältigste Rechnung getragen worden. Endlich ist eine sehr reichhaltige, wenig zu wünschen übrig lassende Sammlung von Hülfstafeln beigefügt, in welcher auch der in Oesterreich und Ungarn in kurzer Zeit bevorstehende Uebergang zum metrischen Systeme sorgfältige Berücksichtigung gefunden hat, was natürlich auch für die künftigen allgemein deutschen Verhältnisse von nicht geringer Bedeutung ist.

Möge die ausgezeichnete und ungemein nützliche Schrift sich recht ausgebreiteter Beachtung erfreuen!

Vermischte Schriften.

Tidskrift för Matematik och Fysik, tillegnad den svenska Elementar-Undervisningen, utgifven af D:R. Göran Dillner, Adjunkt i Matematik vid Upsala Akademi (Hufvudredaktör); D:R. Frans W. Hultman, Lektor vid Stockholms högre Elementar-Läroverk, D:R. T. Robert Thalén. Adjunkt i Fysik vid Upsala Akademi. Upsala, W. Schultz' Boktryckeri. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXXXVII. S. 13.)

Bis Andra Årgången. Häftet 2. Mars 1869 ist diese sehr verdienstliche Zeitschrift am vorher genannten Orte von uns angezeigt worden; jetzt haben wir über die uns vorliegenden neuen Hefte: Andra Årgången. Häft. 3. 4. Mai—Juli 1869 und Häft. 5. September 1869, so weit es hier der Raum erlaubt, zu berichten.

Herr Hultman hat seine verdienstliche Geschichte der Arithmetik in Schweden fortgesetzt; eben so Herr G. Dillner seine sehr zur Beachtung zu empfehlende Abhandlung über den geometrischen Calcul oder den Calcul mit geometrischen Grössen, auf die wir unsere Leser schon früher mehrfach aufmerksam gemacht haben und dies hier von Neuem thun; auch seine Abhandlung über die Berechnung der Leibrenten hat Herr Hultman weiter fortgeführt. Ferner begegnen wir einem lesenswerthen Aufsatze über integrirende Factoren von einem Ungenannten, und einer zu beachtenden Abhandlung über die elementare Lösung von Aufgaben über die Maxima und Minima von Herrn Lars Phragmén; sowie einem Beweise der Formel

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{f(a+h)-f(a)}=\frac{F'(a+\lambda h)}{f'(a+\lambda h)}$$

von Herrn D—g (Daug). Besonders aufmerksam machen wir auch auf eine Abhandlung von Herrn Lector Lindman über in und um eine Ellipse beschriebene gradlinige Figuren. Wie alle früheren Hefte enthalten auch die vorliegenden eine ziemlich grosse Anzahl bemerkenswerther Sätze und Aufgaben, bewiesen und aufgelöst von verschiedenen Verfassern, zum Theil Schülern schwedischer Lehranstalten, über die wir natürlich hier in's Einzelne nicht eingehen können; ferner Aufgaben, welche bei den auf den letzteren stattgefundenen Prüfungen gegeben worden sind; Beurtheilungen und Anzeigen von Büchern u. s. w. — Aus dem Gebiete der Physik finden wir einen lesenswerthen Aufsatz über die verschie-

denen Erfindungen und Arbeiten Léon Foucault's von Herrn R. Thalén; ferner einen beachtenswerthen Aufsatz über die constructive Bestimmung der Acceleration in verschiedenen Fällen von Herrn G. Dillner.

Möge diese verdienstliche Zeitschrift immer den ununterbrochensten Fortgang haben!

Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da F. Brioschi e L. Cremona (Presso il R. Istituto Tecnico Superiore di Milano) in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal prof. Tortolini. 4°. (S. Liter. Ber. Nr. CLXXXXVIII. S. 12. wo es statt „de Milano" heissen muss „di Milano").

Serie II^a. Tomo II°. Fascicolo 4°. (Giugno 1869.). — Codazzi: Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio (Memoria 3^a.). p. 269. — Lipschitz: Disamina della possibilità d'integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie. p. 288. — Casey: Recherche des équations des couples de quadriques inscrites dans une quadrique donnée et tangentes à quatre quadriques inscrites aussi dans la même quadrique. p. 303. — Smith: Observatio geometrica. p. 318. — Jordan: Mémoires sur les groupes de mouvements (continuazione e fine). p. 322. — Gordan: Applicazione di alcuni risultati contenuti nella Memoria „Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie del 5° e del 6° grado" agli integrali iperellittici. p. 346.

Serie II^a. Tomo III°. Fascicolo 1°. (Ottobre 1869.). Casorati: Le relazioni fondamentali tra i moduli di periodicità degli integrali abeliani di prima specie. p. 1. — Sturm: Combien y a-t-il de sécantes communes à deux cubiques gauches? p. 28. — Brill: Sul problema della rotazione dei corpi. p. 33. — Schramm: Les invariants et les covariants, en qualité de critères pour les racines d'une équation. p. 41. — Aoust: Théorie des coordonnées curvilignes quelconques. p. 55. — Roberts: Sur les fonctions abéliennes. p. 70. — Hermite: Sur l'expression du module des transcendantes elliptiques en fonction du quotient des deux periodes. — Sur l'intégrale $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{(a-x)}\sqrt{1-x^2}}$. — Sur la transcendante E_n. p. 83. — Matthiessen: De aequilibrii figuris et revolutione homogeneorum annulorum sidereorum sine corpore centrali atque de mutatione earum per expansionem aut condensationem. p. 84.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CLXXXXVIII. S. 12.).

Maggio e Giugno 1869. Del concetto di funzione nell' insegnamento della Geometria elementare; per D. Besso. p. 131. — Annunzio Bibliografico. p. 136. — Memoria sull' attrazione degli sferoidi; per R. del Grosso. p. 137. — Determinazione analitica dei centri di pressione delle superficie immerse in un liquido omogeneo pesante; per A. M. Bustelli. p. 152. — Lezioni sulla Termodinamia; per M. Zannotti. p. 160. — Sulla locale dei centri delle coniche che toccano due rette e passano per due punti; per G. de Rossi. p. 174. — Sopra una quistione proposta nel giornale di Terquem; per G. Mirabello. p. 176. — Nuova soluzione generale in numeri razionali dell' equazione $w^2 = a + bv + cv^2$ per L. Calzolari. p. 177.

Luglio e Agosto 1869. Memoria sull' attrazione degli sferoidi; per R. del Grosso (Cont. Vedi. pag. 151.). p. 193. — Sull' integrale $\int_0^\beta \frac{\operatorname{sen}^m x}{x} dx$; per D. Besso. p. 210. — Determinazione analitica dei centri di pressione delle superficie immerse in un liquido omogeneo pesante; per A. M. Bustelli. (Cont. e fine Vedi pag. 159.). p. 213. — Articolo Bibliografico. p. 221. — Relazione sulle Lezioni complementari date nell' Ist. tec. superiore a Milano, per A. Armenante e G. Jung. p. 224. — Sulle trasformazioni birazionali o univoche (eindeutichen), e sulle curve normale e subnormale del genere p; per G. Jung ed A. Armenante. p. 235. — Sopra due questioni del Salmon nel trattato delle coniche; per un anonimo; p. 254. — Soluzione delle quistione 48; per V. Eugenio. p. 256.

Literarischer Bericht
CCII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. Roma 1869. 4°. (Vergl. Liter. Ber. Nr. CLXXXXVIII. S. 6.).

Tomo II. Febbraio 1869. Dieses Heft enthält zuerst auf S. 33. bis S. 95. die Fortsetzung und den Schluss der im vorhergehenden Hefte (Gennaio 1869, s. a. a. S. 7.) angefangenen höchst verdienstlichen und interessanten Lebensbeschreibung A. Cauchy's von Herrn Boncompagni, durch deren Veröffentlichung sich derselbe jedenfalls ein sehr grosses Verdienst erworben hat, da das aus zwei Theilen bestehende grosse Werk von Herrn C. A. Valson doch für viele Mathematiker nicht leicht zugänglich und zu umfangreich sein wird. — Ferner enthält dieses Heft auf S. 96. bis S. 102. ein von Herrn E. Narducci verfasstes sehr verdienstliches vollständiges Verzeichniss aller in acht periodischen Schriften enthaltenen Schriften Cauchy's unter dem Titel: „Indicazione degli scritti di Agostino Cauchy contenuti in otto Raccolte scientifiche", freilich ohne Angabe der Titel, aber nach der Zeitfolge geordnet und mit genauer Hinweisung auf die Werke, in denen dieselben sich finden; über die Titel und den Inhalt enthält die Lebensbeschreibung selbst genügende Nachweisungen. — Den Schluss dieses Hefts bilden sehr vollständige „Annunzi di recenti pubblicazioni" auf S. 103. bis S. 118.

Tomo II. Marzo 1869. Intorno alla vita ed agli scritti di Francesco Woepcke. Nota di Enrico Narducci. p. 119. Eine

interessante Lebensbeschreibung unseres Landsmanns, welche auch vielfach Bezug nimmt auf den Artikel im Archiv, Thl. XLII. Literarischer Bericht Nr. CLXV.

Tomo II. Aprile 1869. Intorno all' opera d'Albiruni sull' India. Nota di B. Boncompagni. p. 153. — Annunzi di recenti pubblicazioni. p. 207.

Tomo II. Maggio 1869. Notice historique sur la vie et les travaux de Nicolas Ivanovitch Lobatchefsky. Discours prononcé dans la séance solennelle de l'Université Impériale de Kazan, le $\frac{5}{17}$ Novembre 1868. Par E. Janichefsky. Traduit du Russe par A. Potocki. p. 223. So verdienstlich und in vielen Beziehungen höchst interessant auch diese Biographie Lobatchefsky's ist, so müssen wir doch bemerken, dass dieselbe — ihrem amtlichen Zwecke jedenfalls vollkommen entsprechend — mehr das Wirken Lobatchefsky's als Lehrer und Beamter, als seine grossen wissenschaftlichen Verdienste als Schriftsteller u. s. w. in's Auge fasst. Jedenfalls aber liefert dieselbe ein höchst interessantes Charakterbild des trefflichen, früher nicht nach Verdienst gewürdigten Mannes in der angegebenen Beziehung.

Tomo II. Giugno 1869. Notice sur la vie et les travaux de Jean Baptiste Brasseur. Par M. Alphonse le Roy. p. 263. (Weit eingehender und ausführlicher als unser freilich nur vorläufiger Artikel im Liter. Ber. Nr. CLXXXXVI. p. 1. mit einem vollständigen Verzeichniss der Schriften Brasseur's, und schon deshalb zur Beachtung sehr zu empfehlen.). — Intorno ad uno scritto del Sig. Prof. Placido Tardy. B. Boncompagni. p. 273. — Intorno ad una formola del Leibniz, Articolo estratto dal volume intitolato: Monatsbericht der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1868 u. s. w. Berlin u. s. w. 1869. pag. 623—625. Sessione de 3 Dicembre 1868. Traduzione del Sig. Filippo Keller. p. 275. — Sur quelques passages des lettres de Leibniz relatifs aux différentielles à indice quelconque. Note de M. Ch. G. Borchardt. p. 277. — Corso elementare completo di Matematiche pure per Agostino Farnocchia delle scuole pie. Roma. Tipografia di G. Aureli. Piazza Borghese Nr. 89. 1868—69. P. N. Mancini d. C. d. G. p. 279. — Annunzi di recenti pubblicazioni. p. 283.

Arithmetik.

J. J. von Littrow's Handbuch zur Umrechnung der vorzüglichsten Münzen, Masse und Gewichte aller Länder in österreichisch-ungarische, metrische und andere Einheiten. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage. Herausgegeben von Karl von Littrow, Director der k. k. Sternwarte in Wien u. s. w. Wien, F. Beck's Verlagsbuchhandlung. 1870. 8⁰. *)

Dieses Handbuch ist uns erst in seiner vorliegenden neuesten vierten Auflage bekannt geworden; unter allen Büchern dieser Art, die wir kennen, ist uns aber das vorliegende als das vollständigste und als das am einfachsten und bequemsten eingerichtete erschienen. Die Maasse, Münzen und Gewichte sind in Tabellen einfach alphabetisch oder lexicographisch geordnet, so dass jedes beliebige Maass ohne alle Mühe sogleich aufgefunden werden kann, und unmittelbar neben dem Namen findet man den Ausdruck in der zur Reduction zu Grunde gelegten Fundamental-Einheit, wobei der Herr Verfasser sich mit Recht fast überall der Decimalbrüche bedient und in der Anzahl der beibehaltenen Decimalbruchstellen überall so weit gegangen ist, als es die bei praktischen Anwendungen zu erreichende und erreichbare Genauigkeit irgend erfordern dürfte, wobei nach unserer Meinung durchgehends das richtige Maass getroffen worden ist. Das Buch besteht aus den folgenden durch den Gegenstand selbst gegebenen Hauptabtheilungen: **Münzen**. — **Längenmasse**. — **Flächenmasse**. — **Körpermasse**. a) für trockene Gegenstände; b) für flüssige Gegenstände. — **Gewichte**. — Jeder Abtheilung ist eine sehr lehrreiche allgemeine Einleitung vorangeschickt, welche Alles enthält, was rücksichtlich der Natur des betreffenden Maasses im Allgemeinen zu wissen nöthig sein dürfte, mit sehr genauer — meistens auf eine ziemlich grosse Anzahl von Decimalstellen fortgeführter — Angabe aller nöthigen Reductionszahlen, so dass wir in der That auch rücksichtlich der genauen Kenntniss der allgemeinen Natur der verschiedenen Maasse keinen besseren Rathgeber kennen als den vorliegenden.

Die Münzen sind sämmtlich auf die Oesterreichische Währung reducirt mit Beibehaltung — was bei den Münzen jedenfalls

---

*) Wegen Mangels einer geeigneteren Rubrik ist diese Schrift hierher gestellt worden.

vollständig hinreicht — der ersten Decimalstelle in den Kreuzern, wobei wir die Reduction auf die österreichische Währung unbedingt für sehr zweckmässig halten und darin keine Beinträchtigung der Münzen anderer Länder finden, da die österreichische Währung jetzt so bequem und die Vergleichung der meisten anderen vorzugsweise gangbaren Münzen mit ihr so leicht ist. Schlagen wir z. B. die Benennung **Thaler** auf, so finden wir auf S. 46 bis S. 48 eine grosse Anzahl verschiedener Thaler und darunter gleich zu Anfang:

	Oesterr. Währ. fl.	kr.
Thaler, Vereins-, 30- oder 14-Thalerfuss, Preussen	1	50.0

Schlagen wir umgekehrt die Benennung **Gulden** auf, so finden wir wieder auf S. 20. bis S. 22. eine sehr grosse Anzahl verschiedener Gulden, und darunter u. A.:

	Oesterr. Währ. fl.	kr.
Gulden österr. Währung, 45-Guldenfuss . .	1	—
„ süddeutsch. od. Zollvereins-Währung, $24\frac{1}{2}$- od. $52\frac{1}{2}$-Guldenfuss u. s. w. . .	—	85.7

Bei den Längenmaassen, u. s. w. und den Gewichten sind überall neben den Vergleichungszahlen mit den österreichischen Maassen mit Recht auch die metrischen Zahlen angegeben, und die Anzahl der beibehaltenen Decimalstellen ist eine grössere als bei den Münzen. So finden wir z. B.:

	W. Fuss.	W. Zoll.	W. Lin.	W. Fuss.	Meter.
Ruthe, Preussen, rheinl. Ruthe zu 12 Fuss . .	11	10	$11\frac{3}{4}$	11.915	3.766

und:

Wiener Handels-Gewicht.

	Pfund.	Loth.	Quentch	Pfund.	Kilogr.
Pfund, Altes Berliner Handels-Gewicht	—	26	$2\frac{2}{3}\frac{2}{2}$	0.8352	0.4677

Bei der grossen Wichtigkeit, welche gegenwärtig eine genaue Kenntniss des gesammten Maass-, Münz- und Gewichtswesens nicht bloss für das sociale Leben, sondern auch insbesondere für den Schulunterricht hat, haben wir es für nothwendig gehalten, über das vorliegende, nach unserer Meinung in hohem Grade zu empfehlende Buch etwas genauer und eingehender zu referiren, und wünschen sehr, dadurch dazu beizutragen, dass dasselbe die so sehr verdiente Beachtung in den weitesten Kreisen finden möge.

Schliesslich benutzen wir diese Gelegenheit, ein Paar Druckfehler, auf welche wir gütigst aufmerksam gemacht worden sind, hier nachstehend mitzutheilen:

Seite	72	—	Dessetine	lies	109.23	statt	1.092,
„	„	—	Dscherib	„	320	„	11.5,
„	„	—	„	„	11.5	„	320,
„	73	—	Jauchart	„	1117	„	117.

Geodäsie.

Elemente der Vermessungskunde von Dr. Carl Maximilian Bauernfeind, Professor an der königl. polytechnischen Schule in München. Dritte Auflage. Erste Abtheilung. Stuttgart. Verlag der J. G. Cotta'schen Buchhandlung. 1869. 8°.

Die zweite Auflage dieses von uns dringend empfohlenen, jedenfalls sehr ausgezeichneten Werkes haben wir im Literar. Ber. Nr. CLVI. S. 5. angezeigt, und es macht uns grosse Freude, unsere Leser jetzt auf die vor uns liegende so eben in schönster äusserer Ausstattung erschienene dritte Auflage der ersten Abtheilung aufmerksam machen zu können. Weiterer Empfehlung von unserer Seite bedarf das treffliche Werk nicht; auch ist seine Einrichtung in dieser dritten Auflage im Allgemeinen ganz unverändert geblieben, an verschiedenen einzelnen sehr beachtenswerthen neuen Zusätzen fehlt es aber keineswegs, so wie denn u. A. neben den Heliotropen von Gauss, Steinheil und dem Hilfsheliotrop von Stierlin, in §. 101. auch das Heliotrop von Baeyer ausführliche Beachtung gefunden hat, ferner weiter unten die neuere Einrichtung des Prismenkreuzes aufgenommen worden ist, u. s. w. Wir wünschen sehr, dass dieses ausgezeichnete Werk auch in seiner neuesten Auflage wie bisher unausgesetzt zur weiteren Ausbildung der Geodäsie und zur Förderung der Genauigkeit der geodätischen Arbeiten beitragen möge. Bei dem Erscheinen der dritten Auflage der zweiten Abtheilung werden wir auf das Werk zurückkommen.

Astronomie.

Kalender für alle Stände. 1870. Herausgegeben von Karl v. Littrow, Director der k. k. Sternwarte in Wien. Mit einer Sternkarte. Wien. Carl Gerold's Sohn. 8°.

Wir freuen uns das Erscheinen dieser von uns früher schon oftmals auch Lehrern zur Beachtung empfohlenen sehr zweckmässig eingerichteten kleinen astronomischen Ephemeride für das Jahr 1870 anzeigen zu können. Die Einrichtung ist von der aus unseren früheren Anzeigen allgemein bekannten Einrichtung der vorhergehenden Jahrgänge durchaus nicht verschieden. Der wissenschaftliche Theil besteht aus folgenden Abtheilungen: I. Sternschnuppen und Kometen (sehr interessant mit besonderer Rücksicht auf Schiaparelli's neueste Arbeiten). — II. Anzahl der wahrnehmbaren Sterne, geschlossen aus dem Bonner Verzeichnisse. — III. Neue Planeten und Kometen. — IV. Astronomische Preisaufgabe. (Ausgeschrieben von der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien am 28. Mai 1869. Betrifft die Entdeckung neuer Kometen). — V. Uebersicht des Planetensystems (äusserst vollständig und genau.). — VI. Uebersicht der meteorologischen Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Wien im Jahre 1868. — Man sieht hieraus, wie beachtenswerth dieser Kalender auch rücksichtlich der Kenntniss der neueren astronomischen Entdeckungen ist.

Physik.

Die Naturkräfte. Eine naturwissenschaftliche Volksbibliothek, herausgegeben von einer Anzahl von Gelehrten. München, Verlag von R. A. Oldenburg. 8°.

Dieses äusserlich in Bezug auf Papier, Druck und Figuren in unübertreffbarer Weise ausgestattete Werk kommt nach unserer Meinung dem jetzt so allgemein verbreiteten rühmlichen Bestreben, die Naturwissenschaften zu popularisiren, trefflichst entgegen, und verdient dem ganzen gebildeten Publikum, insbesondere aber auch Lehrern, die vieles ihren Zwecken Dienende, ihren Unterricht Belebende und anziehender Machende darin finden

werden, recht sehr empfohlen zu werden. Nach der jetzigen Anlage sollen nach und nach zehn Abtheilungen erscheinen, nämlich:

Die Lehre vom Schall, von R. Radau in Paris.

Das Licht, von Professor Dr. Pisko in Wien.

Die Wärme, von Professor Cazin in Versailles.

Das Wasser, von Prof. Dr. Friedr. Pfaff in Erlangen.

Wind und Wetter, von Professsor Dr. Lommel in Erlangen.

Die Himmelskunde, von Professor Dr. Zech in Stuttgart.

Die Vulkane, von Professor Dr. Friedr. Pfaff in Erlangen.

Die Elektricität, von Professor Dr. Carl in München.

Der Magnetismus, von Professor Dr. Carl in München.

Der Zusammenhang der Naturkräfte, von Professor Dr. Reitlinger in Wien.

Die beiden ersten Abtheilungen sind bereits erschienen, und liegen unter folgenden Titeln uns vor:

Die Lehre vom Schall. Gemeinfassliche Darstellung der Akustik von R. Radau. Deutsche Originalausgabe. Mit 114 Holzschnitten. München. Verlag von R. A. Oldenburg. 1869. 8°.

Licht und Farbe. Eine gemeinfassliche Darstellung der Optik. Von Prof. Dr. Fr. Jos. Pisko in Wien. Mit 130 im Texte aufgenommenen Holzschnitten. München. Verlag von R. A. Oldenburg. 1869. 8°.

Wir gestehen, dass wir beide Schriften mit dem grössten Interesse und vielfacher eigener Belehrung gelesen haben, und wüssten in der That nicht, was wir demjenigen, der in den Reichen der Erscheinungen des Schalls und des Lichts sich in angenehmer, leicht belehrender und erheiternder Weise ergehen will, Besseres empfehlen sollten, als diese beiden Schriften, welche zugleich von der Vielseitigkeit und Gründlichkeit, womit ihre Verfasser die betreffenden Gegenstände in umfassendster Weise völlig beherrschen, das erfreulichste und schönste Zeugniss ablegen. Mögen sich daher unsere Leser diese Schriften, welche unbedingt als eine wahre Zierde der deutschen popularisirenden naturwissenschaftlichen Literatur zu betrachten sind, angelegentlichst empfohlen sein lassen.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Vergl. Literarischer Ber. Nr. CLXXXXIX. S. 8.

Band LVIII. Heft II. Schell: Allgemeine Theorie des Polarplanimeters. S. 189. — Weyr: Erweiterung des Satzes von Desargues nebst Anwendungen. (Mit 1 Tafel.). S. 223. — Haun: Zur Charakteristik der Winde des adriatischen Meeres. (Mit 1 Tafel.). S. 231. — Brücke: Ueber asymmetrische Strahlenbrechung im menschlichen Auge. (Mit 1 Tafel.). S. 321.

Band LVIII. Heft III. Schlesinger: Die projectivischen Flächen. (Ein Beitrag zur Gestaltung der darstellenden Geometrie im Sinne der neueren Geometrie.). S. 435. — Boltzmann: Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten. (Mit 1 Tafel.). S. 317. — Ditscheiner: Ueber eine neue Methode zur Untersuchung des reflectirten Lichts. (Mit 1 Tafel.). S. 361. — Loschmidt: Die Electricitätsbewegung im galvanischen Strome. S. 596. — Exner: Ueber die zu einer Gesichtswahrnehmung nöthige Zeit. (Mit 2 Tafeln und 3 Holzschnitten.). S. 601. — Weyr: Zur Erzeugung der Curven dritter Ordnung. (Mit 1 Holzschnitt.). S. 633. — Schlesinger; Darstellung der Collinear-Projectionen und projectivischen Grundgesetze in einer für die descriptive Geometrie geeigneten Form. (Ein Beitrag zur Gestaltung der darstellenden Geometrie im Sinne der neueren Geometrie.). — (Mit 1 Tafel.). S. 658. — Oppolzer (S. 677.), Weiss (S. 797.), Riba (S. 721.): Berichte der zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss des Jahres 1868 nach Aden unternommenen österreichischen Expedition. (Sehr interessant und vielfach wichtig. G.).

Band LVIII. Heft IV. Mach: Beobachtungen über monoculare Stereoskopie. (Mit 6 Holzschnitten.). S. 731. — Oppolzer: Berichte der zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss des Jahres 1868 nach Aden unternommenen österreichischen Expedition. IV. Bericht: C. v. Littrow's Methode zur Zeitbestimmung durch Circummeridianhöhen in ihrer praktischen Anwendung. S. 772. — Staudigl: Anwendung der räumlichen Central- und Parallelprojection zur Lösung verschiedener, die Flächen zweiter Ordnung betreffender Probleme. (Mit 1 Tafel.). S. 811. — Niemtschik: Einfaches Verfahren, Normalen zu Flächen zweiter Ordnung durch ausserhalb liegende Punkte zu

ziehen. (Mit 1 Tafel.). S. 831. — Weiss: Berichte der zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss des Jahres 1868 nach Aden unternommenen österreichischen Expedition. V. Bericht: Beitrag zur Klimatologie von Aden. S. 882.

Band LVIII. Heft V. Staudigl: Durchführung verschiedener, die Curven zweiten Grades betreffenden Constructionen mit Hilfe von Kegel- und Cylinderflächen. (Mit 1 Tafel.). S. 960. — Winckler: Ueber die vollständigen Abel'schen Integrale. S. 976. — Boltzmann: Lösung eines mechanischen Problems. S. 1035. — Stolz: Ueber die Kriterien zur Unterscheidung der Maxima und Minima der Functionen mehrerer Veränderlicher. S. 1063.

Band LIX. Heft I. Handl: Theorie der Waagebarometer. (Mit 1 Holzschnitt.). S. 7. — Niemtschik: Ueber die Construction der Durchschnittspunkte von Kreisen und Kegelschnittslinien. (Mit 1 Tafel.). S. 39. — Pfaundler: Ueber eine neue Methode zur Bestimmung der Wärmecapacität der Flüssigkeiten. (Mit 1 Holzschnitt.). S. 145.

Band LIX. Heft II. Weyr: Construction des Krümmungskreises für Fusspunktcurven. (Mit 5 Holzschnitten.). S. 169. — Staudigl: Ellipsenconstructionen. (Mit 1 Tafel.). S. 177. — v. Obermayer: Versuche über einige Capillarerscheinungen. S. 207. — Jelinek: Fünftägige Wärmemittel für 88 Stationen bezogen auf den 20jährigen Zeitraum 1848—1867. S. 313. — Winckler: Ueber einige Gegenstände der elementaren Analysis. S. 356. — Loschmidt: Der zweite Satz der mechanischen Wärmetheorie. S. 395. — Unferdinger: Ueber die beiden allgemeinen Integrale:

$$\int x^n . \cos\{m \lg(a+bx)\}\, dx, \quad \int x^n . \sin\{m \lg(a+bx)\}\, dx$$

und einige verwandte Formen. S. 437. — Unferdinger: Die verschiedenen Darstellungen des Products

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)\ldots(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2+d_{n-1}^2)$$

als Summe von vier Quadraten. S. 455. — Unferdinger: Ueber die Kriterien der Theilbarkeit der Zahlen. S. 465.

Band LIX. Heft III. Militzer: Ueber die Bestimmung der Constanten eines galvanischen Elementes. S. 472. — Niemtschik: Ueber die Construction der Durchschnittspunkte zweier Kegelschnittslinien. (Mit 1 Tafel.). S. 481. — Winckler: Auszug aus der Abhandlung: „Der Rest der Taylor'schen Reihe." S. 533.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Liter. Ber. Nr. CCI. S. 12.).

Settembre e Ottobre 1869. Su talune serie, ed applicazione all' aritmetica; per C. Sardi. p. 257. — Soluzione generale dell' equazione $y^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$; per L. Calzolari. p. 313. — Ricerca dei valori razionali di v che rendono un quadrato il polinomio $a + bv + cv^2 + dv^3 + ev^4$; per L. Calzolari. p. 317.

Tidskrift för Matematik och Fysik, tillegnad den svenska Elementar-Undervisningen, utgifven af D:R. Göran Dillner, Adjunkt i Matematik vid Upsala Akademi (Hufvudredaktör); D:R. Frans W. Hultman, Lektor vid Stockholms högre Elementar-Läroverk, D:R. T. Rob. Thalén, Adjunkt i Fysik vid Upsala Akademi. Upsala, W. Schultz. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCI. S. 10.).

Andra Årgången. Häft 6. Dieses neue uns zugegangene Heft dieser verdienstlichen Zeitschrift enthält zuerst eine Elementare Lösung der von Herrn C. E. Lundström gegebenen und gelösten Aufgabe: In einen Kreis ein Dreieck von gegebenem Flächeninhalte zu beschreiben, dessen Umfang ein Maximum oder Minimum ist, von Herrn **Lars Phragmén** (S. 249); ferner einen Aufsatz über die Integration der Differentialgleichungen durch Substitution von Herrn **D—g.** (S. 253.); endlich eine grössere lesenswerthe Abhandlung über die Möglichkeit der Vorhersagung der Witterung von Herrn **R. Rubenson.** (S. 261.). — Ausserdem finden wir S. 298 bis S. 301. einen Necrolog des verdienten Carl Erik Lundström, geboren zu Hults in Ostergötland den 21sten August 1840. (S. 298); Anzeige von Schriften, und auf den schwedischen Lehranstalten gegebenen Prüfungsaufgaben.

Hiermit steht in Verbindung:

Bihang till Tidskrift för Matematik och Fysik. Lösning af Prisuppgiften för 1868. Af Elling Bolt Holst. — P. W. Almquist. — A. L. Bygdén och A. N. Lundström. Upsala 1869.

auf welche mehrfach interessante Schrift wir sowohl wegen der gegebenen Preisaufgabe selbst, als auch wegen deren Lösungen, wir unsere Leser recht sehr aufmerksam machen. Es ist die Aufgabe:

Ein Quadrat zu beschreiben, dessen Seiten (verlängert, wenn es nöthig ist) durch vier gegebene Punkte gehen.

Herr Professor G. Dostor in Paris hat uns gütigst fortlaufende Berichte über solche in Frankreich erscheinende periodische Schriften zugesagt, welche nicht allen Lesern des Archivs leicht und in kurzer Zeit zugänglich sind; mit der Mittheilung solcher Berichte, welche jederzeit besonders unterzeichnet sein werden, machen wir im Folgenden den Anfang, und hoffen dadurch unseren Lesern einen besonderen Dienst zu erweisen. G.

Annales du Conservatoire impérial des Arts et Métiers de Paris.

Publiées par les Professeurs.

Paris, Librairie polytechnique de J. Baudry 15, rue des Saints-Pères.

Chaque volume parait en quatre fascicules. Prix de l'abonnement par volume: 20 francs pour Paris, la France et la Belgique; 24 francs pour l'Etranger.

Le Conservatoire des Arts et Métiers de Paris est un grand centre d'instruction industrielle et agricole. Des cours publics et gratuits de sciences appliquées aux arts professionnels y sont ouverts avec libéralité aux nationaux et aux étrangers; ces cours constituent un enseignement libre, analogue à ceux de la Sorbonne, du Collége de France et du Jardin des Plantes.

L'enseignement du Conservatoire est le plus populaire qui soit en France; il est constitué avec toutes les ressources de la science, et se trouve naturellement initié à tous les développements de l'industrie; il en fait connaître la puissance et les progrès, répand les connaissances utiles et en guide avec sureté les applications.

Afin de multiplier les ressources que le Conservatoire offre à l'étude des sciences et des arts utiles, les Professeurs publient un Journal, qui est spécialement consacré aux applications de la science.

Les Annales du Conservatoire des Arts et Métiers ont commencé en 1861 et paraissent depuis cette époque, sans interruption et avec le même succès. Les articles y sont aussi variés que les applications elles-mêmes de la science. Parmi ceux de ces articles, qui peuvent intéresser les lecteurs de cette feuille, nous citerons principalement les suivants.

Tome premier, 1861.

E. Becquerel. — Recherches sur les piles voltaiques; détermination des coefficients relatifs aux piles en usage dans l'industrie; p. 257—355.

E. Becquerel. — Etudes sur la conductibilité des liquides dans les tubes capillaires; rhéostat destiné à la comparaison des grandes résistances; p. 733—754.

Boquillon. — Notice bibliographique sur les Oeuvres complètes de Galilée, publiées à Florence par MM. Alberi et Bianchi; p. 625—664.

Dehérain. — Etudes pour servir à l'histoire de la Chine. Découverte de la composition de l'eau; p. 394—448.

Faraday. — Sur l'éclairage des phares et sur la lumière électrique; p. 113—117.

De la Gournerie. — Notice sur le canal du Gange (Inde); p. 665—681.

Ch. Laboulaye. — Etude historique sur les théories de la chaleur; p. 55—108.

Ch. Laboulaye. — Chaleur spécifique des gaz et des vapeurs; p. 551—581.

F.-P. Leroux. — Etudes sur les machines électromagnétiques et magnéto-électriques; p. 582—604.

Tome II, 1862.

Boquillon. — Etude sur les horloges à pendule de Galilée et de Huygens; p. 183—216.

Joule. — Expériences à l'aide desquelles l'équivalent mécanique de la chaleur a été déterminé; p. 664—687.

Ch. Laboulaye. — Du choc entre les corps solides; Théorie du balancier; p. 373—415.

F. P. Leroux. — Note sur une nouvelle disposition propre à faciliter l'observation des aiguilles aimantées dans les instruments de précision; p. 416—420.

Général A. **Morin.** — Expériences sur les ventilateurs; pag. 257—321.

Tom Richard. — Note sur un nouveau principe de cinématique, sur son emploi et sur le théorème de Chasles; p. 157—174.

Tome III, 1862.

Aperçu général sur l'exposition universelle de Londres en 1862. — Articles divers par MM. H. **Tresca**, **Tylor**, **Payen**, **Dehérain**, **Chambrelant**, Eug. **Flachat**, **Morin**, **Paris**, E. **Becquerel**, **Boquillon**, V. **Trélat**, **Alcan**, **Salvétat**, Ch. **Laboulaye**, **Saint-Edme**.

Tome IV, 1863.

Bareswil. — Du papier à l'occasion de l'Exposition universelle de 1862; p. 57—63.

E. **Becquerel.** — Etudes sur la pyrométrie; mesure des hautes températures; p. 597—672.

Dehérain. — Etudes pour servir à l'histoire de la Chimie: découverte du Chlore; p. 282—336.

Ch. **Becquerel.** — De la constitution moléculaire des corps compatible avec la théorie mécanique de la chaleur; 1er article, p. 64—112; 2e article, p. 232—269.

Ch. **Becquerel.** — Discours de M. **Gladstone**, chancelier de l'Echiquier, prononcé à Bursheim (Staffordshire) pour la fondation de l'Institut Wedgwood; p. 465—488.

A. **Morin.** — Rapport à S. Exc. le ministre de l'agriculture, du commerce et des travaux publices, sur l'enseignement du Conservatoire des Arts et Metiers en 1862—63; p. 177—184.

Tome V, 1864.

Cazin. — Traité élémentaire des machines à air chaud. pag. 615—648.

Ch. Laboulaye. — Théorie mécanique de la chaleur (deuxième partie); p. 289—318.

Ch. Laboulaye. — Le planimètre polaire de M. Amsler (Schaffouse); p. 601—614.

Laussedat. — Ouverture du cours de géométrie appliquée aux arts au Conservatoire impérial des arts et metiers, le 15 janvier 1865; p. 423—442.

Morin. — Chauffage et ventilation des amphithéatres du Conservatoire des Arts et Métiers; p. 21—33.

Morin. — Expériences sur une cheminée en usage dans les casernes et les hôpitaux d'Angleterre; p. 180—197.

Morin. — Note sur un manomètre totalisateur à compteur électrique; p. 341—350.

Morin. — Note et documents sur l'hôpital d'accouchement de Saint-Pétersbourg; p. 502—522.

Morin. — Note sur le service de ventilation du Conservatoire pendant le trimestre d'hiver 1864—65; p. 523—531.

Tome VI, 1865—66.

De la Gournerie. — Note sur un modèle d'une surface réglée du troisième degré; p. 205—211.

Général A. **Morin.** — De l'utilité de l'application de la Géométrie aux courbes algébriques; p. 445—449.

Carl de Ott, professeur de Géométrie descriptive à l'Ecole supérieure réelle de Prague. — De la représentation graphique des courbes algébriques; p. 450—484.

Tome VII, 1866—67.

J. B. Baille. — Recherches sur les indices de réfraction (Mémoire couronné par l'Académie des sciences); p. 184—283.

De Jacobi. — Lecture publique faite au Conservatoire impérial des Arts et Métiers sur l'invention de la galvanoplastie; p. 541—556.

Tome VIII, 1868.

Morin. — Note sur le bureau de consultation des arts et métiers créé par la loi du 12 septembre 1791; p. 5—16.

Ordinaire de Lacologne. — Recherches théoriques et expérimentales sur le ventilateur à forces centrifuges; 1ère partie: ventilateurs sufflants, p. 71—161; 2e partie: ventilateurs aspirants, p. 161—206.

Morin. — Note sur l'enseignement technique en Angleterre; p. 314—319.

Morin. — Le Conservatoire impérial des Arts et Métiers, en 1849 et 1869; p. 321—333.

Laussedat. — Etude sur le développement de l'horlogerie dans le département du Doubs et en Suisse. — Ecole d'horlogerie de Besançon. — Observatoire de Neufchâtel; p. 334—337.

Morin. — De l'organisation à donner à l'enseignement technique en France; p. 428—

G. Dostor.

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut impérial de France, et imprimés par son ordre.

Sciences mathématiques et physiques.

Tome XVIII. Vol. in 4°; 779 pages; 17 planches.

Paris, Imprimérie impériale, MDCCCLXVIII.

Philips. — Mémoire sur le spiral réglant des chronométres et des montres; p. 129—229.

Chapitre 1er. Historique. — „On sait que, dans les appareils portatifs qui servent à mesurer le temps, l'ensemble du ressort

spiral et du balancier remplit l'office de régulateur, tout comme le pendule dans les appareils fixes.

„Huygens, qui appliqua le premier le pendule aux horloges, ainsi que cela a été encore dernièrement mis en lumière par M. Biot, est aussi l'inventeur du ressort spiral, communement appelé spiral réglant, qu'il fit construire pour la première fois par M. Thuret, habile horloger. Cette importante découverte lui fut contestée, il est vrai, à cette époque, par le docteur Hook d'une part, puis par l'abbé Hautefeuille. Mais il ressort de toutes les longues discussions dont l'inventeur du spiral fut l'objet, que le docteur Hook peut avoir eu la première idée d'un ressort droit appliqué au balancier; que l'abbé Hautefeuille l'aurait ployé en forme d'hélice agissant dans le sens de son axe; mais que Huygens seul perfectionna ces idées informes, en donnant à ce ressort la forme spirale qui, ne gênant plus les grandes vibrations du balancier, a rendu ce régulateur extrêmement précis. Enfin, on doit à M. P. Leroy la découverte de la propriété de l'isochronisme du spiral, en choisissant convenablement ses extremités."

L'auteur considère la question comme un problème de mécanique, dont voici l'énoncé:

Etant donné un ressort spiral réuni à un balancier, trouver les lois de leur mouvement commun; p. 130.

Il commence par résoudre le problème suivant de l'équilibre du système du spiral et du balancier:

Le spiral et le balancier étant dans leur position naturelle et en équilibre, on suppose que l'on fasse décrire au balancier un angle de rotation α. On demande quel est le mouvement du couple qu'il faudrait appliquer au balancier pour le maintenir dans cette nouvelle position contre l'action du spiral; p. 131—134.

Il traite ensuite les questions suivantes:

Calcul de la durée d'une oscillation du balancier: p. 134—136.

Conditions relatives à l'isochronisme; p. 136—139.

Détermination des courbes extrêmes; p. 139—149.

Conditions relatives au centre de gravité du spiral; p. 149—154.

Influence de ces courbes sur certaines perturbations; p. 154.

Méthode pour trouver graphiquement les courbes extrêmes; p. 154—157.

De l'isochronisme du spiral plat; p. 157—162.

Allongements et accroissements proportionnels; p. 162—165.

De l'effet de la température sur le spiral et du moyen de corriger l'influence de ses variations sur celui-ci; p. 165—170.

De l'influence du frottement du balancier; p. 170—175.

Construction d'un régulateur; p. 212—213.

Calcul des vibrations d'un spiral et d'un balancier donnés; p. 213—214.

Du réglage; p. 214.

De l'allongement proportionnel de l'acier dans un spiral; p. 214.

De la forme du spiral; p. 214—215.

Le Mémoire contient en outre une table donnant les rapports des nombres de vibrations du balancier dans un même temps pour des longeurs différentes d'un spiral; p. 176; à la suite duquel l'auteur explique quelques-unes des cinq planches qui accompagnent ce travail; (p. 177—193).

La planche I donne divers types de courbes théoriques.

La planche II donne les dessins de quatre courbes extrêmes théoriques, aboutissant toutes à la moitié des rayons des spires.

La planche III donne encore, avec leurs déformations calculées, divers types de courbes théoriques.

La planche IV donne d'abord un spiral plan théorique, c'est-à-dire ayant son centre de gravité sur l'axe, avec des déformations répondant à des angles différents de rotation du balancier; puis les mêmes choses pour un spiral théorique, dans lequel les déplacements du centre sont bien supérieurs à ceux indiqués sur le spiral théorique.

Enfin dans la planche V se trouve donné un spiral plat théorique, à courbe ramenée; et cette dernière courbe, qui est aussi théorique, suppose pour le centre un déplacement nul.

Toutes ces planches sont précédées de légendes insérées dans le texte, p. 177—193, où l'on étudie la montre de L é p i n e à échappement à cylindre, la montre de L é p i n e avec le nouveau

spiral, le grand spiral cylindrique de M. **Paul Garnier**, la montre de ce dernier; enfin les grands spiraux du même et ceux construits par M. **Rozé**; p. 195—205.

M. **Philips** expose plusieurs expériences relatives à la déformation du spiral et à l'influence que la forme des courbes extrêmes exerce sur elles; p. 205—212.

Il termine enfin son Mémoire par une Note, où il se propose de faire voir que, dans les circonstances que présente le problème actuel, les principes sur lesquels est fondée sa solution, et qui rentrent dans la théorie de l'arc neutre, sont non seulement parfaitement d'accord avec l'expérience, mais encore avec la théorie mathématique de l'élasticité; p. 216—229.

Eugène Rouché. — Mémoire sur la série de **Lagrange**; p. 457—487.

Introduction. — „**Lagrange** a donné, dans les **Mémoires de l'Académie de Berlin**, en 1768, une formule très répandue de nos jours, par laquelle on développe en série une racine ou une fonction continue d'une racine d'une équation de la forme

$$u = x + \alpha\varphi(u).$$

„La démonstration de cette formule, qui a successivement fixé l'attention des **Laplace**, **Jacobi**, **Cauchy**, **Tchebichef**, etc. est un problème assez complexe. Il faut distinguer la racine qu'on développe, indiquer les conditions sous lesquelles elle est développable en serie convergente, trouver la forme du développement, ainsi qu'une limite supérieure de l'erreur commise, lorsqu'on prend un nombre limité de termes dans la série. Il convient, en outre, que tous ces résultats soient déduits d'un principe unique par un procédé à la fois simple et rigoureux."

„Telles sont les conditions que j'ai tâché de remplir dans la démonstration qui fait l'objet principal de ce Mémoire. La méthode que j'ai suivie a quelque analogie avec celle que **Lagrange** a employée, dans le **Traité de la résolution des équations numériques**, et que **Murphy** a reproduite en d'autres termes, mais sans plus de rigueur, dans les **Transactions philosophiques de Cambridge**. Les résultats sont d'ailleurs avec plus de précision, ceux que l'on trouve dans les travaux de **Cauchy** énoncés d'une manière moins explicite, au milieu d'un grand appareil de formules et de notations compliquées."

„Après avoir exposé quelques principes, dus pour la plupart à Cauchy, sur les fonctions imaginaires, je démontre, en deux théorèmes simples, la formule de Lagrange, que j'applique ensuite à la résolution des équations trinômes et au développement de l'anomalie excentrique et du rayon vecteur des planétes suivant les puissances de l'excentricité. L'application aux équations trinômes donne lieu à des vérifications importantes; elle permet de constater, par un calcul direct, que notre limite supérieure, du reste, est très-resserrée. L'expression générale de cette limite nous conduit d'ailleurs, dans les deux applications qui suivent, à cette conclusion remarquable: Si l'excentricité de l'orbite elliptique ne dépasse pas 0,25, il suffit, pour avoir le rayon vecteur et l'anomalie excentrique à moins d'un demi-millième, de prendre sept termes dans les séries correspondantes."

„Je termine enfin par quelques théorèmes plus généraux susceptibles d'applications nombreuses, parmi lesquelles je signale une démonstration très courte d'une formule célèbre de Waring, relative à la somme des puissances semblables des racines d'une équation algébrique; p. 457—458."

I. Notions sur les fonctions d'une variable imaginaire; p. 459—461.

II. Module maximum; p. 461—464.

III. Série de Lagrange; p. 464—470.

IV. Application aux équations trinômes; p. 470—473.

V. Application au développement de l'anomalie excentrique; p. 474—476.

VI. Application au développement du rayon vecteur; page 476—477.

VII. Module principal; p. 477—480.

VIII. Généralisation des théorèmes précédents; p. 481—486.

IX. Application à un théorème de Waring; p. 486—487.

E. Rolland. — Mémoire sur le torréfacteur mécanique; p. 311—348.

E. Rolland. — Mémoire sur la réglementation de la température dans les fourneaux ou réservoirs quelconques, traversés par un flux variable de chaleur; p. 349—422.

Tresca et Ch. Laboulaye. — Recherches experimentales sur la théorie de l'équivalent mécanique de la chaleur; p. 489—509.

Des Cloiseaux. — Nouvelles recherches sur les propriétés optiques des cristaux naturels ou artificiels, et sur les variations que ces propriétés éprouvent sous l'influence de la chaleur; page 511—732.

Tresca. — Mémoire sur l'écoulement des corps solides; p. 733—799.

Les autres mémoires contenus dans ce volume sont totalement étrangers aux mathématiques.

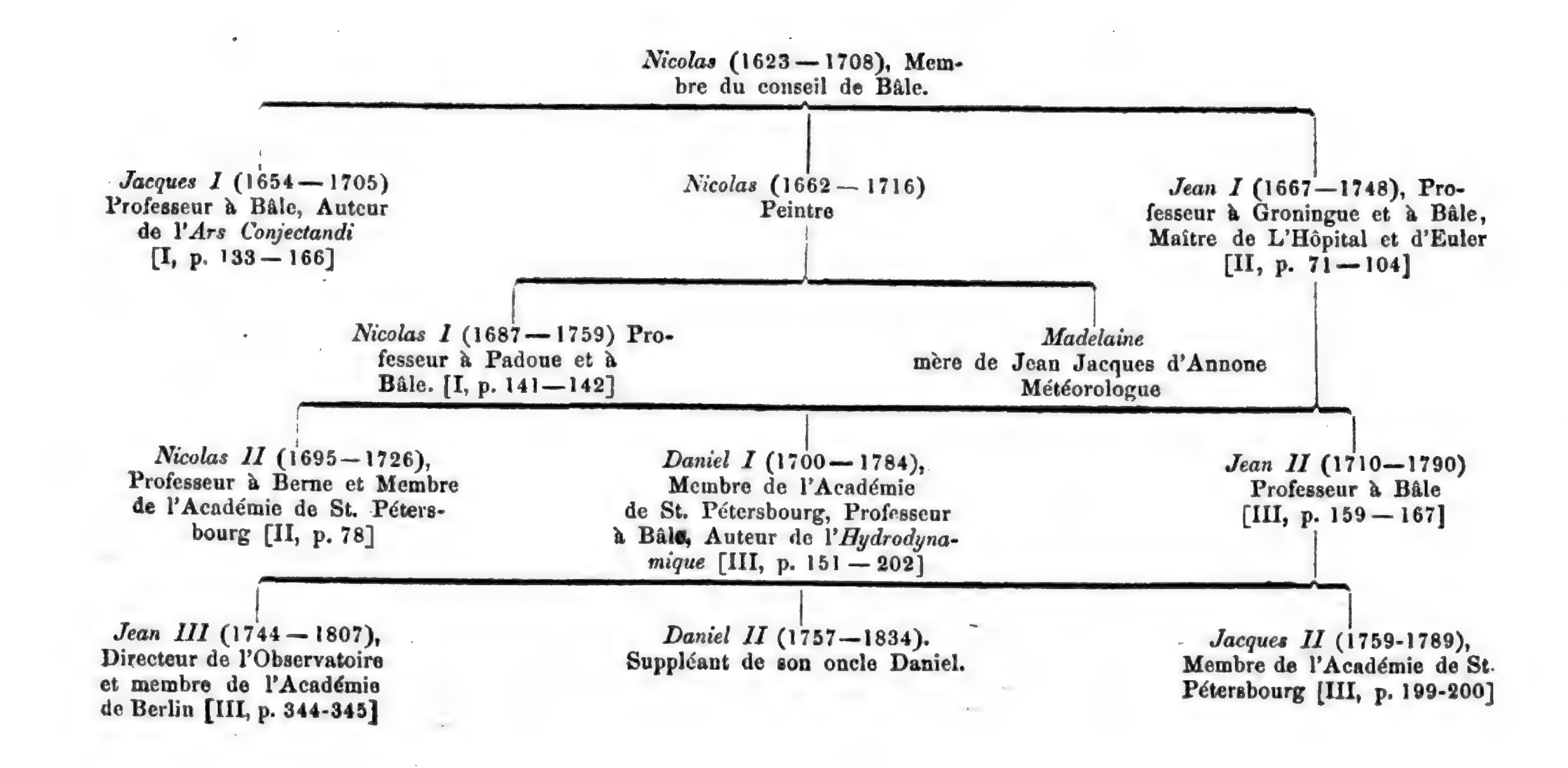
G. Dostor.

Literarischer Bericht
CCIII.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e Fisiche. Roma 1869. 4°. (Vergl. Liter. Ber. Nr. CCII. S. 1.

Tomo II. Luglio 1869. Notizia sconosciuta relativa a Bonaventura Cavalieri. Nota dell' Ing^{re}. Ferdinando Jacoli, Professore nella Regia scuola Allievi Macchinisti di Marina. p. 299. (Sehr interessante und wichtige Beiträge zu der Geschichte des Lebens und der Verdienste des berühmten Verfassers der „Geometria indivisibilium.“). — Matériaux divers pour l'Histoire des Mathématiques. Recueillis par le Dr. Rodolphe Wolf, Professeur d'Astronomie à Zurich. p. 313. [Herr Wolf liefert in dieser Abhandlung verschiedene sehr werthvolle Beiträge zur Geschichte der Mathematik. I. Sur l'invention du Niveau à bulle d'air. (Das Resultat seiner verdienstlichen Untersuchungen fasst Herr Wolf in den folgenden Worten zusammen: „En résumé je crois avoir démontré que le niveau à bulle d'air a été inventé au plus tard en 1666, et que probablement on le doit à Mr. Chapotot, mécanicien à Paris.). — II. Mort de M. Strauch. (Dieser mehrfach verdiente Mathematiker, bekanntlich z. B. Verfasser eines grossen Werkes über Variationsrechnung, war am 5. Juni 1811 in Heppenheim im Grossherzogthum Hessen-Darmstadt geboren, und starb am 23. Januar 1868 in Muri im Canton Aargau, wo er Professor der Mathematik und Rector einer Schule („école moyenne“) war.). — III. Corréspondance littéraire des Bernoulli. (Dieser Aufsatz enthält sehr viel Interessantes über die Familie der Bernoulli. U. A. giebt Herr Wolf auch einen Stammbaum dieser berühmten Familie von Mathematikern, welchen wir unseren Lesern nachstehend mittheilen:



Nicolas (1623—1708), Membre du conseil de Bâle.
Jacques I (1654—1705) Professeur à Bâle, Auteur de l'*Ars Conjectandi* [I, p. 133—166]
Nicolas (1662—1716) Peintre
Jean I (1667—1748), Professeur à Groningue et à Bâle, Maître de L'Hôpital et d'Euler [II, p. 71—104]
Nicolas I (1687—1759) Professeur à Padoue et à Bâle. [I, p. 141—142]
Madelaine mère de Jean Jacques d'Annone Météorologue
Nicolas II (1695—1726), Professeur à Berne et Membre de l'Académie de St. Pétersbourg [II, p. 78]
Daniel I (1700—1784), Membre de l'Académie de St. Pétersbourg, Professeur à Bâle, Auteur de l'*Hydrodynamique* [III, p. 151—202]
Jean II (1710—1790) Professeur à Bâle [III, p. 159—167]
Jean III (1744—1807), Directeur de l'Observatoire et membre de l'Académie de Berlin [III, p. 344-345]
Daniel II (1757—1834). Suppléant de son oncle Daniel.
Jacques II (1759-1789), Membre de l'Académie de St. Pétersbourg [III, p. 199-200]

Die in Parenthesen eingeschlossenen Zahlen beziehen sich weiterer Nachweisungen wegen auf das Werk: „Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz. Von Dr. R. Wolf. Vier Bände. Zürich. 1858—1862. 8⁰.“). — IV. Nicolas Fatio de Duiller — Basel 1664 — Worcester 1753 — (welcher in der Geschichte der Erfindung der Differentialrechnung eine nicht unwichtige Rolle spielt; m. s. Mathematisches Wörterbuch. Thl. I. S. 847.). — V. Marc—Michel Bousquet. (Sehr interessante Notizen über das Leben dieses berühmten Lausanner Buchhändlers, welcher viele Werke der grossen Mathematiker der damaligen Zeit: Euler's, Joh. Bernoulli's, u. s. w. herausgab.). — VI. Casimo Bartoli. — Diese verschiedenen Aufsätze hat Herr Boncompagni fast überall mit wichtigen und sehr gelehrten literarischen Nachweisungen und Bemerkungen bereichert.].

Tomo II. Agosto 1869. Les Professeurs de Mathématiques et de Physique générale au Collége de France. Par M. L. AM. Sédillot, Secrétaire du même Collége. Première Période. François Ier. 1530—1547. (Wir wünschen sehr, dass diesem ersten sehr interessanten und wichtigen Beitrage zur Geschichte der genannten berühmten Lehranstalt recht bald weitere Beiträge zur Geschichte der späteren Perioden folgen mögen.). — Annunzi di recenti Pubblicazioni. S. 283—S. 298 (höchst reichhaltig und genau.).

Geometrie.

Geometrische Constructionsaufgaben. Herausgegeben von Dr. H. Lieber, Lehrer am Gymnasium zu Pyritz. Unter Mitwirkung von F. v. Lühmann, Lehrer am Gymnasium zu Pyritz. Mit einer Figurentafel. Pyritz. 1870. 8⁰.

Diese Sammlung enthält ungefähr 3000 methodisch geordnete geometrische Constructionsaufgaben, welche mit Ausnahme der durch die Coordinatenmethode zu lösenden Aufgaben des Anhangs die Gränzen des Gymnasialunterrichts nicht überschreiten. Ausser der schon durch die methodische Anordnung der Aufgaben an sich gegebene Hinweisung auf die Auflösung derselben, sind den Aufgaben sehr viele zweckmässige Erläuterungen beigegeben, durch welche den Schülern die Lösungen wesentlich erleichtert, und sie auf dieselben geleitet werden; oft ist die Analysis der Aufgabe beigefügt u. s. w. u. s. w. Der sehr beschränkte Raum

erlaubt uns hier nur, die Ueberschriften der einzelnen Hauptabschnitte, in welche die ganze Sammlung getheilt ist, anzugeben; dieselben sind die folgenden: I. Abschnitt. Dreiecks- und Vierecks-Constructions-Aufgaben. A. Aufgaben, welche ohne Verhältnisse zu lösen. B. Aufgaben, welche mit Verhältnissen zu lösen. — II. Abschnitt. Vermischte Aufgaben. A. Aufgaben, welche ohne Verhältnisse zu lösen. B. Aufgaben, welche mit Verhältnissen zu lösen. — III. Abschnitt. Kreisaufgaben. A. Aufgaben, welche ohne Verhältnisse zu lösen. B. Aufgaben, welche mit Verhältnissen zu lösen. — IV. Abschnitt. Verwandlungs- und Theilungs-Aufgaben, Constructionen von Figuren in und um Figuren. — V. Abschnitt. Aufgaben, welche durch algebraische Analysis zu lösen sind. — Anhang. Aufgaben, welche durch die Coordinatenmethode zu lösen sind; für Realschulen beachtenswerth.

Wir glauben, dass dieses Buch zur Förderung und Erleichterung des geometrischen Unterrichts zu dienen geeignet ist, und recht sehr der Beachtung der Lehrer empfohlen zu werden verdient.

Die darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie. Für Schulen technischer Richtung. Von Josef Schlesinger, Privatdocent für Geometrie der Lage, grafische Statik und darstellende Geometrie am k. k. polytechnischen Institute und Professor an der öffentlichen Oberrealschule des I. Bezirkes in Wien. Mit 194 Holzschnitten. Wien. C. Gerold's Sohn. 1870. 8°.

Wir haben von diesem ausführlichen Lehrbuche der darstellenden Geometrie mit besonderem Interesse nähere Kenntniss genommen, und glauben demzufolge dasselbe allen Lehrern der descriptiven Geometrie recht sehr zur Beachtung empfehlen zu können. Ueber den Hauptzweck seiner neuen Bearbeitung dieser Wissenschaft spricht sich der Herr Verfasser in der Vorrede folgendermassen aus: „In dem vorliegenden Buche suchte ich die Aufgabe zu lösen, die geeigneten Lehren der sogenannten neueren Geometrie in die darstellende Geometrie systematisch einzuführen, somit den Unterricht in letzterer Wissenschaft an Mittelschulen, und in Folge hievon auch an technischen Hochschulen, auf erweiterte Grundlagen zu stellen“ und wir glauben, dass ihm dies in anerkennungswerthester Weise gelungen ist, indem hier in der That die Hauptlehren der neueren Geometrie — ohne darin zu weit zu gehen — vielfache sehr fruchtbare Anwendung gefunden haben, mehr als dies in manchen anderen Fällen, wo man in sehr

bestimmter Weise auf diese Anwendungen hingewiesen hatte, nach unserer Ansicht geschehen ist, wie wir dies auch in diesen Literarischen Berichten bei sich darbietender Gelegenheit hervorgehoben haben. Dass sich durch diesen Vorgang dem Herrn Verfasser manche neue Methoden und Vereinfachungen ergeben haben, erkennen wir bereitwillig an, ohne der Beschränktheit des Raumes wegen darauf hier weiter einzugehen im Stande zu sein. Im Allgemeinen wollen wir jedoch bemerken, dass wir die Darstellung meistens einfach und klar gefunden haben, und nicht durch eine grosse Masse schwer zu entwirrender Punkte und Linien in den Figuren von einem näheren Eingehen zurückgeschreckt worden sind; auch hat sich der Herr Verfasser so viel als möglich bemühet, allgemeine Gesichtspunkte zu gewinnen. Mögen sich also unsere Leser dieses Buch nochmals im Allgemeinen zur Beachtung empfohlen sein lassen, indem es uns schliesslich nur noch möglich ist, im Folgenden den Inhalt der Hauptabschnitte anzugeben, in welche der Herr Verfasser das Buch getheilt hat: I. Abschnitt. Vorbegriffe. — II. Abschnitt. Das Projiciren in der Ebene. — III. Abschnitt. Die Elemente der orthogonalen, axonometrischen, schiefen, centralen und collinearen Projection. — IV. Abschnitt. Entstehung, Darstellung und Untersuchung der Regel- und Curvenflächen. — V. Abschnitt. Construction der gegenseitigen Durchschnitte gegebener Flächengebilde. — VI. Abschnitt. Beleuchtungs-Constructionen. — VII. Abschnitt. Ueber geometrische Orte.

Geodäsie.

Theoretische und praktische Anleitung zum Nivelliren. Von S. Stampfer. Sechste vermehrte Auflage, bearbeitet von Dr. Jos. Ph. Herr, o. ö. Professor der höheren Geodäsie und der Astronomie am k. k. polytechnischen Institute zu Wien. Wien. Carl Gerold's Sohn. 1869. 8°.

Stampfer's hier in neuer sechster Auflage vor uns liegende Anleitung zum Nivelliren ist ein klassisches Buch, und sowohl rücksichtlich der darin gelehrten eigenthümlichen Methoden des Nivellirens, als auch rücksichtlich der diesen Methoden entsprechend eingerichteten Nivellir-Instrumente, welche vorzugsweise in der Werkstätte des k. k. polytechnischen Instituts in Wien durch Herrn Gustav Starke in trefflichster Ausführung ver-

fertigt werden, so allgemein bekannt, dass wir darüber hier nichts zu sagen brauchen. Im Laufe der Zeit haben aber die Instrumente mehrfache Abänderungen und Verbesserungen erfahren, und es sind neue noch zweckentsprechendere als die älteren von verschiedenen Einrichtungen und Grössen construirt worden. Insbesondere werden gegenwärtig die Instrumente in drei Kategorien ausgeführt, von welchen die erste mit den ursprünglichen Instrumenten im Wesentlichen übereinstimmt, die beiden anderen kleinere Dimensionen haben. Der Beschreibung dieser neueren Instrumente, überhaupt aller an den Instrumenten angebrachten neuen Einrichtungen, der Berichtigung dieser Instrumente u. s. w. hat nun Herr Professor J. P. Herr in dieser neuen Auflage ganz besondere Sorgfalt gewidmet, und überhaupt an allen Orten, wo es nöthig war, Verbesserungen angebracht, neue Hülfstafeln berechnet u. s. w., wodurch er dieser neuen Auflage sehr wesentliche Vorzüge vor den älteren verliehen hat, so dass dieselbe in jeder Beziehung der Beachtung aller Geodäten empfohlen werden muss. Die äussere Ausstattung ist so trefflich, wie sie nur irgend sein kann; die früheren Figurentafeln sind durch sehr schöne Holzschnitte ersetzt worden, und die Anleitung zur Berechnung der Erd-Abtragungen und Auftragungen bei Strassen- und Eisenbahnbauten ist, um den Umfang des Buches in seiner neuen Gestalt nicht zu sehr zu vergrössern, weggelassen worden, was um so mehr zu billigen ist, weil die Praktiker sich bei dergleichen Arbeiten gegenwärtig doch mehrfach anderer Methoden bedienen.

Nautik.

Erster Bericht der ständigen Commission für die Adria an die kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Wien. Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei. In Commission bei Carl Gerold's Sohn. 1869. 8^{0}.

Oesterreichs Aufgaben bezüglich der maritimen Hydrographie liegen zunächst im adriatischen Golfe. Für dieses Gebiet genügt ein schon über vierzig Jahre alter hydrographischer Atlas, bestehend in einer General- oder Courskarte in zwei Blättern und einer Küstenkarte (carta di cabotaggio del mare adriatico) in zwanzig Blättern mit sieben Tafeln Küstenansichten, und das als Golfführer oder Lootsenwerk unter dem Titel: „Portolano del mare adriatico (Erste Auflage 1822, zweite

Auflage 1845)" von Marieni in einem starken Quartbande herausgegebene Werk, den jetzigen Anforderungen und Bedürfnissen nicht mehr.

Vorzüglich und zunächst auf Anregung durch die Herren v. Wüllerstorf und Schaub beschloss daher die für die Hebung der Schifffahrt und des Handels mit Recht so sehr besorgte k. k. österreichische Regierung eine ganz neue Aufnahme des adriatischen Golfs, in nautischer, hydrographischer, geographischer, physikalischer u. s. w. Rücksicht, und legte die Ausführung dieses grossartigen in allen Beziehungen höchst nützlichen und wichtigen Unternehmens hauptsächlich in die Hände der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Dieselbe ernannte zunächst eine Commission zur sorgfältigen Berathung des ganzen Unternehmens und Entwerfung der erforderlichen Instructionen, wobei vorzüglich die folgenden Fragen zur Berathung kommen sollten:

1. Die eigentliche Küstenaufnahme;
2. die Gesetze der Ebbe und Fluth:
3. die Meeresströmungen;
4. die Meeres-Temperatur;
5. der Salzgehalt der See;
6. die Plastik des Meeresbodens;
7. die meteorologischen,
8. die magnetischen,
9. so weit als thunlich die naturhistorischen Verhältnisse.

Diese Commission hat nun ihren ersten vorliegenden im höchsten Grade interessanten Bericht abgestattet, welcher nach unserer Meinung als ein wahres Muster für alle Unternehmungen dieser Art betrachtet werden kann, und allen, die sich für dergleichen Arbeiten interessiren, dringend zur Beachtung empfohlen werden muss, wobei wir auch noch besonders auf die Beschreibung der zur Anwendung kommenden, oft sehr sinnreich eingerichteten Instrumente — überall durch Abbildungen erläutert — aufmerksam machen.

Als höchst dankenswerther Anhang sind die folgenden Instructionen u. s. w. beigefügt:

I. Inventarium der adriatischen Beobachtungs-Stationen nach dem Stande zu Ende April 1869.

II. Instruction zu den Beobachtungen über Temperatur und

Salzgehalt des Meeres für die österreichisch-adriatischen Beobachtungsstationen. Von Dr. Jos. R. Lorenz.

III. Instruction zur Behandlung der selbstregistrirenden Fluthmesser für die österreichisch-adriatischen Beobachtungsstationen. Von Dr. F. Schaub.

IV. Bericht von Dr. C. Jelinek über die Commissionsreise zur Einrichtung der Stationen am adriatischen Meere.

V. Bericht von Dr. J. Lorenz über die Commissionsreise zur Einrichtung der adriatischen Beobachtungsstationen.

VI. Versuche von Dr. Lorenz und Kapeller behufs einer möglichen Verbesserung der Tauch-Ellipsoide.

VII. Reisebericht des k. k. Professors F. Osnaghi, welcher mit der Inspection der meteorologischen Stationen am adriatischen Meere betraut war.

VIII. Instruction für den Inspector der adriatischen Beobachtungs-Stationen. Von v. Littrow. — Die Function des Inspectors ist Herrn Schaub übertragen worden.

Die eigentliche Küstenaufnahme, die Meeresströmungen, die Plastik des Meeresbodens fallen, wie sich von selbst versteht, ganz in den Bereich der k. k. Kriegsmarine, welche bereits mit der Küstenaufnahme begonnen hat.

Wir wiederholen, dass wir von diesem im höchsten Grade interessanten Berichte mit der vielfachsten eigenen Belehrung genaue Kenntniss genommen haben, empfehlen denselben nochmals der sorgfältigsten Beachtung unserer Leser, und wünschen dem grossartigen, höchst wichtigen und nützlichen Unternehmen den ungehindertsten Fortgang.

Physik.

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Redigirt von C. Jelinek und J. Hann. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXXXIX. S. 8.).

Wir sind wegen ungeheurer Ueberhäufung des Stoffs mit der Anzeige dieser trefflichen Zeitschrift leider so sehr in Rückstand gekommen, dass wir uns bei der Anzeige der uns vorlie-

genden neuen Nummern auf die Anzeige der in denselben enthaltenen grösseren Aufsätze noch mehr als sonst beschränken müssen. Hoffentlich wird späterhin uns wieder etwas mehr Raum zu Gebote stehen.

Band IV. Nr. 13. Ueber die Bestimmung der Intensität der Stürme durch die Berechnung der barometrischen Steigung. Von Thomas Stevenson. S. 321. — Ueber den Zusammenhang zwischen Stürmen und barometrischen Unterschieden. Von C. Jelinek. S. 331.

Band IV. Nr. 14. Ueber einen Congress der Meteorologen, um zu einem übereinstimmenden Beobachtungssysteme und zu einem rascheren Austausche der meteorologischen Documente zu gelangen. Von C. Jelinek. S. 353. — Uebersicht der im meteorologischen Jahre 1867/68 in Italien angestellten Beobachtungen. Nach den von P. Cantoni in Pavia berechneten Resultaten, mitgetheilt von F. Denza. S. 357.

Band IV. Nr. 15. Untersuchungen über das Gewitter und einzelne damit in Verbindung stehende Erscheinungen. (Aussehen der Gewitterwolken. Höhe der Gewitterwolken. Länge der Blitze.). Von J. Klein. S. 369.

Band IV. Nr. 16. Beschreibung der selbstregistrirenden von der meteorologischen Commission der Royal Society an verschiedenen Orten von Grossbritannien und Irland aufgestellten Instrumente (mit Fortsetzung und Schluss in Nr. 17. und Nr. 18.). S. 401.

Band IV. Nr. 17. Zwei denkwürdige Hagelfälle in Georgien. Aus Briefen an Ritter v. Haidinger. S. 417. — Ueber die eigentliche Form der Haufenwolke. Von K. Fritsch. S. 421.

Band IV. Nr. 18. Enthält die bei Nr. 16. erwähnte Fortsetzung und Schluss.

Band IV. Nr. 19. Ueber die Ursache der Trübung der Luft in der ersten Hälfte des Juli. Von Prestel. S. 465. — Witterungsverhältnisse in Nertschinsk. Von Berger. S. 471.

Band IV. Nr. 20. Beschreibung eines selbstregistrirenden Meteorographen, construirt für die Sternwarte in Upsala. Von Theorell. S. 497. (Fortsetzung in Nr. 21.). — Ueber eine die Bora begleitende Erscheinung „Fumarea". Von Zindler. S. 504.

Band IV. Nr. 21. Ueber atmosphärische Elektricität. III. Der Höhenrauch. Von Dellmann. S. 513.

Band IV. Nr. 22. Untersuchungen über das Gewitter und einzelne damit in Zusammenhang gebrachte Erscheinungen. (Das Wetterleuchten. Schluss in Nr. 23.). Von J. Klein.

Band IV. Nr. 23. Ueber atmosphärische Elektricität. IV. Der Nebel. Von Dellmann. S. 561.

Band IV. Nr. 24. Telegraphische Witterungsberichte aus Russland. Von Wild. S. 593.

Band V. Nr. 1. Beitrag zur Kenntniss der Regenverhältnisse von Südwest-Deutschland. Von Koeppen. S. 1. — Beobachtungen in Buenos-Aires von J. de Boer. Mitgetheilt von Buys-Ballot. S. 14.

Band V. Nr. 2. Der registrirende Anemometer von F. Brusotti zu Pavia. S. 33.

Band V. Nr. 3. Das meteorologische Element in der Landschaft. Ein Vortrag von Professor F. Simony. S. 47. — Ueber den Zusammenhang zwischen der Lage entgegengesetzter Luftströme und dem Auftreten eines barometrischen Maximums oder Minimums. Nach Ch. Meldrum und R. Scott. S. 61.

Band V. Nr. 4. Der elektrisch-registrirende Anemometer der k. Sternwarte in Modena. Von Prof. D. Ragona. S. 81.

Band V. Nr. 5. Dr. Neumayer's Untersuchungen über die Meteorologie in Süd-Australien. Von Hann. S. 97.

Kleinere interessante Mittheilungen und beachtenswerthe Literaturberichte finden sich in grosser Anzahl in allen Nummern.

Die österreichische meteorologische Gesellschaft zählte am 1. October 1869 323 Mitglieder, welche 1164 Fl. Jahresbeitrag zahlten; vom k. k. Handelsministerium erhielt die Gesellschaft pro 1. October 1868 — 30. September 1869 eine Subvention von 200 Fl.

Vermischte Schriften.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Liter. Ber. Nr. CCII. S. 10.).

Anno VII. Novembre e Dicembre 1869. Ricerca dei valori razionali di v che rendono un quadrato il polinomio

$a+bv+cv^2+dv^3+ev^4$; per L. Calzolari. Cont. p. 319. — Lezioni di Fisica matematica, dettate nell' Università di Napoli, nell' anno scolastico 1868—69 dal Prof. Michele Zannotti. (Continuazione Vedi Pag. 173.). p. 351. — Studio intorno alla conica dei 9 Punti e delle 9 Retti. Per P. Cassani. p. 369. — Di una Formula nota che si puo dedurre da un Teorema di Cauchy. Nota del dott. Agostino Grandi. p. 374. — Del piano, sua definizione. Assioma del piano elevato a Teorema. Pel dott. Valeriano Valeriani. p. 376. — Dimostrazione di un Teorema di Eulero. Per Vito Eugenio. p. 377. — Altra dimostrazione dello stesso Teorema. Per Tarquinio Fuortes. p. 378.

Anno VIII. Gennaio e Febbraio 1870. Nota sulla risultante di due equazioni; per E. Isè. p. 1. — Nota sull' equazione $u^2=Ax^2\pm By^2$; per L. Calzolari. p. 28. — Sopra un complesso di 2^0 grado; per F. Aschieri. p. 35. — Sulle Forme ternarie quadratiche; per G. Battaglini. p. 38. — Lezioni sulla Termodinamia; per M. Zannotti. p. 60.

Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da F. Brioschi e L. Cremona (Presso il R. Istituto Tecnico Superiore di Milano) in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal prof. Tortolini.). Milano. 4^0. (Vergl. Liter. Bericht Nr. CCI. S. 11.).

Serie II^a. Tomo III^0. Fascicolo 2^0. (Dicembre 1869.). Matthiessen: De aequilibrii figuris et revolutione homogeneorum annulorum sidereorum sine corpore centrali atque de mutatione earum per expansionem aut condensationem (continuazione e fine.). p. 89. — Smith: Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques. p. 112. — Schwarz: Notizia sulla rappresentazione conforme di un' area ellittica sopra un' area circolare. pag. 166. — Schlaefli: La risolvente dell' equazione di quinto grado sotto la forma di un determinante simmetrico a quattro linee. pag. 171. — Zeuthen: Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable. p. 175.

Von einem sehr grossen und sehr wichtigen literarischen Unternehmen der Royal Society in London glauben wir unseren Lesern nicht besser Nachricht geben zu können als durch den folgenden Auszug aus einem Vortrag, den Herr Ritter von Haidinger in der Sitzung der k. k. geologischen Reichsanstalt in Wien am 15. Februar 1870 gehalten hat.

Catalogue of scientific papers
(1800 — 1863)

Compiled and Published by the Royal Society. London.

Printed by George Edward Eyre and William Spottiswoode, printers to the Queens Most Excellent Majesty, for Her Majesty's Stationery Office. Vol. II. Coa — Gra 1868 and Vol. III. Gre — Lez. 1869.

Bericht erstattet von

Wilhelm Ritter v. Haidinger.

Sitzung der k. k. geologischen Reichsanstalt am 15 Februar 1870.

„Des Mannes Feier ist die That", und „Brave freuen sich der That", ihrer eigenen und der hochgeehrter Freunde und Arbeitsgenossen.

Dieses Gefühl belebt mich in der Vorlage der gegenwärtigen zwei mächtigen Quartbände Vol. II. und III. von 1002 und 1012 Seiten des Verzeichnisses sämmtlicher naturwissenschaftlichen Abhandlungen aus den Jahren von 1800 bis mit 1863, die Namen der Verfasser alphabetisch geordnet.

Zuerst im Jahre 1855 auf der Versammlung der British Association zu Glasgow ein Antrag des Dr. Joseph Henry, Secretärs der „Smithsonian Institution", in Washington, auf Zusammenstellung eines Verzeichnisses physikalischer Abhandlungen (philosophical memoirs).

Ein Comité berichtet im nächsten Jahre darüber, und empfiehlt Beschränkung auf mathematische und physikalische Wissenschaftszweige, doch Ausdehnung auf periodische Schriften überhaupt, und den Beginn der Sammlungen von 1800 an.

Im März 1857, auf einen Vortrag des damaligen Vicepräsidenten General (nun Präsidenten Sir Edward) Sabine im Rathe der „Royal Society" Ernennung des Beurtheilungs Comités für die Angelegenheit. Es bestand aus den Herren Arthur Cayley, Professor der Mathematik an der Universität zu Cambridge, Augustus de Morgan, Professor der Mathematik am „University College" zu London, Thomas Graham, Münzmeister, Robert Grant, Professor der Astronomie in Glasgow, William Hallows Miller, Professor der Mineralogie an der Universität zu Cambridge und Secretär für das Ausland der „Royal Society", und Georg Gabriel Stokes, Professor der Mathematik an der Universität zu Cambridge und Secretär der „Royal Society".

Ich muss um so mehr wünschen, die Namen der hochverdienten Comité-Mitglieder hier genau zu verzeichnen, als mir durch Herrn Prof. Miller seit dem Drucke meiner ersten Mittheilung mehrere Berichtigungen in dieser Beziehung freundlichst gegeben wurden. Wie immer man auch die eigentlichen Gegenstände der Verhandlung hoch hält, so glaube ich ist es stets eine Pflicht dankbarer Erinnerung der Namen derjenigen zu gedenken, welche ein so werthvolles Ergebniss vorbereiteten.

Die Reihung nach Autoren-Namen, die chronologische Reihung der Abhandlungen wurde beschlossen, möglicher Weise später ein wissenschaftliches Verzeichniss des Inhaltes der Abhandlungen.

Der nächste Schritt bestand in dem auf die Empfehlung des bestehenden Bibliotheksausschusses der Gesellschaft vom 7. Jänner 1858 erfolgten Beschlusse, einen solchen Katalog vorläufig für den Gebrauch der eigenen Bibliothek vor-

zubereiten, aber mit dem Umfange, dass er alle naturwissenschaftlichen Fächer enthalten sollte, welche in der „Royal Society" seit zwei Jahrhunderten vertreten sind, aber nichts von Anwendung der Wissenschaft auf das Leben, keine technischen oder professionellen Zweige.

Die Gewinnung dieses Katalogs lag innerhalb der Kräfte der „Royal Society". Von den vier Exemplaren der Zettel-Kataloge wurde eines sogleich zum Gebrauche eingebunden, aber auch für Fortsetzungen durch Vornahme neuer Publicationsreihen von Schriften gesorgt.

Indessen hätte eine Herausgabe des Ganzen doch weit die Mittel, welche die Royal Society anwenden konnte, überstiegen. Es wurde daher bei der Regierung Ihrer Majestät der Königin der Antrag gestellt, das Werk auf Staatskosten herauszugeben, und dies gelang vollständig unter der Waltung des ersten Lords des Schatzes, Viscount Palmerston, des Kanzlers der Schatzkammer, Herrn Gladstone und der Lords Commissioners des Schatzes. Der Plan wurde seiner ganzen Ausdehnung nach am 28. November 1864 gut geheissen, und mit der Ausführung die Royal Society selbst betraut. Eine Anzahl der Exemplare wurde zur Vertheilung an wissenschaftliche Institute und einzelne Personen des In- und Auslandes gewidmet, der Rest zum Verkaufe bestimmt. So kam die wissenschaftliche Welt in den Besitz dieses schönen Werkes.

Dass die Bibliothek der Royal Society selbst, die des britischen Museums und anderer Londoner Anstalten und Gesellschaften den Kern darboten, ist wohl selbstverständlich. Doch eröffnete Herr Prof. Miller auch durch ein Circular die Möglichkeit einer Theilnahme für ausländische Akademien und wissenschaftliche Gesellschaften, schon in der Zeit während meiner Amtsführung als Director der k. k. geologischen Reichsanstalt.

Ich darf hier wohl mit wahrem Dankgefühl der freundlichen Worte gedenken, mit welchen Herr Prof. Miller in dem Vorworte den Umstand hervorhebt, dass er aus unserer Bibliothek mehr als 2000 Titel von Abhandlungen durch die sorgsame Zusammenstellung des Herrn A. Senoner erhalten habe. Eines Beitrages gedenkt er auch durch Herrn Dr. Johann Czermak in Prag.

Unser Beitrag erscheint um so wichtiger und ansehnlicher für uns, als dabei viele österreichische periodische Schriften zur Bearbeitung kamen, wie man dies sehr deutlich an einem besonderen Zeichen, einem Sternchen, bei den Quellen nachgewiesen findet, die grösstentheils von Herrn Senoner geliefert wurden.

Ein Verzeichniss von 1394 periodischen Werken, aus welchen die Titel ausgezogen wurden, ist auf 66 Seiten vollständig gegeben, dazu die in dem Werke angewandten Abkürzungen. Ich darf hier nicht verfehlen, auf das Anerkennendste hervorzuheben, dass diese letzteren doch gestatten, auch ohne jedesmal das Verzeichniss zu vergleichen, sich zu orientiren. Ein höchst nachahmenswerthes Beispiel. Gar zu weit getriebene Abkürzungen oder Nachweisungen ersparen wohl Raum, nehmen aber den Werken gar oft einen Theil der Uebersicht und Nützlichkeit weg.

Höchst dankenswerth ist die grosse Correctheit in der Orthographie der vielen rasch und friedlich wechselnden Sprachen der Titel, der grossen neuen Cultursprachen deutsch, französisch, englisch, italienisch, der sich ihnen fest anschliessenden dänischen, schwedischen, holländischen, portugiesischen, spanischen Idiome, das Lateinische, endlich selbst die polnischen, czechischen, magyarischen Titel, wenn auch nur die Haupt-Cultur-Schrift zur Anwendung kam.

Fortsetzungen des Verzeichnisses der periodischen Quellenwerke erscheinen im zweiten und dritten Bande mit 31 und 41 Nummern, so dass nun die Gesammtzahl 1466 erreicht ist. Auch diese späteren Zusätze sind in Mehrzahl aus unserer Bibliothek durch Herrn Senoner ausgezogen und vermittelt.

Unsere Theilnahme, wie bescheiden sie sich auch ausnimmt gegenüber schon den drei Bänden, welche bei einer Durchschnittszahl von 30 Titeln auf einer Seite — wohl nahe an 100.000 Titel von Abhandlungen enthalten, hatte auch in seiner Jahresansprache am 30. November 1868 der Präsident General Eduard Sabine freundlichst hervorgehoben.

Er erwähnte damals, dass bereits 120 Exemplare durch Kauf in feste Hände übergegangen seien.

Was uns in Wien betrifft, so ist mir nicht bekannt geworden, dass ausser unsern Exemplaren, und dem für die kais. Akademie der Wissenschaften, noch ferner Exemplare zu einer Gratis-Vertheilung gekommen wären. Gewiss aber haben wir, in diesen Räumen, durch langjährige freundliche Beziehungen den ersten Anspruch darauf, unsern Dank, unsere Anerkennung in diesem Berichte, der nun dem Fortschritt des Werkes gilt, auszusprechen.

Es lohnt wohl recht sehr einen statistischen Blick in dieses grosse, wahre Bibliothekswerk zu versenken, von dem nun schon drei Bände vorliegen.

Ich folge dem Vorgange in der Wiener Zeitung vom 5. Februar, in welcher für den dritten Band in raschem Ueberblicke sich die Theilnahme zeigte, welche für grössere Zahlen als je 50 Abhandlungen von einem Verfasser in den nachstehenden Länder-Abtheilungen gewidmet wurde, welchen ich hier die im ersten und zweiten Bande tabellarisch anschliesse:

	I. Bd.	II. Bd.	III. Bd.	Zusammen
Oesterreich	4	2	6	12
Deutschland	30	22	39	91
Frankreich und Belgien	38	49	27	114
Grossbritannien und N.-Amerika	24	25	35	84
Deutsche in Russland	2	4	2	8
Italien	8	4	—	12
Dänemark	—	2	1	3
Schweden	1	1	—	2
Niederlande	2	1	2	5
	109	110	112	331

Die Oesterreicher waren im 1. Bande: A. Boué (1819—1863) mit 144, E. Brücke (1841—1863) mit 63, Graf Buquoi (1812—1840) mit 56, T. A. Catullo (1814—1864) mit 55; — im 2. Bande: Alois David (1800—1834) mit 59, G. v. Frauenfeld (1846—1864) mit 85; — im 3. Bande: W. von Haidinger (1861—1863) mit 289, Fr. v. Hauer (1846—1863) mit 88, J. Hyrtl (1843—1863) mit 69, F. Kolenati (1843—1863) mit 75, V. Kollar (1836—1858) mit 52, K. Kreil (1827—1863) mit 57 Nummern.

Die zahlreichsten Beiträge im I. Bande sind: die von A. Cauchy 479, J. B. Biot 317, A. Cayley 309, Sir D. Brewster 304, J. Berzelius 276; — im 2. Bande: die von John Edward Gray 511, C. G. Ehrenberg 267, Léon Dufour 245, Étienne Geoffroy St. Hilaire 247, G. Cuvier 242, H. R. Göppert 200; — im 3. Bande: J. A. Grunert 344, Guérin-Meneville 330, W. v. Haidinger 289.

Ich freue mich, am Schlusse meines Berichtes noch eine Nachricht anreihen zu können, die ich Herrn W. White, Secretär-Assistenten und Bibliothekar der Royal Society verdanke, als der Bericht bereits zum Satze abgegeben war.

Die Arbeit geht rasch vorwärts, von dem IV. Bande ist bereits der dritte Theil gedruckt. Aber was besonders wichtig erscheint besteht darin, dass die Arbeit für den wissenschaftlichen *Index Rerum*, die Nachweisung, wo man zu jedem wissenschaftlich zu bezeichnenden Gegenstande der Abhandlungen den Namen des Verfassers in dem „Catalogue" wird finden können, unmittelbar in Angriff genommen werden wird. Namentlich wird Herr Professor Julius Victor Carus von Leipzig, der hochverdiente Herausgeber der „Bibliotheca zoologica", — der für diesen Zweck gewonnen ist, in dem bevorstehenden Monate März in London erwartet.



Literarischer Bericht
CCIV.

Ernst Ferdinand August.

Aufgefordert von dem Herausgeber dieses Archivs *) habe ich es übernommen, einige Nachrichten über das Leben meines Vaters, des am 25. März 1870 zu Berlin verstorbenen Dr. Ernst Ferdinand August, Professors und Directors des Köllnischen Gymnasiums zu Berlin, zusammenzustellen.

Ernst Ferdinand August wurde am 18. Februar 1795 zu Prenzlau geboren und fand, da er seine Eltern früh verloren hatte und auch sonst ohne Verwandte war, Aufnahme in der Familie eines armen Handwerkers, welcher sich des Knaben mit grosser Liebe annahm. In seinem 11. Lebensjahre (1805) kam er unter thatkräftigem Beistande hülfreicher Menschen, namentlich des Geh.-Rath Kenke, welcher einen geweckten wissbegierigen Sinn und nicht gewöhnliche Begabung in ihm erkannt hatte, nach Berlin, trat als Sextaner in das Gymnasium zum grauen Kloster und wurde gleichzeitig in die mit dieser Anstalt verbundene Communität aufgenommen. Er machte alle Klassen jener Schule durch und genoss unter Anderem den mathematischen und physikalischen Unterricht Ernst Gottfried Fischers**), welcher alle Schüler zu strengem methodischen Denken und lebendiger Auffassung und Anwendung des Lehrstoffes heranzuziehen verstand.

---

*) Mit dem verbindlichsten Danke für die gütige Erfüllung meiner Bitte sogleich abgedruckt. G.

**) Möchten alle Lehrer der Mathematik und Physik sich diesen trefflichen Mann, dem der mathematische und physikalische Unterricht in Preussen unendlich viel verdankt, dessen auch der Herausgeber des Archivs sich immer noch mit besonderer Freude und innigem Danke erinnert, auch jetzt noch stets zum Muster nehmen. G.

Als im Jahre 1813 der König Friedrich Wilhelm III. den Aufruf an sein Volk erliess, folgte auch August mit seinen Mitschülern begeistert der Aufforderung; erst kurze Zeit in Prima machte er, wie es in jener Zeit gestattet wurde, sein Abiturienten-Examen und eilte nach Breslau, um sich dem Lützow'schen Corps anzuschliessen. Mit diesem machte er den ersten Feldzug mit. An dem zweiten Feldzuge nahm er als Landwehr-Lieutenant Theil, war bei der Schlacht von Belle-Alliance und zog mit dem siegreichen Heere in Paris ein. — Dann kehrte er nach Berlin zurück um das unterbrochene Studium wieder aufzunehmen. Er hatte die Theologie erwählt, beschäftigte sich aber daneben eingehend mit philologischen Studien und gewann eine Vorliebe für das Lehrfach, dem er sich ganz zu widmen beschloss. Nachdem er das Examen pro facultate docendi absolvirt hatte, trat er im Jahre 1817 als Probandus an das Gymnasium zum grauen Kloster, wurde aber bald darauf als ordentlicher Lehrer an das Joachimsthalsche Gymnasium zu Berlin berufen. In die ersten Jahre seiner Lehrthätigkeit fällt eine weitere Veränderung seiner Geistesrichtung, indem er sich mehr und mehr der Mathematik und der Physik zuwandte, die später seine Lieblingsstudien bildeten. Von grossem Einfluss auf diese Umwandlung in seinen wissenschaftlichen Bestrebungen war der innige Verkehr mit seinem früheren Lehrer E. G. Fischer, mit dessen jüngster Tochter Johanne er sich später (am 11. August 1823) vermählte. Mit Eifer studirte er als junger Lehrer noch die ihm bis dahin unbekannten Gebiete der Mathematik, so hörte er namentlich bei Ideler Differenzial- und Integralrechnung, und bearbeitete privatim andere Gebiete der Mathematik und Physik; besonders aber fesselte ihn das Studium der alten Griechischen Mathematiker. Im Jahre 1823 promovirte er auf Grund einer mathematischen Dissertation, in welcher er gewisse Eigenschaften der Kegelschnitte untersuchte. Bald darauf erhielt er den Professortitel und unterrichtete am Joachimsthalschen Gymnasium noch mehrere Jahre theils in der Mathematik, theils in philologischen Fächern, bis er im Jahre 1827 ausersehen wurde, das alte Köllnische Gymnasium, welches seit Ende des vorigen Jahrhunderts mit dem grauen Kloster als Köllnische Schule verbunden gewesen war, von neuem selbständig zu organisiren, und zwar mit einem von dem der alten Gymnasien abweichenden Lehrplan als Köllnisches Real-Gymnasium, durch welches der Versuch gemacht werden sollte, die Mathematik und die Naturwissenschaften in ausgedehnter Weise als Bildungsstoff für den höheren Unterricht zu verwerthen. Dass gerade er für diese Aufgabe die geeignete Pesönlichkeit sein würde, war aus der Vielseitigkeit seiner Bildung zu vermuthen. Wie er dieselbe gelöst

hat, kann hier nicht erörtert werden. Diejenigen werden es zu beurtheilen wissen, welche ihn in seiner amtlichen Stellung kennen gelernt haben; das Eine aber darf wohl hervorgehoben werden, dass aus der Anstalt seit dem Jahre 1827 mehr als acht academische Professoren, die an deutschen Hochschulen unterrichten, hervorgegangen sind, eine Thatsache, welche, wenn einzeln herausgegriffene Erscheinungen einen Schluss auf die gesammten Verhältnisse erlauben, gewiss als günstiges Zeichen gelten darf. August leitete die Anstalt bis zu seinem Tode und hatte das Glück sie in den 43 Jahren seines Directorats wachsen und gedeihen zu sehen. Im Jahre 1868 wurde unter allgemeinster Theilnahme sein 50jähriges Dienstjubiläum gefeiert. Jedoch bald nach jenem erhebenden Feste begann ein Leiden, welches schon früher gelinder aufgetreten war, seine bisher rüstigen Kräfte sichtlich zu verringern, und kaum $1\frac{1}{2}$ Jahre darauf sollte er ihm erliegen. Am 25. März 1870 Abends entschlief er sanft, umgeben von den Seinigen.

Seine schriftstellerische Thätigkeit war, abgesehen von poetischen Productionen, zu denen ihm eine glückliche Begabung verliehen war, theils Zwecken der Schule gewidmet, theils wissenschaftlichen. Unter den pädagogischen Schriften sind ausser mehreren lateinischen Uebungbüchern und einem deutschen Lesebuche zu nennen:

1. Lehrbuch der Elementar-Mathematik; zuerst ein Cursus, später vollständig umgearbeitet zu drei Cursus erweitert. Berlin bei Reimer.

2. Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Leipzig bei Veit. 6 Auflagen. (Die erste Auflage 1846.).

3. Mechanische Naturlehre; Auszug aus E. G. Fischers gleichbetiteltem Werke. Berlin 1840 bei Nauck.

4. E. G. Fischers Auszug aus dem Lehrbuche der Arithmetik. 2. Auflage neu bearbeitet von E. F. August. Leipzig bei Hübner 1855.

5. E. G. Fischers Lehrbuch der Ebenen-Geometrie für Schulen, bearbeitet von E. F. August. Leipzig 1853.

6. Professor Emil Fischers Sammlung von Uebungsbeispielen u. s. w.; neu bearbeitet von E. F. August. Berlin 1869.

Unter seinen wissenschaftlichen Werken ist zu nennen:

Euclidis Elementa. Berol. 1826—29. Trautwein; seine

Mitarbeiterschaft an dem „Handwörterbuch der Chemie und Physik.“ Berlin 1842—50 bei Simion.

Dazu kommt eine Anzahl mathematischer und physikalischer Abhandlungen; von denen folgende in chronologischer Reihenfolge erwähnt werden mögen:

1. „Reductionsformel für das Quecksilberthermometer bei hohen Wärmegraden.“ (Ann. der Phys. Bd. 89. Berlin 1828.).

2. „Ueber die Berechnung der Expansivkraft des Wasserdunstes“. (Ibid.).

3. „Ueber einige isochrone Schwingungen elastischer Federn.“ (Programm des Köllnischen Real-Gymnasiums von 1829.).

4. „Zur Kenntniss der geometrischen Methode der Alten.“ (Insbesondere in Beziehung auf die Platonische Stelle im Meno 22d.). (Programm von 1829.).

5. „Fortschritte der Hygrometrie.“ Berlin 1830.

6. „Psychrometertafeln.“

(Beide Schriften beziehen sich auf das vom Verfasser erfundene „Psychrometer“.).

7. „Ueber die Ausmessung der Trapezoidalkörper und Körperstumpfe.“ (Programm von 1849.).

8. „Elementar-stereometrischer Beweis für die Anwendung der allgemeinen Kubaturformel für Körperstumpfe auf solche Körper, die durch Rotation eines Kegelschnitts um eine Hauptaxe entstehen.“ (Crelle Bd. XLV.).

9. „Construction regelmässiger Körper nach einer für alle übereinstimmenden Methode.“ Berlin 1854. (Amelang'sche Buchhandlung. R. Gärtner.).

Ausserdem hat er noch eine Reihe von Apparaten ersonnen, so z. B. einen Heliostaten; eine Sonnenuhr, welche sich durch einen Magneten einstellt, einen Skiostaten, d. h. eine Sonnenuhr, die ohne Magnetnadel und ohne Kenntniss des Meridians aufgestellt werden kann, und in den letzten Jahren ein Spiral-Hygroscop, welches durch die Einfachheit seiner Construction und seines Gebrauchs schnell eine ziemlich grosse Verbreitung gefunden hat.

Wissenschaftlich anregend wirkte er auch durch die Vor-

lesungen über Experimentalphysik, die er während einer Reihe von Jahren im Hörsaale des Köllnischen Real-Gymnasiums für Gebildete veranstaltete. Seine thätige Betheiligung an wissenschaftlichen Bestrebungen aller Art, seine Mitgliedschaft in gelehrten Gesellschaften und Vereinen kann nur kurz erwähnt werden. Die Liebe zur Wissenschaft beseelte ihn stets mit gleicher Frische, und begeistert wusste er sie zu lehren. Aber auch auf andere Gebiete wandte sich seine Arbeit; an allen Bewegungen des öffentlichen Lebens, namentlich des politischen und kirchlichen, betheiligte sich lebhaft und nicht erfolglos sein rastloser Geist. Jedes edle menschliche Streben fesselte ihn, und harmonisch vereinigten sich die verschiedenen Richtungen seines geistigen Wirkens zu dem Bilde einer heiteren, reich begabten, anziehenden und anregenden Persönlichkeit. Mit freudigem Stolze auf dieses reiche, gesegnete Leben und Wirken des Vaters zu blicken sei dem Sohne vergönnt.

Berlin, den 1. Mai 1870.

F. August.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Almanach der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Neunzehnter Jahrgang. 1869. Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXXXVIII. S. 4.

Auch dieser Jahrgang des Almanachs liefert wieder ein höchst erfreuliches Bild von der so erfolgreichen und ausgebreiteten Thätigkeit der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, und ist in seiner Einrichtung von seinen Vorgängern nicht wesentlich verschieden. — Besonders jedoch enthält dieser Jahrgang auf S. 39—S. 155. die ausführliche Mittheilung der sämmtlichen höchst interessanten Verhandlungen, welche über die von 14 Mitgliedern gestellte Frage, ob für das künftige Bestehen der Akademie vortheilhafte Veränderungen in der Organisation des Instituts herbeizuführen wären, in der Akademie Statt gefunden haben. Die Antragsteller waren die Herren: Arneth, Fiedler, Meiller, Bergmann, E. Freiherr v Sacken, Kner, Ami Boué, W. Haidinger, Hyrtl, Reuss, Petzval, Hauer, Hörnes, Ed. Suess. — Zur Berichterstattung waren ernannt die Herren Arneth, Miklosich, Münch-Bellinghausen, Sacken, Vahlen aus der philosophisch-historischen Klasse, und die Herren Brücke,

Hauer, Littrow, Schrötter und Suess aus der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe.

Jeden, der sich für Naturwissenschaft im Allgemeinen interessirt, machen wir ferner aufmerksam auf den höchst interessanten Vortrag: „Die Solidarität alles Thierlebens. Von Hofrath und Prof. Dr. Carl Rokitansky.“ (S. [illegible]—S. [illegible]).

Endlich bemerken wir, dass Jeder die ausführliche Lebensskizze von Karl Ludwig Reichenbach, geboren zu Stuttgart am 12. Februar 17[illegible], gestorben auf einer Reise zu Leipzig am 16. Januar 1869 (S. [illegible]—S. [illegible]), in welcher die wissenschaftlichen Verdienste dieses vielfach verkannten Mannes zu unserer besonderen Freude in gebührender Weise gewürdigt werden, mit besonderem Interesse lesen wird. Den Schlussworten dieser Skizze: „Der ehrenvolle Platz, den **Reichenbach** in der Wissenschaft einnimmt, bleibt ihm jedenfalls gesichert, wenn er auch in seiner Odlehre zu weit ging“ schliessen wir uns vollkommen an.

Wir verfehlen nicht, unsere Leser darauf aufmerksam zu machen, dass Herr Principe B. Boncompagni sein in dem Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche (als eine Recension des bekannten grossen Werkes von C. A. Valson) veröffentlichtes Leben Cauchy's als eine besondere Schrift unter dem folgenden Titel hat erscheinen lassen:

Intorno ad un' opera del Sig. C. A. Valson intitolato La Vie et les Travaux du Baron Cauchy, recensione di B. Boncompagni. Roma. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. 1869. 4°. (p. 1—p. 102.).

Diese an sich wichtige und höchst interessante Schrift ist namentlich auch allen denen im höchsten Grade zu empfehlen, welchen das grosse zweibändige Werk des Herrn C. A. Valson über das Leben des grossen Mathematikers zu umfangreich ist. Wir haben Herrn Boncompagni's schöne Schrift mit dem grössten Interesse wiederholt gelesen. G.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Vergl. Literarischer Bericht Nr. CCII. S. 8.

Band LIX. Heft IV und V. v. Littrow: Zählung der nördlichen Sterne im Bonner Verzeichnisse nach Grössen. S. 569. — Schlesinger: Darstellung der räumlichen Collinear Projectionen in orthogonalen Abbildungen. Ein Beitrag zur Gestaltung der darstellenden Geometrie im Sinne der neueren Geometrie. (Mit 1 Tafel.). S. 636. — v. Tschudi: Berichte über die Erdbeben und Meeresbewegungen an der Westküste Süd-Amerikas am 13. August 1868. S. 663. — v. Haidinger: Der Meteorit von Goalpara in Assam nebst Bemerkungen über die Rotation der Meteoriten in ihrem Zuge. (Mit 2 Tafeln und 2 Holzschnitten.). S. 665. — Boltzmann: Ueber die Festigkeit zweier mit Druck übereinander gesteckter cylindrischer Röhren. S. 679. — Haag: Ein merkwürdiger Sonnenfleck. (Mit 1 Tafel.). S. 691. — Stefan: Ueber die Grundformeln der Elektrodynamik. (Mit 7 Holzschnitten.). S. 693. — v. Waltenhofen: Ueber die Grenzen der Magnetisirbarkeit des Eisens und des Stahles. S. 770. — Oppolzer: Berichte der zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss des Jahres 1868 nach Aden unternommenen österreichischen Expedition. VI. Bericht. Geographische Coordinaten von Aden (Leuchtthurm.). S. 889.

Band LX. Heft I. Boltzmann: Ueber die elektrodynamische Wechselwirkung der Theile eines elektrischen Stromes von veränderlicher Gestalt. (Mit 1 Tafel.). S. 69. — Kiechl: Versuche zur Bestimmung des calorischen Aepuivalentes der Elektricität. (Mit 1 Holzschnitt.). S. 121.

Band LX. Heft II. Hann: Untersuchungen über die Winde der nördlichen Hemisphäre und ihre klimatologische Bedeutung. (Mit 2 Tafeln.). S. 163. — v. Obermayer: Experimentelle Bestimmung des Leitungswiderstandes in Platin-Blechen. (Mit 1 Tafel.). S. 245. — Weiss: Berichte der zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss des Jahres 1868 nach Aden unternommenen österreichischen Expedition. VII. Bericht. Schluss: Sternschnuppenbeobachtungen in Aden. (Mit 3 Karten.). S. 326. — Winckler: Ueber einige vielfache Integrale. S. 379.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Liter. Ber. Nr. CCIII. S. 10.).

Anno VIII. Marzo e Aprile 1870. Lezioni sulla Termodinamia; per M. Zannotti. p. 65. — Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la theorie des parallèles dit Postulatum d'Euclide: par J. Hoüel. p. 84. — Applicazione del Metodo di Hamilton al moto di un punto sopra una superficie; per E. Padova. p. 90. — Teoremi a dimostrare; per V. N. Bitonti. p. 96. — Memoria sull' attrazione degli *Sferoidi*; per R. del Grosso. p. 97.

Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da F. Brioschi e L. Cremona (Presso il R. Istituto Tecnico Superiore di Milano) in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal prof. Tortolini.). Milano. 4°. (Vergl. Liter. Bericht Nr. CCIII. S. 11.).

Serie II^a. Tomo III°. Fascicolo 3°. (Aprile 1870.).

Zeuthen: Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable. p. 176. — Smith: Appendice au Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques. pag. 218. — Schaelli: Sullo sviluppo del periodo imginario, pel caso che il modulo delle funzioni ellitiche sia abbastanza piccolo. pag. 243. — Volpicelli: Della distribuzione elettrica sui conduttori isolati. p. 249.

Fig. 2.

A
M
A_1
B
N

Fig. 3.

A
C_1
C_2
A_2
C
A_1

Fig. 5.

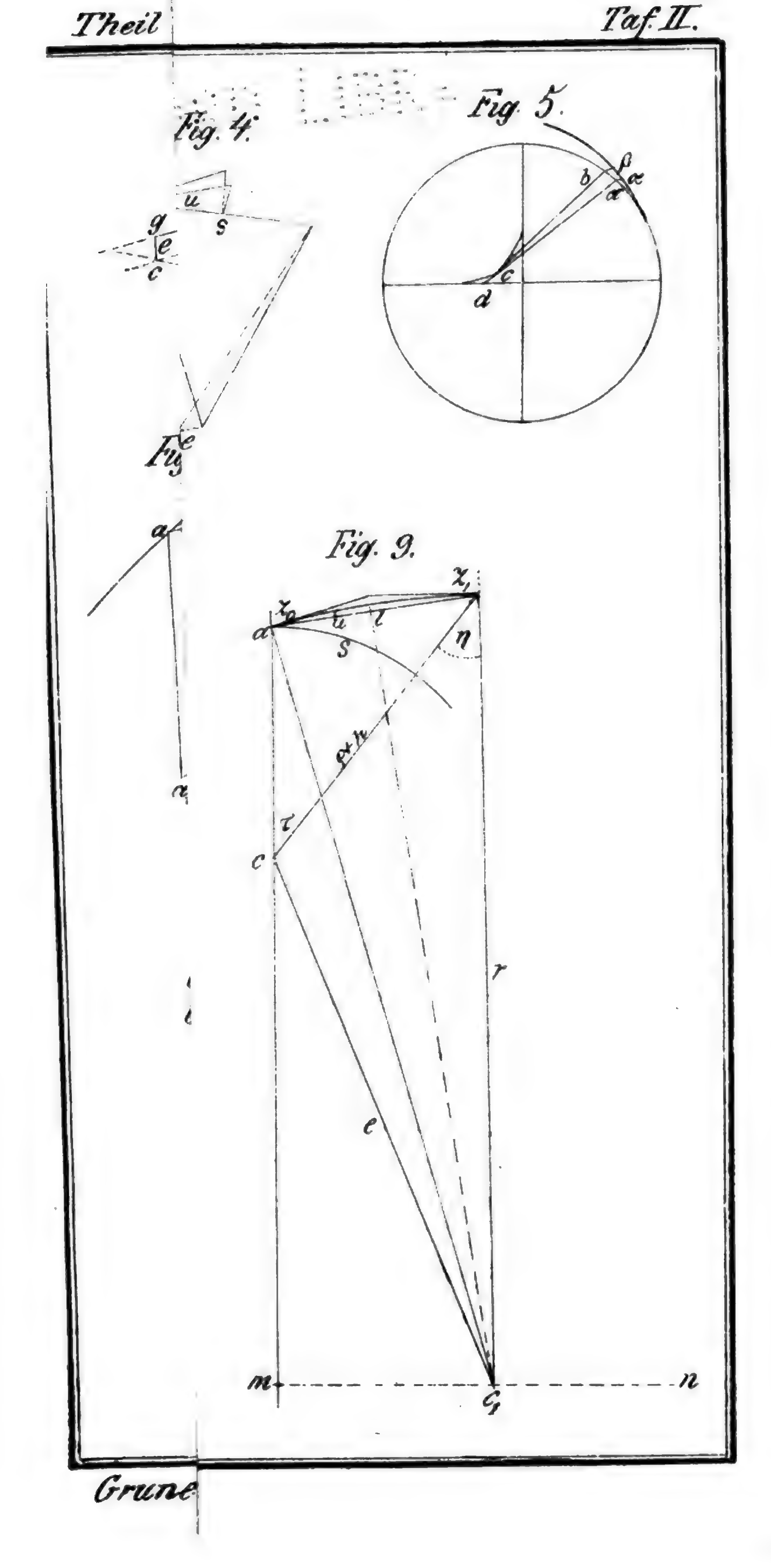
A
E_1
E
B
F
H
H_1
S
F_1
D
G
G_1
C

Most:

sbestimungen.

B

Grune


Fig. 4.
u
s
g
e
c
e
Fig. 5.
b
β
α
α
c
d
Fig. 9.
z_0
z_1
a
u
l
η
s
ρ+h
τ
c
r
e
m
n
G_1

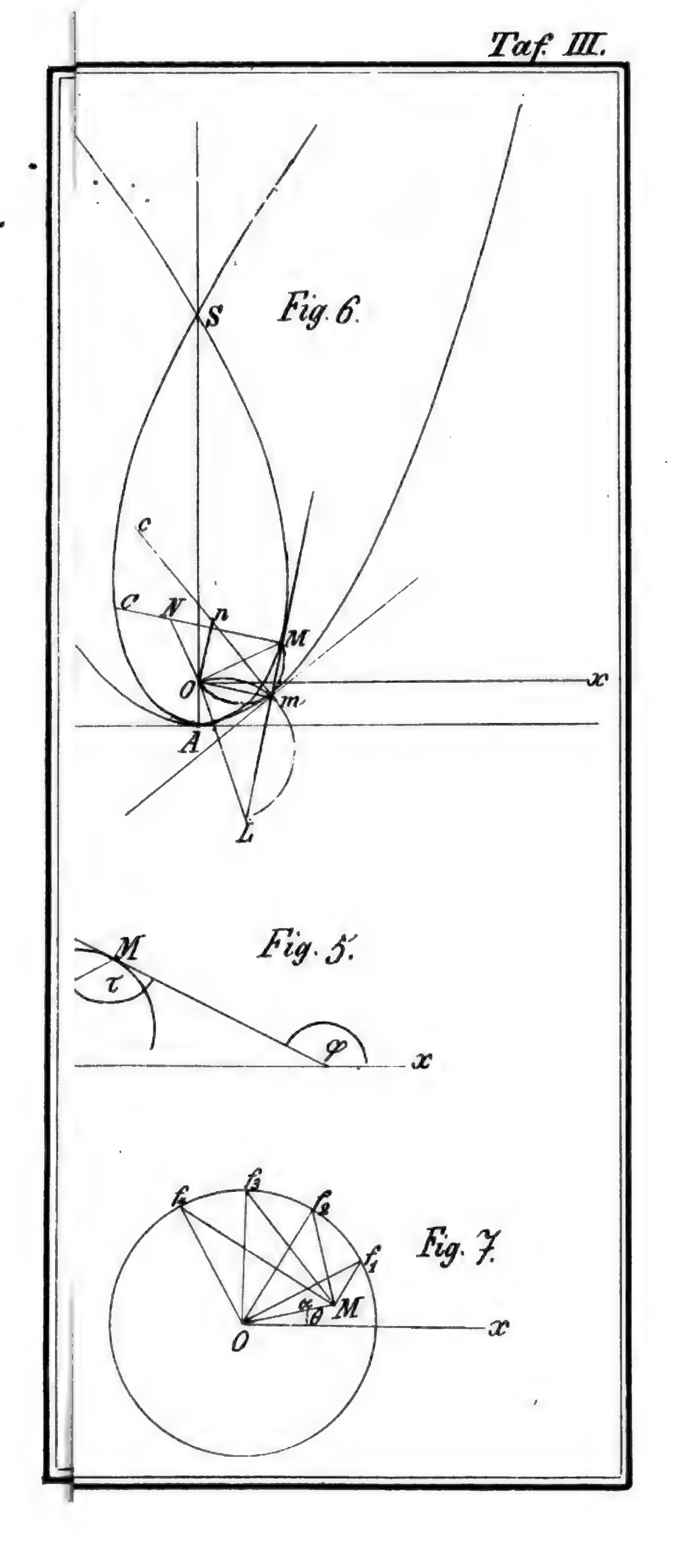

S
Fig. 6.
c
C
N
P
M
O
x
m
A
L
M
Fig. 5.
τ
φ
x
f₄
f₃
f₂
f₁
Fig. 7.
α
θ
M
O
x

Fig. 3.

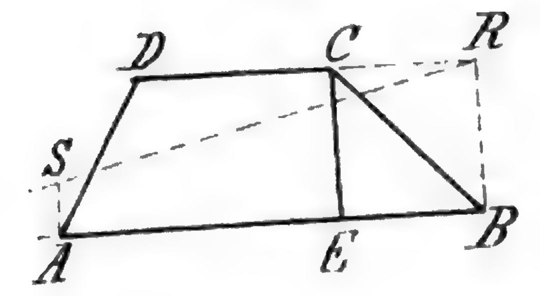
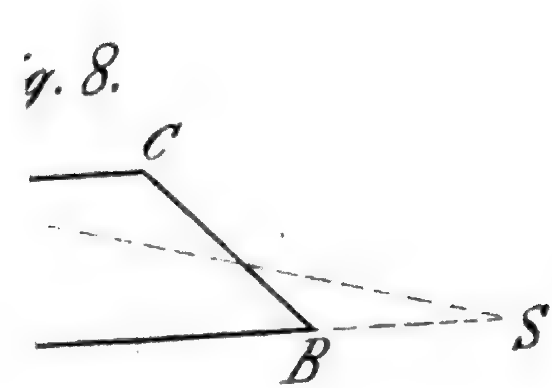


Fig. 6.



ig. 8.

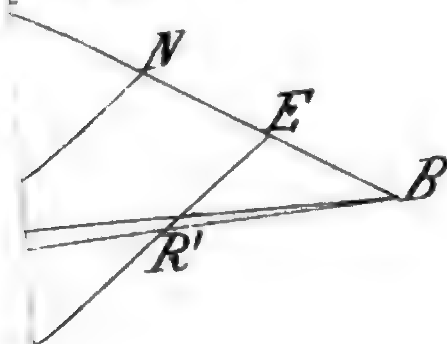
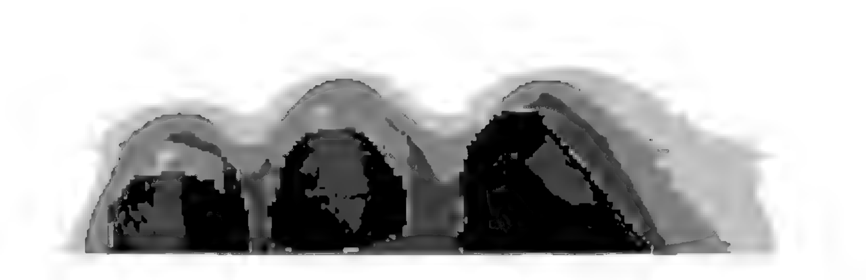


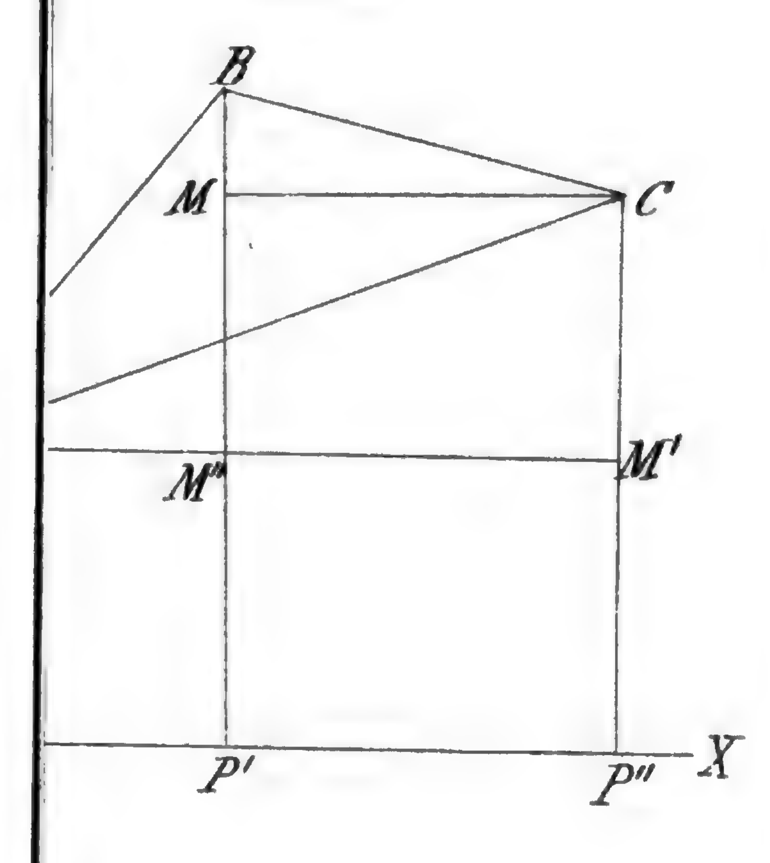
Fig. 9.

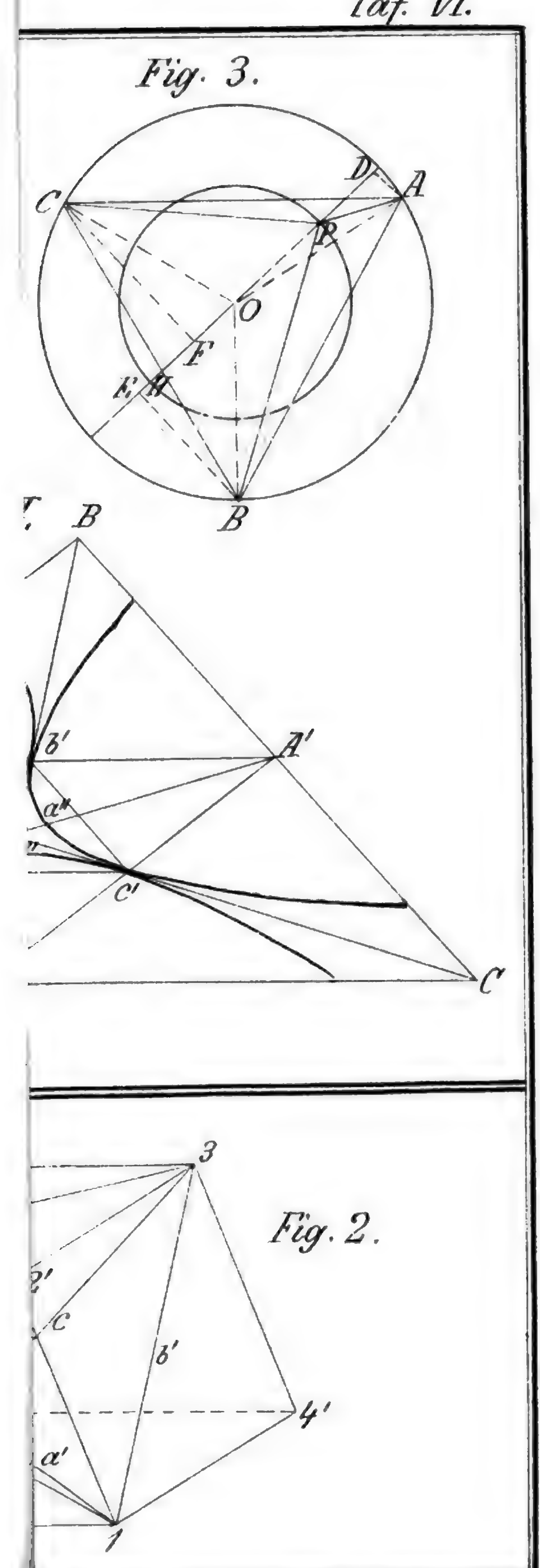


XXIII. Šimerka:

ionalen Dreiecke.

Fig. 2.




Fig. 3.
D
A
C
P
O
F
E
H
B
B
A'
b'
a''
c'
C
3
Fig. 2.
2'
c
b'
4'
a'
1

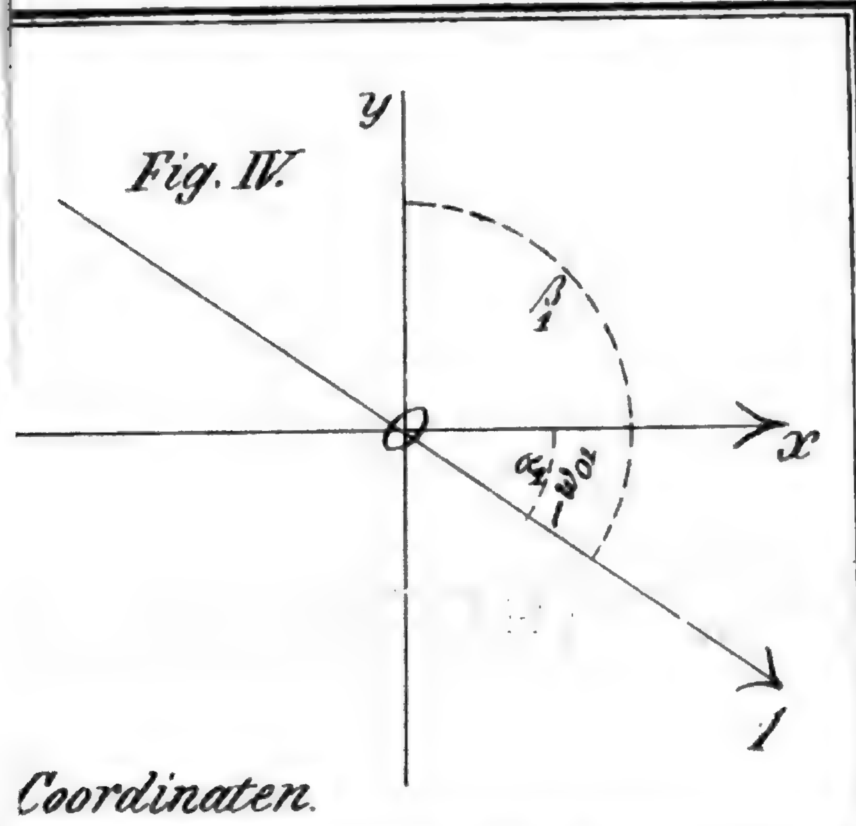




Fig: 4.

D
D
C
d
D_1
c
C
C_1
C
r
r
O
C
r
r
A_1
B_1
B
b
B
B
B

Taf. VIII.

